



**Mi Universidad**

**Ensayo**

*Astríd Abarca Prieto*

*limites*

*Parcial II*

*Biomatematicas*

*Dr. Carlos Alberto del Valle Lopez*

*Licenciatura en Medicina Humana*

*Comitán de Domínguez, Chiapas a 09 de abril de 2025*

## LIMITES (CONCEPTO)

Los límites en matemáticas son un concepto fundamental en análisis y cálculo que permite entender el comportamiento de una función a medida que se acerca a un punto específico o al infinito. En términos simples, el límite describe el valor al que se aproxima una función cuando su variable independiente se aproxima a un cierto valor.

Por ejemplo, el límite de una función  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $a$  se denota como:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Esto significa que estamos interesados en qué valor se está acercando  $f(x)$  cuando  $x$  se acerca a  $a$ .

Los límites son útiles en varias áreas de las matemáticas, incluidos el cálculo diferencial e integral, para definir conceptos como la continuidad, la derivada y la integral. También ayudan a resolver indeterminaciones y a entender el comportamiento asintótico de las funciones.

## LAAS PROPIEDADES DE LOS LIMITES

Las propiedades de los límites son reglas y teoremas que nos ayudan a calcular límites de funciones de manera más sencilla y eficiente. Aquí te presento algunas de las propiedades más importantes de los límites:

1. Límite de una constante:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

donde  $c$  es una constante.

2. Límite de la identidad:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

3. Suma de límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

4. Resta de límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

5. Producto de límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Estas propiedades son muy útiles para simplificar el cálculo de límites, especialmente en casos complejos o al afrontar indeterminaciones.

6. **Cociente de límites** (si el límite del denominador no es cero):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

7. Límite de una potencia:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

donde  $n$  es un número real.

8. Límite de una raíz:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

siempre que el límite de  $f(x)$  sea no negativo.

El cálculo de límites en matemáticas es el proceso de determinar el valor al que se aproxima una función a medida que su variable independiente se acerca a un punto específico o al infinito. Este concepto es fundamental en el análisis matemático y es la base del cálculo diferencial e integral.

#### Importancia del Cálculo de Límites

1. **Definición de Continuidad:** Una función es continua en un punto si el límite de la función cuando se acerca a ese punto es igual al valor de la función en ese punto. Esto es crucial para muchos conceptos en matemática.

2. **Derivadas:** El cálculo de límites es esencial para definir la derivada de una función. La derivada se calcula como el límite del cociente incremental al acercarse a un punto.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3. **Integrales:** Las integrales también se basan en el cálculo de límites. La integral definida se puede interpretar como el límite de la suma de áreas de rectángulos a medida que el ancho de esos rectángulos tiende a cero.

4. **Análisis Asintótico:** Los límites son utilizados para describir el comportamiento de funciones a medida que se acercan al infinito o en puntos críticos, lo cual es fundamental en el análisis de algoritmos en matemáticas aplicadas y ciencias de la computación.

#### Métodos para Calcular Límites

- **Sustitución Directa:** Si sustituir el valor en la función no produce una indeterminación, el límite es simplemente el valor de la función en ese punto.
- **Factorización:** En casos de indeterminaciones, se puede factorizar la función para simplificarla.
- **Racionalización:** Para funciones que involucran raíces, racionalizar puede ayudar a simplificar el límite.
- **Regla de L'Hôpital:** Esta regla se utiliza para resolver indeterminaciones del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  diferenciando el numerador y el denominador.

#### Ejemplos

1. Límite básico:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 3(2)+1 = 7 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 3(2)+1 = 7$$

2. Indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

El cálculo de límites es una herramienta poderosa que permite comprender y manipular funciones en matemáticas y en diversas aplicaciones en ciencia e ingeniería.

#### DERIVADAS

La derivada es un concepto fundamental en cálculo y análisis matemático que se utiliza para describir cómo cambia una función en relación con su variable independiente. En términos simples, la derivada de una función en un punto mide la tasa de cambio instantánea de la función en ese punto. Esto es esencial para entender no solo el comportamiento local de las funciones, sino también para resolver problemas en física, economía y otras ciencias.

