# Ensayo

*Heidy Elizabeth Filio Villatoro*

*Integrales*

*4to parcial*

*Biomatemáticas*

*Dra. Karen Morales Morales*

*Licenciatura en medicina humana*

*2do. Semestre*

*Comitán de Domínguez, Chiapas a 30 de Junio de 2025*

**Límites al cuadrado**

A continuación se presenta la definición formal de límite, la cual también es conocida como definición E-D (epsilón-delta). El lím x ->a f(x) = L, si para todo E > 0 existe un D > 0, tal que:

Si 0 < | x - a | < D, entonces | f(x) - L | < E

Dicho de otra forma, lím x->a f(x) =L, si para cualquier número positivo elegido E, por pequeño que sea, existe un número positivo D tal que, siempre que 0 < | x -a | < D entonces | f(x) - L | < E

La definición nos dice que para lím x->a f(x) =L existe un número D > 0 lo suficientemente pequeño para un número E > 0 dado, tal que todo x en el intervalo (a-D, a+D) con excepción posiblemente del mismo a, tendrá su imagen f(x) en el intervalo (L-E, L+E). Observa que para un D1<D para el mismo E, la imagen de un valor x en el intervalo (a-D1, a+D1) estará dentro del intervalo (L-E, L+E) lo cual sólo cambia si tomamos un valor de epsilón distinto.

## Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, $c$ una constante y $n$ número real, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ con $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

Limites al cuadrado

$$\lim_{x \to 3} 4x^2 - 2x - 6 = 4(3)^2 - 2(3) - 6 = 24$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2v^2 - 15v + 18}{3v^2 - 17v - 6} = \frac{2(3)^2 - 15(3) + 18}{3(3)^2 - 17(3) - 6} = \frac{0}{-30} = 0$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(4)^2 - 8(4) + 15}{(4)^2 - 7(4) + 12} = \frac{-1}{0} = \text{lim. no existe}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^2 + 4x - 3}{2x - 1} = \frac{4(2)^2 + 4(2) - 3}{2(4) - 1} = \frac{21}{7} = 3$$

**Límites infinitos**

Sea una función f definida en el intervalo $(a,\ \infty)$. Si se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

entonces significa que los valores de f(x) se aproximan a L tanto como se quiera para una x lo suficientemente grande, sabemos que ∞ no es un número, sin embargo, se acostumbra decir "el límite de f(x), cuando x tiende al infinito, es L".

Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite:

- $n \in N$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

Si f y g son dos polinomios de grado m y n respectivamente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} 0, \text{ si m < n} \\ \frac{a_0}{b_0}, \text{ si m = n. (a y b son los coeficientes de } x^m\ y\ x^n\text{)} \\ \text{no existe, si m > n} \end{cases}$$

## Limites infinitos

$$\lim_{w\to\infty} \frac{3w^2+5w-2}{5w^3+4w^2+1} = \lim_{w\to\infty} \frac{\frac{3w^2}{w^3}+\frac{5w}{w^3}-\frac{2}{w^3}}{\frac{5w^3}{w^3}+\frac{4w^2}{w^3}+\frac{1}{w^3}}$$

$*\, n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0$

$$\lim_{w\to\infty} \frac{\frac{3}{w}+\frac{5}{w^2}-\frac{2}{w^3}}{5+\frac{4}{w}+\frac{1}{w^3}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{11x+6}{4-6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{11x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{4}{x}-\frac{6x}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{11+\frac{6}{x}}{\frac{4}{x}-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{11}{-6} = -\frac{11}{6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2^x}{2^x}-\frac{2^{-x}}{2^x}}{\frac{2^x}{2^x}+\frac{2^{-x}}{2^x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2^{-2x}}{1+2^{-2x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{ax^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{ax^2+1} \div x}{x \div x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

