Ensayo

Ruiz Domínguez Mariana del Carmen

Primer parcial

Biomatemáticas

Dr. Carlos Alberto Del Valle López

Licenciatura en Medicina Humana

2 - C

Comitán de Domínguez, Chiapas a 07 de marzo de 2025

Límites en Matemáticas: Definición, Propiedades y Aplicaciones

Los límites son un pilar fundamental en el análisis matemático, permitiendo describir el comportamiento de funciones y sucesiones a medida que sus variables independientes se acercan a valores específicos. Comprender los límites es esencial para el estudio de conceptos avanzados como la continuidad, la derivada y la integral.

Definición Formal de Límite

Sea f(x) una función definida en un intervalo que contiene al punto c, excepto posiblemente en c mismo. Decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a c es L, y lo denotamos como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

sí, para todo número real positivo $\varepsilon > 0$, existe un número real positivo $\delta > 0$ tal que, para todo x en el dominio de f, si $0 < | x - c | < \delta$, entonces $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Tipos de Límites

1. **Límites Finito-Finito**: Cuando f(x) y g(x) son funciones que tienden a valores finitos L_1 y L_2 respectivamente, se cumplen las siguientes propiedades:
   - **Suma**:

     $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
   - **Producto**:

     $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 * L_2$
   - **Cociente**:

     $\lim_{x\to c} f(x) / g(x) = L_1 / L_2$; si $L_2 = 0$

2. **Límites Infinito-Finito**: Cuando f(x) tiende a infinito y g(x) a un valor finito, se pueden presentar indeterminaciones que requieren técnicas adicionales, como la regla de l'Hôpital, para su evaluación.

3. **Límites Finito-Infinito**: Cuando f(x) tiende a un valor finito y g(x) a infinito, el límite del cociente puede evaluarse considerando el comportamiento asintótico de las funciones involucradas.
4. **Límites Infinito-Infinito**: Cuando tanto f(x) como g(x) tienden a infinito, se pueden aplicar técnicas como la factorización, racionalización o la regla de l'Hôpital para determinar el límite del cociente.

Indeterminaciones Comunes y la Regla de l'Hôpital

Al calcular límites, es frecuente encontrar expresiones indeterminadas como 0/0 o ∞/∞. La regla de l'Hôpital proporciona una metodología para resolver estas indeterminaciones:

Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, o si ambos tienden a infinito, y las derivadas f′(x) y g'(x) existen cerca de c, entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$;si el límite del lado derecho existe

Ejemplos de Cálculo de Límites

1. **Límite de una función racional**:

Consideremos la función $f(x) = \frac{2x^2-3}{x-1}$. Queremos calcular el límite de f(x) cuando x se aproxima a 1.

Aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4x}{1} = 4$$

2. **Límite de una función trigonométrica**:

Consideremos la función g(x) = sin (2x). Queremos calcular el límite de g(x) cuando x se aproxima a 0.

Utilizando el límite conocido $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \sin(2x) = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \sin(x) = 2 \cdot 0 = 0$$

Conclusión

Los límites son herramientas esenciales en el análisis matemático que permiten describir el comportamiento de las funciones en puntos específicos o en el infinito. Comprender sus propiedades y aplicaciones es fundamental para el estudio de conceptos más avanzados como la continuidad, la derivabilidad y la integralidad de las funciones.

Referencia bibliográfica:

Dpto. EDAN. (s/f). A. Cálculo de límites. Universidad de Sevilla. p.p. 215-228.