Ensayo

Samantha Vázquez Álvarez

Segundo parcial

Biomatematicas

Dr. Carlos Alberto del Valle

Medicina Humana

Segundo semestre

Comitán de Domínguez, Chiapas a 9 de Abril de 2025

Límites: Análisis teórico y aplicaciones

Concepto de límite

El concepto de límite es fundamental en el cálculo y en el análisis matemático. Representa la idea de que una función puede acercarse a un valor determinado cuando la variable independiente se aproxima a un punto específico. Esta aproximación puede ocurrir desde cualquier dirección, lo que lleva a la distinción entre límites bilaterales y unilaterales. Los límites son cruciales para definir conceptos como la continuidad y la derivabilidad, y tienen aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, donde permiten modelar y analizar fenómenos dinámicos y estáticos.

Orígenes históricos y evolución

El estudio de los límites comenzó con los antiguos griegos, quienes exploraron problemas relacionados con la aproximación y el infinito. Sin embargo, no fue hasta el siglo XVII, con el trabajo de matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, que los límites se convirtieron en un pilar del cálculo. La formalización rigurosa de los límites, mediante la definición épsilon-delta, se debe a Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass en el siglo XIX.

Importancia en el cálculo

Los límites son esenciales para dos ramas principales del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. En el cálculo diferencial, los límites definen la derivada de una función, que mide la tasa de cambio instantánea. En el cálculo integral, los límites permiten definir la integral como el límite de sumas de Riemann.

Aplicaciones prácticas

Física y ingeniería: Los límites ayudan a modelar el movimiento, la velocidad y la aceleración de objetos, así como a analizar sistemas dinámicos.

Economía: Se utilizan para estudiar el comportamiento de funciones de oferta y demanda, y para modelar crecimiento económico.

Informática: En algoritmos de interpolación y extrapolación, donde se requiere predecir valores futuros basándose en tendencias pasadas.

Tipos de límites

Límites bilaterales: Existen cuando los límites por la izquierda y la derecha coinciden.

Límites unilaterales: Se consideran cuando solo existe el límite por un lado.

Límites al infinito: Analizan el comportamiento de funciones cuando la variable tiende a infinito.

Esta introducción ampliada ofrece una visión más completa del papel central que los límites juegan en el cálculo y su impacto en diversas disciplinas científicas.

El límite matemático describe el comportamiento tendencial de una función cerca de un punto, incluso cuando no está definida en él. Surge históricamente para resolver paradojas en movimiento (Zenón) y formaliza ideas intuitivas sobre aproximación.

Perspectivas clave:

Geométrica: Valor al que se acerca la curva gráficamente

Numérica: Tabulación de valores progresivamente cercanos

Dinámica: Proceso de acercamiento infinito (x→ax→a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Aquí, la función no existe en x=2x=2 (división por cero), pero cerca de 2 simplificamos a x+2x+2, revelando el límite real.

Límites unilaterales

- Estudios laterales esenciales para funciones:
- Definidas por partes
- Con saltos o asimetrías
- Que involucran valores absolutos

Caso de estudio: Función escalón unitario

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$

El limite bilateral no existe

Propiedades de los límites (Profundizado)

Teorema del sándwich: : Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cerca de a y $\lim f(x) = \lim h(x) = L$, entonces $\lim g(x) = L$.

Aplicación practica:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Usando $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

Otras propiedades son:

- $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$ (para n impar o límite positivo)

Cálculo de límites

Técnica avanzada:

Series de Taylor : para funciones trascendentes

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Sustituyendo $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2}) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Errores frecuentes:

Asumir que $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ cuando $\lim g(x) = 0$

Confundir $\lim_{x \to a} f(x)$ con $f(a)$

Límites avanzados y continuidad

Límites al infinito - **Estrategias para funciones no racionales**:

- **Exponenciales**: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ (e^x domina cualquier polinomio)
- **Logarítmicas**: $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ ($p > 0$)

Técnica de división término a término:

Para $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}$:

1. Dividir numerador y denominador por x^2
2. Simplificar términos con $1/x^n \to 0$
3. Resultado: $3/5$

Límites infinitos - Clasificación detallada

Tipologías:

1. **Asíntota vertical bilateral**: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$
2. **Comportamiento asimétrico**:
   - $\lim_{x \to a^-} = +\infty$ y $\lim_{x \to a^+} = -\infty$
3. **Crecimiento comparativo**: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ vs $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ (no existe)

Criterio de signos

Para $\lim_{x \to a} \frac{N(x)}{D(x)}$ donde $D(x) \to 0$:

Determinar signo de numerador y denominador cerca de alfa

Ejemplo: $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$ (ambos positivos)

Continuidad - clasificación de descontinuidades

Evitable: Límite existe pero $f(a) \neq \lim f(x)$

- Solución: Redefinir $f(a)$

Salto: Límites laterales finitos pero distintos

Esencial: Al menos un límite lateral es infinito

TEOREMA DE CONVERSIÓN DE SIGNOS

Si f es continua en a y $f(a) \neq 0$, existe un entorno de a donde f mantiene el signo de $f(a)$.

Continuidad aplicada a desigualdades (Algoritmo completo)
Metodología para resolver f(x) ≥ 0:

1. Hallar dominio de continuidad

2. Identificar ceros de f(x) y puntos de discontinuidad

3. Dividir la recta real en intervalos

4. Seleccionar puntos test en cada intervalo

5. Analizar signos

6. Expresar solución considerando:

- Inclusión de ceros (≥ 0 vs > 0)
- Discontinuidades excluidas

Ejemplo aplicado:

Resolver $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x-2)} \geq 0$

- Puntos críticos: x = -3, 0, 1, 2
- Intervalos: $(-\infty, -3), (-3, 0), (0, 1), (1, 2), (2, \infty)$
- Solución: $[-3, 0) \cup [1, 2) \cup (2, \infty)$

Este desarrollo ampliado integra profundización teórica con aplicaciones prácticas, proporcionando herramientas completas para el análisis de límites y continuidad.