UDS
Mi Universidad

Biomatemáticas

Dana Yanely Solano Narvaez

2 parcial

Dr. Carlos Alberto del Valle López

Licenciatura en medicina humana

2 semestre

Comitán de Domínguez, Chiapas. 13 de abril del 2025

Derivadas

Las derivadas son un concepto fundamental del cálculo diferencial y nos indican cómo cambia una cantidad con respecto a otra.

En términos simples, **la derivada mide la pendiente o velocidad de cambio** de una función en un punto específico.

Si tienes una **función f(x)**, la derivada **f'(x)** te dice **qué tan rápido y en qué dirección cambia f(x)** cuando x cambia un poco.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2$$
$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$
$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

Derivación implícita

En cálculo diferencial, la derivación implícita es una técnica utilizada para encontrar la derivada de una variable dependiente con respecto a otra, cuando la relación entre las variables no está resuelta explícitamente como una función (es decir, no está despejada una variable respecto a la otra).

Por ejemplo, en lugar de tener una función como y=f(x)y = f(x)y=f(x), podríamos tener una relación como:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Aquí, **y** no está despejada como función de **x**, pero aún así queremos saber cómo cambia **y** con respecto a **x**. En estos casos usamos **derivación implícita**.

Muchas veces, especialmente en geometría, física o economía, las variables se relacionan de forma más compleja que una simple función explícita. Resolver una ecuación para despejar **y** puede ser difícil o imposible. Sin embargo, aún podemos encontrar la derivada usando derivación implícita.

La idea central es **derivar ambos lados de la ecuación respecto a xxx**, aplicando reglas de derivación (producto, cadena, etc.), **tratando a y como una función de x** (aunque no esté explícita).

Aplicaciones de la derivación implícita

1. **Geometría**: hallar pendientes de curvas cerradas (círculos, elipses, hipérbolas).
2. **Física**: cuando las variables están ligadas por una ecuación no explícita.
3. **Ingeniería**: relaciones termodinámicas, sistemas acoplados.
4. **Economía**: curvas de indiferencia, restricciones de producción, etc.

La derivación implícita es una herramienta poderosa que permite trabajar con relaciones entre variables complejas que no siempre están expresadas como funciones clásicas. Su utilidad se extiende a múltiples disciplinas, y dominarla te permite entender y resolver problemas en donde las derivadas normales no son suficientes.

Los límites son el concepto fundamental en el análisis matemático. La primera definición de límites de una serie geométrica fue dada por Grégoire de Saint-Vincent en su obra Opus Geometricum (1647). "El término de una progresión es el final de la serie, al que ninguna progresión puede llegar, ni siquiera si continúa hasta el infinito, pero al que puede acercarse más que un segmento determinado". Por lo general, se entiende que es una magnitud a la que se acercan progresivamente los términos de una secuencia infinita de magnitudes, por lo tanto, expresa la tendencia de una función o de una sucesión mientras sus parámetros se aproximan a un cierto valor. Los límites son cruciales para comprender la continuidad, las derivadas, la integración y otros conceptos esenciales en el cálculo y el análisis matemático. Ayudan a matemáticos y científicos a comprender el comportamiento de funciones en diversas situaciones y son fundamentales para resolver problemas en numerosos campos.

Los límites de punto o limites finito formalizan la idea de cómo se comporta una función $f(x)$ f(x) cuando la variable x se aproxima a un valor específico c. Esto establece que podemos acercar el valor de f(x) al límite L tanto como deseemos, simplemente eligiendo valores de x suficientemente cercanos a c, pero distintos de c, sin embargo, es importante destacar que el valor de f en el punto c (es decir, f(c)) no influye en la existencia o el valor del límite; de hecho, f(c) puede no estar definido, y el límite aún puede existir. Los límites infinitos presentan varios casos, uno cuando la variable tiende a infinito ($x \to \infty$), significando que la variable X de la función toma valores arbitrariamente grandes y otro caso es cuando ($x \to a$) dando como resultado un valor infinito. En los limites infinitos se presentan tres casos particulares, el primero cuando x tiende a infinito, el segundo cuando la función tiende al infinito y el tercero cuando la variable y la función tiende al infinito. El límite al infinito ocurre cuando la variable independiente x tiende a infinito positivo o negativo y se observa cómo se comporta la función a medida que los valores crecen o decrecen indefinidamente.

Matemáticamente se expresa así:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\left| \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \right|$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

Diferenciación logarítmica

La **diferenciación logarítmica** es una técnica de derivación que se utiliza cuando una función es complicada, especialmente si tiene:

- **Exponentes variables** (por ejemplo: y=xy = x^y=x)
- **Productos o cocientes** de varias funciones
- **Funciones dentro de logaritmos o potencias**

Consiste en **aplicar logaritmos naturales (ln)** a ambos lados de la ecuación antes de derivar. Esto **simplifica** la expresión y hace que sea más fácil encontrar la derivada.

