UDS

Mi Universidad

Nombre del Alumno: Marely Concepción Jiménez Gordillo

Nombre del tema: Problema

Nombre de la Materia: Matemática Aplicada

Nombre del p0rofesor: Vania Natali Santizo Morales

Nombre de la Licenciatura: Técnico en enfermería general

Semestre: 6° de bachillerato

Plataforma

SUMA DE RIEMANN

¿QUÉ ES?

Es una forma de aproximar el área bajo una curva (o el valor de una integral definida) usando rectangulos.

¿PARA QUÉ SIRVE?

La suma de Riemann sirve para estimar áreas, construir integrales, y resolver problemas reales cuando no se puede usar cálculo exacto

RELACIÓN ENTRE SUMA DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida de una función f(x) en el intervalo [a,b] se puede entender como el límite de una suma de Riemann cuando el número de rectangulos tiende a infinito

TIPOS

1. Por la izquierda: Se toma el extremo izquierdo de cada subintervalo para evaluar la función. $S_{izq}=\sum_{k=1}^{n} f(a+(k-1)\Delta x)\Delta x$
2. Por la derecha: Se utiliza el extremo derecho de cada subintervalo para la evaluación
   $S_{der}=\sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$
3. Por punto medio: Se toma el punto medio de cada subintervalo.
   $S_{med}=\sum_{k=1}^{n} f(a+(k-\frac{1}{2})\Delta x)$
4. Con puntos arbitrarios: Se escoge un punto arbitrario dentro de cada subintervalo.
   $S_{arb}=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ donde $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$

HISTORIA

Nació de la necesidad de aproximar áreas y volúmenes, evolucionó con el desarrollo del cálculo y alcanzo una formulación rigurosa en el siglo XIX gracias a Bernhard Riemann.

Su metodo y sus ideas siguen siendo fundamentales tanto en la teoría como en la aplicación práctica del análisis matemático.

$f(x) = x^2 + 4x + 2$

$a = 0$

$b = 4$

$$\int_0^4 (x^2 + 4x + 2)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Calculamos Δx

El ancho de cada subintervalo Δx se calcula con la fórmula:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

Calculamos $f(a + k\Delta x) =$

$f\left(0 + k\left(\frac{4}{0}\right)\right) = f\left(0 + \frac{4k}{n}\right)$

Evaluamos la función en

$f = \frac{4k}{n}$

Sustituimos la función

$f\left(\frac{4k}{n}\right) = \left(\frac{4k}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{4k}{n}\right) + 2$

Calculamos cada parte

$\left(\frac{4k}{n}\right)^2 = \frac{16k^2}{n^2}$

$4 \cdot \frac{4k}{n} = \frac{16k}{n}$

Constante: 2

Entonces:

$f\left(\frac{4k}{n}\right) = \frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{n} + 2$

Sustituimos en la suma de Riemann

$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^2} + \frac{16k}{n} + 2\right) \cdot \frac{4}{n}$

Multiplicamos

$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{64k^2}{n^3} + \frac{64k}{n^2} + \frac{8}{n}\right)$

Separamos la suma

$\frac{64}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{64}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n}$

Aplicamos las fórmulas de sumas

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n} = \frac{8}{n} \cdot n = 8$

Entonces:

$\frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 8$

Simplificamos cada termino

$\frac{64n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$\frac{64n(n+1)}{2n^2} = \frac{32(n+1)}{n}$

8

Calculamos el límite cuando $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{64n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{64 \cdot 1 \cdot 2}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{32(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} 32(1+\frac{1}{n}) = 32$

$\lim_{n\to\infty} 8 = 8$

Sumamos todo

$\frac{64}{3} + 32 + 8 = \frac{64}{3} + \frac{40}{1} = \frac{120+64}{3} = \frac{184}{3}$

Resultado final:

$\int_0^4 (x^2+4x+2)\,dx = \frac{184}{3}$