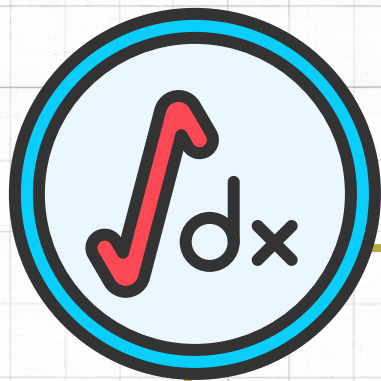
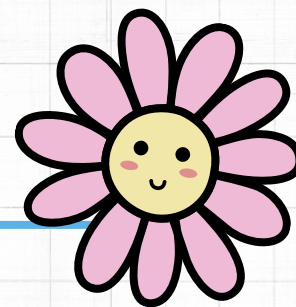




INTEGRALES



INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Fórmulas clave:

- $\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
- $\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
- $\int \operatorname{arccos}(x) dx = x \operatorname{arccos}(x) - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$

Estas integrales se derivan de las funciones trigonométricas inversas y se utilizan en diversos contextos matemáticos.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right) \right] + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C\end{aligned}$$

INTEGRALES DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Funciones logarítmicas:

- $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Funciones exponenciales:

- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

Estas integrales son fundamentales en el análisis de crecimiento y decaimiento exponencial, así como en la resolución de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \neq -1 \\ 1. \int x^4 dx &\rightarrow \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5} + C \\ 2. \int \sqrt{x} dx &\rightarrow \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C \\ 3. \int \frac{1}{x} dx &\rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \\ \int x^{-10} dx &= \frac{x^{-10+1}}{-10+1} = \frac{x^{-9}}{-9} = -\frac{1}{9x^9} + C\end{aligned}$$

INTEGRALES DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Funciones hiperbólicas:

- $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$
- $\int \tanh(x) dx = \ln|\cosh(x)| + C$
- $\int \coth(x) dx = \ln|\sinh(x)| + C$

Estas integrales son útiles en diversas aplicaciones, incluyendo la resolución de ecuaciones diferenciales y en la modelización de fenómenos físicos.

$$\begin{aligned}\text{Ejercicio n° 9): } f(x) &= \frac{3x^2 - 5x + 1}{\cosh(x)} \\ \text{Sol: } f'(x) &= \frac{(6x-5)\cosh(x) - (3x^2-5x+1)\sinh(x)}{[\cosh(x)]^2} \\ &= \frac{(6x-5)\cosh(x) - (3x^2-5x+1)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{[(6x-5)\cosh(x) - (3x^2-5x+1)\sinh(x)] \operatorname{sech}^2(x)}{\cosh^2(x)}\end{aligned}$$

INTEGRALES DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Funciones hiperbólicas inversas:

- $\int \operatorname{arsinh}(x) dx = x \cdot \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$
- $\int \operatorname{arcosh}(x) dx = x \cdot \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$
- $\int \operatorname{artanh}(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$
- $\int \operatorname{arcoth}(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C$
- $\int \operatorname{arsech}(x) dx = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \right) + C$
- $\int \operatorname{arcosh}(x) dx = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right) + C$

Estas integrales son fundamentales en el estudio de funciones hiperbólicas inversas y tienen aplicaciones en diversas áreas de la matemática y la física.

$$\begin{aligned}\text{Ejercicio n° 13): } f(x) &= \operatorname{arg} \sinh^2(e^{2x} - 5x^2) \\ \text{Sol: } f'(x) &= 3[\sinh^2(e^{2x} - 5x^2)] 2(e^{2x} - 5x)(2e^{2x} - 5) \\ &= \ln \left((e^{2x} - 5x)^2 + 1 + ((e^{2x} - 5x)^2)^2 \right) \\ &= 3(e^{2x} - 5x)(2e^{2x} - 5) \ln \left((e^{2x} - 5x)^2 + 1 + (e^{2x} - 5x)^4 \right) \sinh^2(e^{2x} - 5x)^2\end{aligned}$$