Usamos diferenciación logarítmica cuando:

1. Hay potencias del tipo f(x) g(x)
2. La función es el producto o cociente de varias expresiones complejas
3. Queremos evitar usar muchas veces la regla del producto o del cociente

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)^3 \cdot \sqrt{x+1}}{e^x \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x+1)} - 1 - \frac{1}{x \ln x} \right)$$

La **diferenciación logarítmica** es una técnica muy útil para derivar funciones complejas, especialmente cuando se involucran **productos, cocientes o exponentes variables**. Facilita el proceso y reduce errores al aplicar reglas como el producto, cociente o cadena múltiples veces.

Se utiliza cuando una función tiene términos algebraicos que pueden simplificarse al factorizar la expresión.

Esto permite reducir los términos y calcular el límite de forma más sencilla. Como tenemos conocimientos cuando encontramos una indeterminación en un ejercicio de límite ósea cero sobre cero (0/0).

Debemos encontrar la manera de eliminar los factores que están causando dicha indeterminación. Entonces debemos aplicar conocimientos de factoreo, en este caso aplicaremos factor común que consiste en aplicar la propiedad distributiva a cada una de los factores.

Los límites infinitos presentan varios casos, uno cuando la variable tiende a infinito (x→∞), significando que la variable X de la función toma valores arbitrariamente grandes y otro caso es cuando (x→a) dando como resultado un valor infinito. En los limites infinitos se presentan tres casos particulares, el primero cuando x tiende a infinito, el segundo cuando la función tiende al infinito y el tercero cuando la variable y la función tiende al infinito.

Derivadas de orden superior

En cálculo diferencial, la primera derivada de una función nos dice cómo cambia esa función con respecto a una variable independiente, comúnmente x. Las derivadas de orden superior son simplemente derivadas de una derivada.

En otras palabras, si ya obtuviste la primera derivada f′(x) puedes volver a derivar esa expresión para obtener la segunda derivada f″(x), y así sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
\text{Primera derivada:} \quad & f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \\
\text{Segunda derivada:} \quad & f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \\
\text{Tercera derivada:} \quad & f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x) \\
\text{n-ésima derivada:} \quad & f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)
\end{aligned}
$$

Las derivadas de orden superior amplían el poder del cálculo diferencial al permitirnos estudiar con mayor profundidad **el comportamiento y la dinámica de una función**. Son esenciales en el estudio de fenómenos físicos, optimización, ingeniería y más. Comprender su significado e interpretación nos brinda herramientas para resolver problemas del mundo real con mayor precisión y profundidad.

Ejemplo:

Si $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$, sus derivadas serán:

- $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 7$
- $f''(x) = 12x^2 + 18x - 4$
- $f'''(x) = 24x + 18$
- $f^{(4)}(x) = 24$, y así sucesivamente.

Las derivadas de orden superior son importantes porque nos permiten entender cómo cambian los cambios en una función, es decir, no solo si una función sube o baja, sino cómo varía su comportamiento con mayor profundidad.

Son fundamentales porque **describen con precisión cómo cambian las cosas**. Son herramientas que nos permiten predecir comportamientos, optimizar resultados y diseñar sistemas complejos en matemáticas, física, economía, ingeniería y muchas otras disciplinas.

Se utiliza cuando una función tiene términos algebraicos que pueden simplificarse al factorizar la expresión. Esto permite reducir los términos y calcular el límite de forma más sencilla. Como tenemos conocimientos cuando encontramos una indeterminación en un ejercicio de límite ósea cero sobre cero (0/0). Debemos encontrar la manera de eliminar los factores que están causando dicha indeterminación. Entonces debemos aplicar conocimientos de factoreo, en este caso aplicaremos factor común que consiste en aplicar la propiedad distributiva a cada una de los factores.

Sustituimos x por infinito para ver que indeterminación es. Nos quedamos con los términos de mayor grado. Al resolver nos pueden aparecer 3 casos

Nos quedamos con el término de mayor grado, debemos escribir el límite hasta que obtengamos el resultado final.

Siendo este una representación de un valor muy grande no definido. Se dice que el límite al infinito existe cuando la función F(x) llega a adquirir valores que crecen continuamente, es decir, la función se hace tan grande como queramos. Se dice que F(x) diverge a infinito, para ello, el valor al que tienda la variable independiente x puede ser tanto a un número finito, como tender al infinito (límites al infinito).

Referencias bibliográficas:

- DERIVADAS. (2024, febrero 8). Calculodiferencial.com; Jaime Lesmes. https://calculodiferencial.com/limites/infinito/
- DERIVACIÓN IMPLICITA. De septiembre de, V. 9. (s/f). Cálculo de límites. Departamento.us.es. Recuperado el 9 de marzo de 2025, de https://departamento.us.es/edan/php/asig/GRABIO/GBM/ApendiceA.pdf
- DIFERENCIACIÓN LOGARITMICA. ejercicios resueltos. (s/f). Vadenumeros.es. Recuperado el 10 de marzo de 2025, de https://www.vadenumeros.es/sociales/limites-en-el-infinito.htm
- DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. L. (2017, noviembre 18). Resolución de Limites por Factorizaciòn. MATEMATICAS UPSE. https://llara887585438.wordpress.com/2017/11/18/primera-entrada-del-blog/