Nombre: Alberto bermudez Trujillo

Plataforma

Super nota

Matemáticas

Bibliografía: Wikipedia y antología

Vectores

Un vector es un objeto matemático que tiene tanto magnitud como dirección. Es una representación geométrica en el espacio que puede ser usado para describir posiciones, desplazamientos, y muchas otras cantidades físicas. Los vectores se representan comúnmente en coordenadas, como por ejemplo,

$v$

$\rightarrow$

=

(

$v$

1

$v$

2

$\vdots$

$v$

$n$

)

v

=

v

1

v

2

⋮

v

n

, donde

$v$

1

,

$v$

2

,

…

,

$v$

$n$

v

1

,v

2

,…,v

n

son los componentes del vector.

Los vectores pueden ser clasificados en dos tipos principales:

Vectores fila: Son representados en una sola fila, como

[

$v$

1

,

$v$

2

,

…

,

$v$

$n$

]

[v

1

,v

2

,…,v

n

].

Vectores columna: Son representados en una sola columna, como

(

$v$

1

$v$

2

⋮

$v$

$n$

)

v

1

v

2

⋮

v

n

.

Los vectores se pueden sumar, restar y multiplicar por un escalar. También es posible calcular el producto escalar entre dos vectores, el cual da un valor numérico y es útil en muchas aplicaciones de física y álgebra.

## Introducción a las Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas. Las matrices se representan como:

$A$

=

(

$a$

11

$a$

12

…

$a$

1

$n$

$a$

21

$a$

22

…

$a$

2

$n$

⋮

⋮

$\ddots$

$\vdots$

$a$

$m$

1

$a$

$m$

2

$\cdots$

$a$

$m$

$n$

)

A=

a

11

a

21

$\vdots$

a

m1

a

12

a

22

⋮

a

m2

⋯

⋯

⋱

⋯

a

1n

a

2n

⋮

a

mn

Donde

$m$

m es el número de filas y

$n$

n es el número de columnas. Las matrices se utilizan para representar sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales, y en general, cualquier relación entre conjuntos de variables.

Tipos Especiales de Matrices

Existen varios tipos de matrices que tienen propiedades especiales:

Matriz cuadrada: Tiene el mismo número de filas y columnas (

$m$

=

$n$

m=n).

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Ejemplo:

$D$

=

(

$d$

1

0

0

0

$d$

2

0

0

0

$d$

3

)

D=

d

1

0

0

0

d

2

0

0

0

d

3

Matriz identidad: Es una matriz diagonal especial donde todos los elementos de la diagonal principal son 1. Se denota por

$I$

$n$

I

n

, donde

$n$

n es el tamaño de la matriz. Ejemplo de matriz identidad 3x3:

$I$

3

=

(

1

0

0

0

1

0

0

0

1

)

I

3

=

1

0

0

0

1

0

0

0

1

Matriz transpuesta: La matriz transpuesta de una matriz

$A$

A se obtiene intercambiando sus filas y columnas. Se denota como

$A$

$T$

A

T

.

Matriz simétrica: Es una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta, es decir,

$A$

=

$A$

$T$

A=A

T

.

Matriz nula: Es una matriz cuyos elementos son todos ceros.

Operaciones con Matrices

Las matrices se pueden manipular mediante diversas operaciones:

Suma y resta de matrices: Para que se pueda sumar o restar dos matrices, ambas deben tener el mismo tamaño. Se realiza operando componente a componente.

Multiplicación por un escalar: Consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por un escalar. Si

$A$

A es una matriz y

$k$

k es un escalar, la multiplicación por un escalar es

$k$

$\cdot$

$A$

k·A.

Multiplicación de matrices: El producto de dos matrices

$A$

A y

$B$

B es posible cuando el número de columnas de

$A$

A coincide con el número de filas de

$B$

B. La matriz resultante

$C$

$=$

$A$

$\cdot$

$B$

C=A·B tendrá tantas filas como

$A$

A y tantas columnas como

$B$

B.

Inversa de una matriz: Una matriz cuadrada

$A$

A tiene una matriz inversa

$A$

−

1

A

−1

si y solo si

$A$

.

$A$

−

1

=

$I$

A·A

−1

=I, donde

$I$

I es la matriz identidad.

Representación Matricial de Ecuaciones

Las matrices se utilizan para representar sistemas de ecuaciones lineales. Consideremos el sistema:

$a$

11

$x$

1

+

$a$

12

$x$

2

+

$\cdots$

+

$a$

1

$n$

$x$

$n$

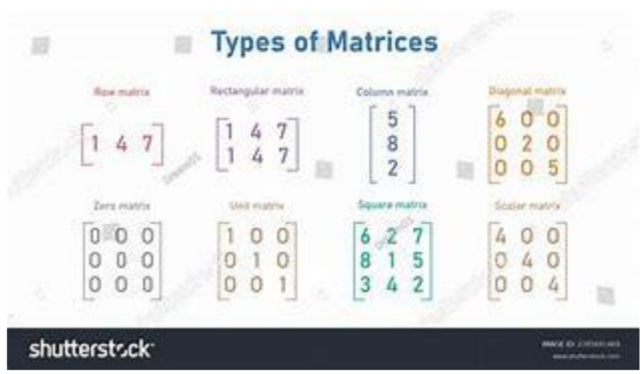
=

$b$

1

a

11




x

1

+a

12

x

2

+⋯+a

1n

x

n

=b

1

$a$

21

$x$

1

+

$a$

22

$x$

2

+

⋯

+

$a$

2

$n$

$x$

$n$

=

$b$

2

a

21

x

1

+a

22

x

2

+⋯+a

2n

x

n

=b

2

⋮

⋮

$a$

$m$

1

$x$

1

+

$a$

$m$

2

$x$

2

+

…

+

$a$

$m$

$n$

$x$

$n$

=

$b$

$m$

a

m1

x

1

+a

m2

x

2

+⋯+a

mn

x

n

=b

m

Este sistema se puede representar de manera matricial como:

$A$

.