#### Definición Formal

La derivada de una función  $f(x)$  en un punto  $x=a$  se define como el límite del cociente de incrementos cuando el incremento de  $x$  tiende a cero:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aquí,  $h$  representa un pequeño cambio en  $x$ . Si este límite existe, se dice que la función es derivable en  $a$ , y la derivada se denota como  $f'(a)$  o  $\frac{df}{dx}$  en notación diferencial.

### Interpretación Geométrica

Gráficamente, la derivada en un punto corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. Esto implica que:

- Si  $f'(a) > 0$ , la función está aumentando en  $a$ .
- Si  $f'(a) < 0$ , la función está disminuyendo en  $a$ .
- Si  $f'(a) = 0$ , la función tiene un punto crítico en  $a$  y podría ser un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

### Reglas de Derivación

Existen varias reglas que simplifican el proceso de encontrar derivadas:

1. Regla de la suma:

$$(f+g)' = f' + g'$$

2. Regla de la diferencia:

$$(f-g)' = f' - g'$$

3. Regla del producto:

$$(fg)' = f'g + fg'(fg)' = f'g + fg'$$

4. Regla del cociente:

$$(fg)' = f'g - fg'g^2(gf)' = g^2f'g - fg'$$

5. **Regla de la cadena:** Si  $y = f(g(x))$ , entonces

$$dy/dx = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad dx/dy = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplos de Derivadas

1. **Derivada de una función**

**polinómica:** Para  $f(x) = x^3$ , su derivada es:

Aplicaciones de la Derivada

La derivada tiene muchas aplicaciones, entre las cuales se pueden destacar:

- **Optimización:** Se utiliza para encontrar máximos y mínimos de funciones, lo cual es fundamental en economía y ciencias aplicadas.
- **Dinámica:** En física, la derivada representa la velocidad, que es el cambio de posición respecto al tiempo.
- **Análisis de gráficos:** Ayuda a determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones, así como la identificación de puntos críticos.

En resumen, la derivada es una herramienta poderosa que permite analizar cómo las funciones cambian y se comportan. Proporciona información valiosa sobre la geometría de las funciones y tiene numerosas aplicaciones prácticas.

DERIVADAS DE FUNCION LOGARITMICAS

Las derivadas de funciones logarítmicas son una extensión del concepto de derivadas en cálculo, aplicadas a funciones que involucran logaritmos. Estas derivadas son útiles en una variedad de aplicaciones, como en el cálculo de tasas de crecimiento y en problemas de optimización

$$f'(x) = 3x^2 \quad f'(x) = 3x^2$$

2. **Derivada de una función trigonométrica:**

Para  $g(x) = \sin(x)$ ,  $g'(x) = \cos(x)$ :

$$g'(x) = \cos(x) \quad g'(x) = \cos(x)$$

3. **Derivada de una función exponencial:** Para  $h(x) = e^x$ ,  $h'(x) = e^x$ :

$$h'(x) = e^x \quad h'(x) = e^x$$

### Derivada del Logaritmo Natural

La función logarítmica más común es el logaritmo natural, que se denota como  $\ln(x)$ .

La derivada de esta función es:

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \text{ para } x > 0$$

Esto significa que la tasa de cambio de  $\ln(x)$  respecto a  $x$  es inversamente proporcional a  $x$ .

### Derivadas de Otras Funciones Logarítmicas

Además del logaritmo natural, también existen logaritmos en base 10 y en base  $e$  (logaritmos naturales). Para generalizar, la derivada de un logaritmo en base  $b$  se puede expresar en términos del logaritmo natural.

La fórmula general para la derivada de  $\log_b(x)$  es:

$$\frac{d}{dx} \log_b(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$$

donde  $\ln(b)$  es la derivada natural del logaritmo de la base  $b$ .

### Ejemplos de Derivadas de Funciones Logarítmicas

1. **Logaritmo Natural:** Para  $f(x) = \ln(x)$ :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2. **Logaritmo en Base 10:** Para  $g(x) = \log_{10}(x)$ :

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}$$

3. **Logaritmo en Base 2:** Para  $h(x) = \log_2(x)$ :

$$h'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$$

### Regla de la Cadena con Logaritmos

Cuando los logaritmos se aplican a funciones más complejas, se necesita utilizar la regla de la cadena. Por ejemplo, si tienes:

$$f(x) = \ln(g(x))$$

La derivada se calcula como:

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

### Ejemplo con la Regla de la Cadena

Supongamos que  $g(x) = x^2 + 1$ . Entonces:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

La derivada de  $f(x)$  usando la regla de la cadena es:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

## Aplicaciones de Derivadas de Funciones Logarítmicas

Las derivadas de funciones logarítmicas tienen diversas aplicaciones en matemáticas y ciencias, tales como:

- **Cálculo de tasas de crecimiento:** En biología y economía, los logaritmos suelen utilizarse para modelar tasas de crecimiento.
- **Ecuaciones de interés compuesto:** Proporcionan herramientas para simplificar y resolver ecuaciones que involucran exponentes.
- **Optimización:** En problemas donde las relaciones multiplicativas se transforman en sumas a través del uso de logaritmos.

