

MATEMÁTICAS APLICADAS

INTEGRACIÓN POR PARTES

La integración por partes es una técnica utilizada en cálculo para encontrar la integral de un producto de dos funciones. Es el inverso de la regla del producto en la derivación y permite descomponer una integral compleja en términos más sencillos.

En esencia, la integración por partes se basa en la siguiente fórmula:
 $\int u \, dv = uv - \int v \, du$
Donde:

u: y dv son partes de la función que se está integrando.
du: es la derivada de u.
v: es la integral de dv.

El proceso de integración por partes implica:

Identificar: u y dv dentro de la integral.

Calcular: du (la derivada de u) y v (la integral de dv).

Aplicar: la fórmula: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

Evaluar: la integral resultante $\int v \, du$, que generalmente es más fácil de resolver que la integral original.

Ejemplo:

Supongamos que queremos integrar $x \cdot \sin(x)$. Podemos elegir:

$u = x$ (esto se elige para que su derivada sea más sencilla)
 $dv = \sin(x) \, dx$

Entonces:

$du = dx$, $v = \int \sin(x) \, dx = -\cos(x)$.

Aplicando la fórmula:

$\int x \sin(x) \, dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \, dx$

$= -x \cos(x) + \int \cos(x) \, dx$

$= -x \cos(x) + \sin(x) + C$

Consejos para la elección de u y dv:

En general, se recomienda elegir como u una función polinomial, logarítmica o arcotangente, y como dv una función exponencial, seno o coseno.

El objetivo es que la nueva integral $\int v \, du$ sea más fácil de resolver que la original. En algunos casos, puede ser necesario aplicar la integración por partes varias veces.

DERIVACIÓN

La derivación en integración por partes se refiere a encontrar la derivada de una integral que depende de una variable de integración. En esencia, se aplica la regla de la cadena para derivar una función que está dentro de una integral definida o indefinida. Esto se utiliza comúnmente para resolver problemas donde la función a integrar tiene una forma específica que permite aplicar este método.

Conceptos clave:

Integral definida:

Una integral con límites de integración definidos (por ejemplo, de 0 a 1).

Integral indefinida:

Una integral sin límites de integración, que resulta en una función con una constante de integración (C).

Regla de la cadena:

Una regla para derivar funciones compuestas, donde la derivada de la función externa se multiplica por la derivada de la función interna.

Fórmula general:

Si tenemos una integral de la forma $\int f(x) \, dx$, y queremos encontrar su derivada con respecto a x, se aplica la siguiente regla:

$\frac{d}{dx} \left[\int f(t) \, dt \right] = f(x)$

Donde:

f(t) es la función dentro de la integral.

t es la variable de integración.

x es la variable con respecto a la cual se deriva.

Explicación:

La derivada de una integral con respecto a la misma variable de integración "deshace" la integración, resultando en la función original evaluada en el límite superior de la integral, o en la función original si es una integral indefinida.

Ejemplo:

Si tenemos la integral $\int (t^2 + 1) \, dt$ y queremos encontrar su derivada con respecto a x, el resultado es:

$\frac{d}{dx} \left[\int (t^2 + 1) \, dt \right] = x^2 + 1$

En este caso, f(t) = $t^2 + 1$, t es la variable de integración, y x es la variable con respecto a la cual se deriva.

Casos especiales:

Límite superior variable: Si el límite superior de la integral es una función de x (por ejemplo, g(x)), la derivada sería:

$\frac{d}{dx} \left[\int f(t) \, dt \right] \text{ (de a a } g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Donde g'(x) es la derivada de g(x) con respecto a x.

Límite inferior variable: Si el límite inferior es una función de x, se aplica un razonamiento similar, pero con una resta en lugar de una suma.