Nombre: Liliana Guadalupe Espinosa Roblero

Materia: Matemática Aplicada.

Profesor: Vania Natali Santizo.

Carrera: Técnico en enfermería

6to semestre    Grupo: Único

Parcial: 2

Tema: Ejercicio.

Calcular la integral definida usando la Suma de Riemann

Queremos calcular la integral definida de la función $f(x) = x^2 + 4x + 2$

En el intervalo $(a, b) = (0, 4)$ usando la definición de la suma de Riemann.

Fórmula de la Suma de Riemann

La fórmula general para una suma de Riemann es:

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

Donde:

- $x_k$ es el punto donde se evalúa la función en cada subintervalo
- $\Delta x$ es el ancho de cada subintervalo q se define como:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

En este caso:

- $a = 0, b = 4$, y $f(x) = x^2 + 4x + 2$.

Definimos los valores

Primero, calculemos $\Delta x$:

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

Ahora, definimos los puntos $x_k$ donde se evalúa la función. Suponiendo que tomamos el extremo derecho de subintervalo, tenemos:

$x_k = a + k \cdot \Delta x = 0 + k \cdot \frac{4}{n} = \frac{4k}{n}$

Evaluamos la función en los puntos $x_k$

La función $f(x)$ es $x^2 + 4x + 2$, por lo que evaluamos en $x_k = \frac{4k}{n}$

$f\left(\frac{4k}{n}\right) = \left(\frac{4k}{n}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4k}{n} + 2$

Simplificamos cada término

- $\left(\frac{4k}{n}\right)^2 = \frac{16k^2}{n^2}$
- $4 \cdot \frac{4k}{n} = \frac{16k}{n}$
- La constante es 2.

Por lo tanto:

$$f\left(\frac{4k}{n}\right) = \frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{n} + 2$$

Sustituimos en la suma de Riemann

La suma de Riemann se convierte en:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{n} + 2\right) \cdot \frac{4}{n}$$

Distribuimos $\frac{4}{n}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{64k^2}{n^3} + \frac{64k}{n^2} + \frac{8}{n}\right)$$

Separamos las sumas

La suma se descompone en tres sumas más simples:

$$S_n = \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{64}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

Usamos las fórmulas para las sumas conocidas

Sabemos que:

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Sustituimos estas fórmulas en la expresión

$$S_n = \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n} \cdot n$$

Simplificamos cada término

Ahora simplificamos cada término:

El primer término:

$$\frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{64(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

El segundo término:

$$\frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{32(n+1)}{n}$$

El tercer término:

$$\frac{8}{n} \cdot n = 8$$

Tomamos el límite cuando $n \to \infty$

Ahora, tomamos el límite de cada término cuando $n \to \infty$:

El primer término:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{64(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{64 \cdot 2}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

El segundo término:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{32(n+1)}{n} = 32$$

El tercer término:

$$\lim_{n \to \infty} 8 = 8$$

Resultado final

Sumamos los tres términos:

$$\frac{64}{3} + 32 + 8 = \frac{64}{3} + \frac{40}{1} = \frac{120+64}{3} = 184|3$$

Por lo tanto, el valor de la integral es:

$$\int_{1}^{4} (x^2 + 4x + 2)\, dx = \frac{184}{3}$$