Universidad del Sureste

Campus Comitán

Licenciatura en Medicina Humana.

ENSAYO: LIMITES Y SUS CONCEPTOS Y TIPOS.

Nombre: Maximiliano López Avendaño

Materia: Biomatemáticas

Grado: 2°

Grupo: "A"

Docente: Dr. Del Valle López Carlos Alberto

Comitán de Domínguez, Chiapas a 09 de marzo del 2025.

Introducción

El concepto de límite es fundamental en el cálculo diferencial y análisis matemático. Permite describir el comportamiento de una función cuando la variable independiente se acerca a un valor determinado. Este concepto es la base para la derivación y la integración, lo que lo convierte en una herramienta esencial en matemáticas, física e ingeniería.

En este ensayo, se analizarán distintos tipos de límites: límites en la expresión de una función, límites al infinito, límites con raíz cuadrada, límites al cuadrado, y límites en la diferencia de cuadrados y el factor común. Cada uno de estos casos presenta propiedades y métodos específicos para su resolución.

Límites en la Expresión de una Función

El límite de una función f(x) en un punto a se define como el valor al que tiende la función cuando la variable independiente se aproxima a. Se expresa como:

$\lim x \to a\ f(x) = L$

donde L es el valor al que se acerca la función cuando x se aproxima a.

Ejemplo:

Calculemos el siguiente límite:

$\lim x \to 2\ (x^2 - 4)/(x - 2)$

Sustituyendo x = 2 obtenemos 0/0, una indeterminación. Factorizamos el numerador:
$(x - 2)(x + 2)/(x - 2)$

Cancelamos (x - 2) y obtenemos:

$\lim x \to 2\ (x + 2) = 4$.

donde L es el valor al que se acerca la función.

Existen tres formas de evaluar un límite:

1. **Sustitución directa**: Si f(a) está definida, se evalúa directamente.
2. **Factorización y simplificación**: Si la sustitución directa resulta en una indeterminación como 0/0, se factoriza y se simplifica.
3. **Uso de conjugados**: En funciones con raíces cuadradas, se multiplica por el conjugado para simplificar la expresión.

Estos métodos permiten encontrar el valor de un límite de manera analítica.

Límites al Infinito

Los límites al infinito analizan el comportamiento de una función cuando x tiende a $+\infty+$ $+\infty$ o $-\infty$. Se expresan como:

$\lim x\to\infty \ (3x^2 + 5)/(2x^2 - 7)$

Dividimos todos los términos por x^2, obteniendo:

$(3 + 5/x^2) / (2 - 7/x^2)$

Como $x \to \infty$, los términos con x^2 en el denominador tienden a 0, dejando:
$\lim x\to\infty \ 3/2$.

Las funciones polinómicas tienen un comportamiento asintótico determinado por el término de mayor grado. En funciones racionales, el límite depende del grado del numerador y denominador:

- Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite es ∞ o $-\infty$.
- Si el grado del denominador es mayor, el límite es 0.
- Si los grados son iguales, el límite es el cociente de los coeficientes principales.

Los límites al infinito son fundamentales para definir las asíntotas horizontales de una función.

Límites con Raíz Cuadrada

Los límites con raíces cuadradas suelen generar indeterminaciones que requieren

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

manipulación algebraica. Un método efectivo es la multiplicación por el conjugado. Por ejemplo:

Multiplicamos por $\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$ para eliminar la raíz del numerador y simplificamos. Este procedimiento ayuda a evaluar el límite correctamente.

Además, en límites al infinito con raíces cuadradas, se factoriza el término de mayor grado dentro de la raíz para simplificar la expresión.

Ejemplo:

Cuando una función contiene raíces cuadradas, puede ser necesario racionalizar multiplicando por el conjugado.

lim x→4 (√x - 2)/(x - 4)

Multiplicamos por el conjugado (√x + 2):
(√x - 2)(√x + 2) / (x - 4)(√x + 2)

El numerador se simplifica a x - 4, cancelamos y obtenemos:

lim x→4 1/(√x + 2) = 1/4.

Límites al Cuadrado

Los límites de funciones cuadráticas se resuelven evaluando el comportamiento de la función conforme x se acerca a un valor dado. Consideremos:

$$\lim_{x \to a}(x^2+bx+c).$$

Aquí, si a es un número finito, se evalúa directamente. Si el límite es al infinito, el término x2 domina la expresión y el crecimiento de la función depende del coeficiente principal.

En algunos casos, se usa la técnica de factorización o conjugados para simplificar expresiones antes de evaluar el límite.

Ejemplo:

Las funciones cuadráticas pueden resolverse por sustitución directa o factorización.

$\lim_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1)/(x + 1)$

Factorizamos el numerador:
$(x + 1)(x + 1) / (x + 1)$

Cancelamos $(x + 1)$ y obtenemos:

$\lim_{x \to -1} (x + 1) = 0.$

Límites de Factor Común y Diferencia de Cuadrados

La técnica del factor común es útil cuando la sustitución directa genera una indeterminación. Se extrae un factor común y se simplifica la expresión.

Por otro lado, la diferencia de cuadrados se aplica cuando la función contiene términos como:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Por ejemplo:

$\lim_{x \to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$

Factorizamos el numerador usando la diferencia de cuadrados:
$(x - 3)(x + 3) / (x - 3)$

Cancelamos (x - 3) y obtenemos:

$\lim_{x \to 3} (x + 3) = 6.$

Estas técnicas ayudan a simplificar expresiones y evitar indeterminaciones.

Conclusión

El estudio de los límites es esencial en el cálculo diferencial y tiene aplicaciones en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. Cada tipo de límite presenta desafíos específicos, pero con herramientas como la factorización, el uso de conjugados y la manipulación algebraica, es posible evaluarlos correctamente.

Los límites proporcionan una base sólida para el análisis de continuidad y derivadas, lo que los convierte en una herramienta poderosa en la modelización matemática de fenómenos físicos y económicos.