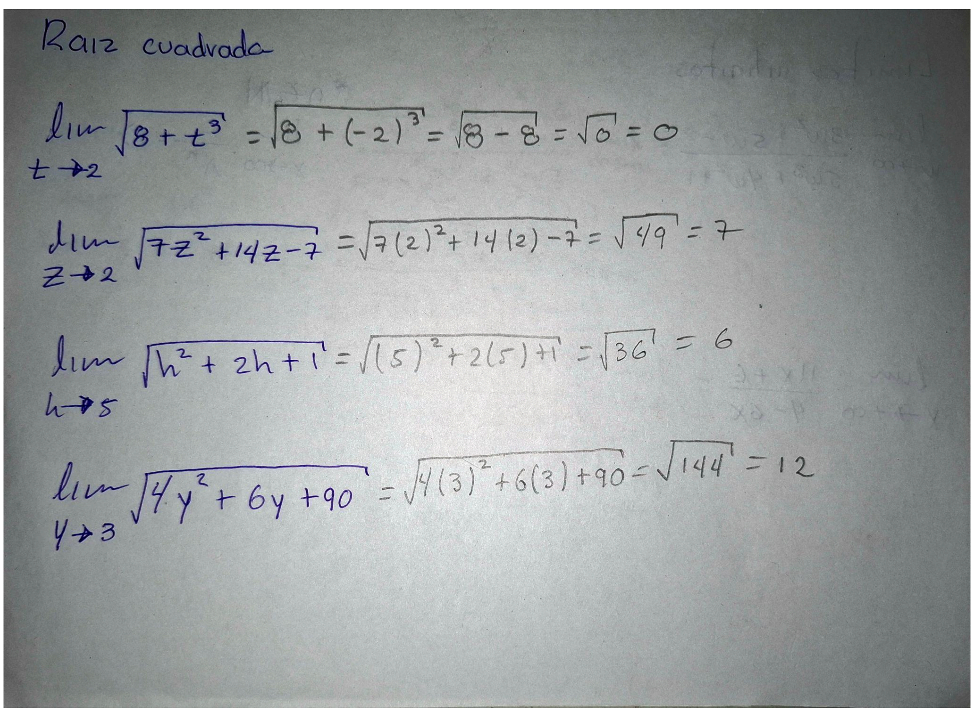
## Limites con raiz cuadrada

Cuando hablamos de límites de funciones que involucran raíces cuadradas, uno de los aspectos más importantes es cómo tratar los casos en los que la expresión bajo la raíz cuadrada puede ser negativa, o cuando la raíz no está definida en algún punto específico. Vamos a repasar algunos casos comunes y los enfoques para manejarlos.

Supongamos que tienes una función como:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

En este caso, tiende a un número positivo o a 0 cuando x se aproxima, entonces el límite será definido. Sin embargo, si la función bajo la raíz cuadrada tiende a un valor negativo, entonces la raíz cuadrada no estará definida en el conjunto de los números reales.



## Límites por factorización

Son aquellos cuyo resultado es de la forma 0/0. Por consiguiente es necesario eliminar la indeterminación. Una indeterminación se elimina al factorizar o racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

| | | |
|---|---|---|
| *a*) | Factor común | $ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$ |
| *b*) | Diferencia de cuadrados | $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ |
| *c*) | Trinomio cuadrado perfecto | $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ |
| *d*) | Trinomio de la forma | $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ |
| *e*) | Suma o diferencia de cubos | $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ |
| *f*) | Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ | $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$ |

Factorizacion

$$\lim_{v \to 4} \frac{v^2 - 6v + 8}{2v^2 - 8v} \to \frac{0}{0} = \lim_{v \to 4} \frac{(v-2)\cancel{(v-4)}}{2v\cancel{(v-4)}}$$

$$\lim_{v \to 4} \frac{v-2}{2v} = \frac{4-2}{2(4)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{h \to \frac{1}{2}} \frac{8h^3 - 1}{1 - 2h} = \lim_{h \to \frac{1}{2}} \frac{(2h)^3 - 1^3}{1 - 2h}$$

$$\lim_{h \to \frac{1}{2}} \frac{(2h-1)[(2h)^2 + 2h + 1]}{1 - 2h}$$

$$\lim_{h \to \frac{1}{2}} \frac{-\cancel{(1-2h)}(4h^2 + 2h + 1)}{\cancel{1-2h}}$$

$$\lim_{h \to \frac{1}{2}} -4h^2 - 2h - 1 = -4\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1 = -3$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{6x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(3x+1)}{(6x^2 + 3x) + (2x + 1)}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(3x+1)}{3x(2x+1) + 2x + 1}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{(3x-1)\cancel{(3x+1)}}{(2x+1)\cancel{(3x+1)}} =$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right) - 1}{2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6$$

## Referencias


- Aguilar Márquez, A.; Bravo Vásquez, F. V.; Gallegos Ruiz, H.A.; Cerón Villegas, M.; Reyes Figueroa, R.. (2009). *Matematicas Simplificadas* (2 ed ed.). [1] PEARSON.
- Granville, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. Limusa.