$X$

=

$B$

A·X=B

Donde:

$A$

A es la matriz de coeficientes.

$X$

X es el vector columna de las incógnitas

$x$

1

,

$x$

2

,

…

,

$x$

$n$

x

1

,x

2

,…,x

n

.

$B$

B es el vector columna de los términos constantes.

Introducción a los Determinantes

El determinante de una matriz es un número asociado a las matrices cuadradas que proporciona información importante sobre la matriz, como si es invertible o no. El determinante se denota como

det

(

$A$

)

det(A) o

|

$A$

|

|A|. Existen diferentes métodos para calcular el determinante, dependiendo del tamaño de la matriz.

Solución de un Determinante de 2x2 y 3x3

Determinante de una matriz 2x2:

Si tenemos la matriz:

$A$

=

(

$a$

$b$

$c$

$d$

)

A=(

a

c

b

d

)

El determinante se calcula como:

det

(

$A$

)

=

$a$

$d$

−

$b$

$c$

det(A)=ad−bc

Determinante de una matriz 3x3:

Si tenemos la matriz:

$A$

=

(

$a$

$b$

$c$

$d$

$e$

$f$

$g$

$h$

$i$

)

A=

a

d

g

b

e

h

c

f

i

El determinante se puede calcular usando el método de cofactores o el método de columnas aumentadas:

det

(

$A$

)

=

$a$

$\cdot$

det

(

$e$

$f$

$h$

$i$

)

−

$b$

$\cdot$

det

(

$d$

$f$

$g$

$i$

)

+

$c$

$\cdot$

det

(

$d$

$e$

$g$

$h$

)

det(A)=a·det(

e

h

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

f

i

)−b·det(

d

g

f

i

)+c·det(

d

g

e

h

)

Método de Columnas Aumentadas y Cofactores

Método de Columnas Aumentadas:

Se utiliza para calcular determinantes de matrices más grandes. Consiste en ampliar la matriz añadiendo una copia de las primeras

$n$

−

1

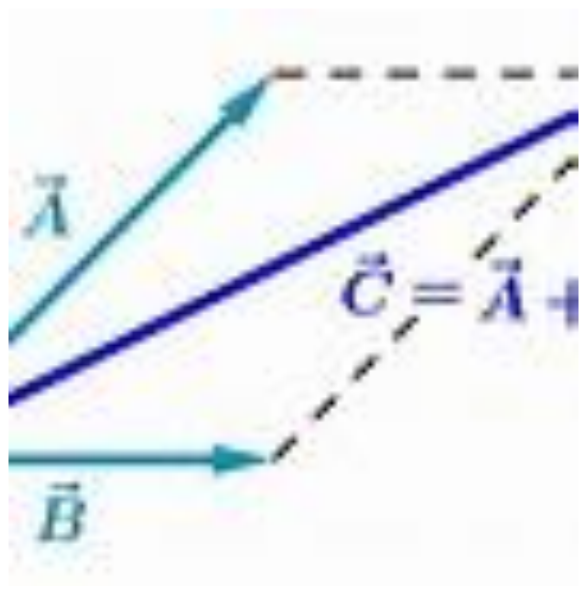
n−1 columnas a la derecha de la matriz original, y luego aplicar la regla de Sarrus o cualquier otro método de eliminación.

Método de Cofactores:

Este método se basa en descomponer el determinante de una matriz mayor utilizando determinantes de submatrices menores, multiplicados por coeficientes llamados cofactores. Estos cofactores alternan entre positivos y negativos, dependiendo de la posición de los elementos.

Propiedades de los Determinantes

Las propiedades más importantes de los determinantes son:




Determinante de una matriz identidad:

det

(

$I$

)

=

1

det(I)=1.

Determinante de una matriz triangular: El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Cambio de filas o columnas: Si se intercambian dos filas o dos columnas de una matriz, el determinante cambia de signo.

Multiplicación de una fila por un escalar: Si se multiplica una fila (o columna) de una matriz por un escalar

$k$

k, el determinante de la matriz se multiplica por

$k$

k.

Determinante de una matriz invertible: Si

$A$

A es invertible, entonces

det

(

$A$

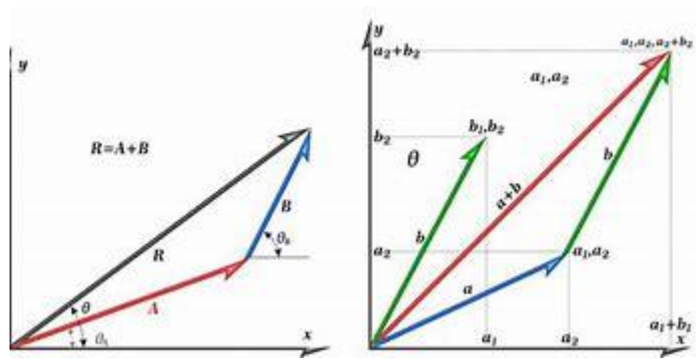
)

≠

0

det(A)

=0.




Conclusión

Los vectores y las matrices son herramientas fundamentales en álgebra lineal, que permiten modelar y resolver una gran variedad de problemas en matemáticas, física, economía, y otras disciplinas. Los determinantes, por su parte, proporcionan una poderosa forma de analizar la invertibilidad de las matrices y de resolver sistemas de ecuaciones lineales.