Ensayo

Jennifer Fernanda Pérez Sánchez

Ensayo

Segundo parcial

Biomatemáticas

Dr. Carlos Alberto del Valle López

Licenciatura de Medicina Humana

Semestre 2

Grupo C

Comitán de Domínguez Chiapas a 10 de abril del 2025

El concepto de límite es uno de los pilares fundamentales del cálculo diferencial e integral, ya que permite estudiar el comportamiento de una función cuando la variable independiente se acerca a un valor específico o crece sin restricciones. Sin los límites, el desarrollo de conceptos avanzados como la derivada y la integral no sería posible. En este ensayo, analizaremos los límites en un punto, los límites en el infinito, límites con factorización y por último introducción de derivadas, como herramienta clave para resolver ciertos tipos de límites. Para ello, explicaremos sus fundamentos teóricos con sus respectivos ejemplos con su aplicación en distintos ejercicios.

1. Derivadas

Un límite en un punto describe el valor al que se aproxima una función cuando la variable independiente se acerca a un número específico. Matemáticamente, se expresa como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Lo que significa que a medida que **X** se acerca **a**, los valores de **f(X)** se aproximan a **L.** Para que un límite exista en un punto, deben cumplirse dos condiciones, si estas condiciones no se cumplen, el límite no existe.

1. El límite por la derecha y por la izquierda deben existir y ser finitos.
2. El límite por la derecha y por la izquierda deben ser iguales.

Ejemplo de Cálculo de un límite en un punto

Supongamos la función:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Queremos calcular:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 2)$$

Sustituyendo

$$1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Si la sustitución directa no funciona y obtenemos una forma indeterminada, debemos recurrir a otros métodos, como la factorización o la racionalización.

2. Derivación implícita

Los límites en el infinito nos permiten analizar el comportamiento de una función cuando la variable independiente tiende a valores extremadamente grandes o pequeños. Se expresa como:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

El resultado puede ser un número finito, infinito o no existir dependiendo del crecimiento de la función. Ejemplo de límite de una función racional en el infinito:

Consideremos la función racional:

$$f(x) = \frac{4x^3 + 2x - 1}{5x^3 - 3x + 7}$$

Queremos calcular:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + 2x - 1}{5x^3 - 3x + 7}$$

Para resolverlo, dividimos el numerador y el denominador por X3 (él término de mayor exponente en el denominador):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}$$

Lo que simplifica a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}}$$

Dado que $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{3}{x^2}$ y $\frac{7}{x^3}$ tienden a cero cuando $x \to \infty$, el límite es:

$$\frac{4}{5}$$

Por lo tanto, quedaría así:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x - 1}{5x^3 - 3x + 7} = \frac{4}{5}$$

Este resultado nos indica que la función se aproxima a 4/5 cuando $x \to \infty$ lo que sugiere la existencia de una asíntota horizontal en Y= 4/5

3. Diferenciación logarítmica

La factorización es una técnica útil para resolver límites cuando la sustitución directa da lugar a una indeterminación del tipo 0/0. Factorizando, podemos cancelar términos que nos permitan evaluar el límite de manera más sencilla.

Ejemplo de factorización para resolver un límite

Consideremos la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

Queremos calcular:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

Sustituyendo $x = 2$:

$$\frac{2^2 - 5(2) + 6}{2 - 2} = \frac{4 - 10 + 6}{0} = \frac{0}{0}$$

Esta es una forma indeterminada, por lo que debemos factorizar el numerador:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Sustituyendo en la función:

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2}$$

Cancelamos el término $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2}(x-3)$$

Sustituyendo $x=2$:

$$2-3=-1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$$

Este método nos permite evitar la indeterminación y calcular el límite de manera efectiva.

4. Derivadas de orden superior

Las derivadas son un concepto fundamental en el cálculo y se utilizan ampliamente en las matemáticas, la física y otras áreas de la ciencia. En términos simples, una derivada representa la tasa de cambio de una función en un punto dado. La derivada de una función se puede calcular mediante el límite de la razón incremental, lo que significa que se calcula la tasa de cambio de la función en un punto muy cercano al punto deseado. La notación común para la derivada de una función f(x) es f'(x) o df/dx. Las derivadas tienen muchas aplicaciones en el mundo real, como en la física, donde se utilizan para calcular la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento.

Reglas de derivación: La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas, la derivada de una diferencia de funciones es igual a la diferencia de sus derivadas, la derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función, la regla del producto: Si f(x) = g(x) * h(x), entonces f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x), la regla del cociente: Si f(x) = g(x) / h(x), entonces f'(x) = (g'(x) * h(x) – g(x) * h'(x)) / h^2(x).

Aplicaciones de las derivadas: En medicina, se pueden usar para modelar el crecimiento de poblaciones bacterianas o el progreso de enfermedades. En el ámbito de la física, se pueden usar para determinar la velocidad máxima a que un auto puede circular en una carretera. En el ámbito de la bolsa, se pueden usar para analizar las variaciones.

Ejemplo

$$f(x) = 3x^4 + 2x - 5$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}3x^4 + \frac{d}{dx}2x - \frac{d}{dx}5$$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} + 2 - 0$$

$$f'(x) = 12x^3 + 2$$

En conclusión, los límites son esenciales para analizar el comportamiento de las funciones en distintos contextos como los límites en un punto permiten entender la continuidad y derivabilidad de una función, mientras que los límites en el infinito nos ayudan a determinar asíntotas horizontales y el crecimiento de funciones y la factorización es una técnica clave para resolver límites cuando la sustitución directa genera. Y por último las derivadas nos ayudan a medir cambios y entender el comportamiento de funciones, con estas herramientas podemos analizar velocidad, aceleración, tasas de crecimiento, entre muchas otras aplicaciones.

Bibliografías:

1. De Ingenierías. (2023). Técnicas y métodos para resolver y evaluar límites de funciones: Sustitución, racionalización, factorización. Recuperado de: https://deingenierias.com/cursos/analisis-matematico/limites/tecnicas-y-metodos-para-resolver-y-evaluar-limites-de-funciones-sustitucion-racionalizacion-factorizacion/
2. Khan Academy. (s.f.). Introducción a las derivadas. Khan Academy. https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-diff-intro