$f(x) = x^2 + 4x + 2$

$a = 0$

$b = 4$

$\int_0^4 (x^2 + 4x + 2)\,dx$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$f = (a + k(\frac{4}{n})) = f(0 + \frac{4k}{n})$

$f = \frac{4k}{n}$

$f(\frac{4k}{n}) = (\frac{4k}{n})^2 + 4(\frac{4k}{n}) + 2$

$(\frac{4k}{n})^2 = \frac{16k^2}{n^2}$

$4 \cdot \frac{16k}{n} = \frac{16k}{n}$

$f(\frac{4k}{n}) = \frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{2} + 2$

$\sum_{k=1}^{n} f(\frac{4k}{n}) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} (\frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{n} + 2) \cdot \frac{4}{n}$

$\sum_{k=1}^{n} (\frac{64k^2}{n^3} + \frac{64k}{n^2} + \frac{8}{n})$

$\frac{64}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{64}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n}$

$k=1 \quad k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$k=1 \quad k = \frac{n(n+1)}{2}$

$k = 1 \quad \frac{8}{n} = \frac{8^2}{n} \cdot n = 8$

$$\frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 8$$

$$\frac{64n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\frac{64n(n+1)}{2n^2} = \frac{32(n+1)}{n}$$

8

$$\lim_{n \to \infty} \frac{64n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{64 \cdot 1 \cdot 2}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{32(n+1)}{n} = \lim_{n \to \infty} 32\left(1+\frac{1}{n}\right) = 32$$

$$\lim_{n \to 8} 8 = 8$$

$$\frac{64}{3} + 32 + 8 = \frac{64}{3} + \frac{40}{1} = \frac{120+64}{3} = \boxed{\frac{184}{3}}$$

$$R = \frac{184}{3}$$

Cómo resolver una integral por las sumas de Riemann

Vamos a resolver la expresión que nos quedó en el apartado anterior y por tanto resolveremos la integral por sumas de Riemann.

Partimos de la expresión anterior:

$$\int_0^3 x^3.dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n} =$$

Resolvemos el paréntesis elevando al cubo:

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{27.i^3}{n^3} \cdot \frac{3}{n} =$$

Y multiplicamos ambas fracciones:

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{81.i^3}{n^4} =$$

Lo sea constante lo podemos sacar fuera del sumatorio. Todo lo que no lleve i, se considera constante, por lo que sacamos los términos que no llevan i fuera del sumatorio:

Lo sea constante lo podemos sacar fuera del sumatorio. Todo lo que no lleve i, se considera constante, por lo que sacamos los términos que no llevan i fuera del sumatorio:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81}{n^4} \sum_{i=0}^{n} i^3 =$$

Llegados a este punto el sumatorio de i elevado al curo desde i=0 hasta n es igual a esta fórmula:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

Se puede demostrar pero no es el objetivo de esta lección.

Sustituimos el sumatorio por su expresión, según la fórmula anterior:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81}{n^4} \cdot \left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \right) =$$

Multiplicamos el paréntesis:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81.n^4}{4.n^4} + \frac{81.n^3}{2.n^4} + \frac{81.n^2}{4.n^4} =$$

Y simplificamos términos:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81}{4} + \frac{81}{2.n} + \frac{81}{4.n^2} =$$

Y al resolver el límite nos queda:

$$= \frac{81}{4} \ u^2$$

El resultado está en unidades cuadradas porque estamos calculando un área.

Para demostrar que el resultado es correcto, voy a resolver la integral definida por la regla de Barrow:

$$\int_0^3 x^3.dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \left(\frac{3^4}{4}\right) - \left(\frac{0^4}{4}\right) = \frac{81}{4} \ u^2$$

Y como no podía ser de otra forma, el resultado es el mismo.

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3=\left(\frac{3^4}{4}\right)-\left(\frac{0^4}{4}\right)=\frac{81}{4}\ u^2$$

Y como no podía ser de otra forma, el resultado es el mismo.

Fórmula de sumatorios para resolver sumas de Riemann

Por último, te dejo aquí las fórmulas de los sumatorios desde le sumatorio de 1 hasta el sumatorio de i al cubo (que hemos utilizado en el ejemplo), desde 1=0 hasta n, que vas a necesitar para resolver integrales con las sumas de Riemann:

$$\sum_{i=0}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$