Las derivadas de funciones logarítmicas permiten entender cómo cambian estas funciones en respuesta a cambios en sus argumentos. Ya sea a través de logaritmos naturales o en bases diferentes, estas derivadas son útiles en muchos campos de estudio

## DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Las derivadas de funciones exponenciales son un aspecto fundamental del cálculo y se refieren a la tasa de cambio de funciones que se pueden expresar en la forma  $f(x)=ax$ , donde  $a$  es una constante positiva, o  $f(x)=e^x$ , donde  $e$  es la base del logaritmo natural, aproximadamente igual a 2.71828.

### Derivada de la Función Exponencial

1. **Derivada de la función exponencial natural:** La función  $f(x)=e^x$  tiene una propiedad única: su derivada es igual a sí misma. Esto se expresa formalmente como:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Esto significa que, sin importar el valor de  $x$ , la tasa de cambio instantánea de  $e^x$  es igual al valor de  $e^x$  en ese punto.

2. **Derivada de funciones exponenciales con base  $a$ :** Para una función exponencial de la forma  $f(x)=a^x$ , donde  $a>0$ , la derivada se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$$

Aquí,  $\ln(a)$  es el logaritmo natural de la base  $a$ .

### Ejemplos de Derivadas de Funciones Exponenciales

1. **Función Exponencial Natural:** Para  $f(x)=e^x$ :

$$f'(x)=e^x$$

2. **Función Exponencial con Base 2:** Para  $g(x)=2^x$ :

$$g'(x)=2^x \ln(2)$$

3. **Función Exponencial con Base 10:** Para  $h(x)=10^x$ :

$$h'(x)=10^x \ln(10)$$

### Regla de la Cadena con Funciones Exponenciales

Cuando las funciones exponenciales se aplican a funciones más complejas, se puede usar la regla de la cadena. Por ejemplo, si tienes una función de la forma  $f(x)=e^{g(x)}$ , donde  $g(x)$  es alguna función de  $x$ , la derivada se calcula así:

$$f'(x)=e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

### Ejemplo con la Regla de la Cadena

Supongamos que  $g(x)=3x^2+2$ . Si consideramos:

$$f(x)=e^{3x^2+2}$$

La derivada de  $f(x)$  utilizando la regla de la cadena es:

$$f'(x) = e^{3x^2+2} \cdot (6x) = 6xe^{3x^2+2}$$

[Aplicaciones de Derivadas de Funciones Exponenciales](#)

Las derivadas de funciones exponenciales tienen muchas aplicaciones prácticas, tales como:

- **Crecimiento y Decaimiento Exponencial:** Son fundamentales para modelar procesos naturales como la población, la radioactividad y la carga y descarga de condensadores.
- **Finanzas:** Se usan para calcular el interés compuesto y el crecimiento de inversiones.
- **Ciencias Sociales y Naturales:** En estadística y modelado de fenómenos como el crecimiento de bacterias o la difusión de sustancias.

Las derivadas de funciones exponenciales son esenciales en el estudio del cálculo y proporcionan una herramienta poderosa para entender y modelar el cambio en diversas aplicaciones. La propiedad única de las funciones exponenciales, donde su derivada es proporcional al valor de la función misma, hace que sean especialmente útiles en muchos contextos. ASTRID 14

## BIBLIOGRAFIA

1. Stewart, J. (2016). *Cálculo de una variable* (7.ª ed.). Cengage Learning.
2. Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Cálculo* (13.ª ed.). Pearson.
3. Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). *Cálculo* (10.ª ed.). Cengage Learning.
4. Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2015). *Cálculo* (10.ª ed.). Wiley.
5. Stratton, D. (2011). *Calculus* (1st ed.). Cengage Learning.