Súpernota

Nombre del alumno: Alma Camila Hernández Méndez
Nombre del tema: Límites y funciones
Nombre de la materia: Física
Parcial: 2
Nombre del profesor: Luis Enrique Meneses
4to bachillerato rh

Límite y continuidad de funciones

El límite y la continuidad son conceptos fundamentales en el análisis matemático, especialmente en el cálculo diferencial e integral. Estos conceptos permiten estudiar el comportamiento de las funciones y su estabilidad en puntos específicos o en intervalos.

Límite de una función

El límite de una función describe el comportamiento de dicha función cuando la variable independiente se acerca a un valor específico. Formalmente, si $f(x)$ es una función y c un número real, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L si $f(x)$ se aproxima arbitrariamente a L cuando x se aproxima a c, sin importar si x llega o no a tomar el valor c.

$$\lim_{{x \to c}} f(x) = L$$

Esto significa que cuando x se aproxima a c (por la derecha o por la izquierda), $f(x)$ se aproxima a un valor particular L. El límite es fundamental para definir la derivada y la integral de una función.

Tipos de límites:

1. Límite lateral derecho e izquierdo:
   - Límite por la derecha: $\lim_{{x \to c^+}} f(x) = L$
   - Límite por la izquierda: $\lim_{{x \to c^-}} f(x) = L$
2. Límite infinito: Cuando la variable independiente tiende a ∞ o $-\infty$.

$$\lim_{{x \to \infty}} f(x)$$

3. Límite indeterminado: Los límites como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ se llaman indeterminados y requieren técnicas especiales (como factorización o la regla de L'Hopital) para evaluarse.

Cálculo del límite de una función

Existen varias técnicas y métodos para calcular límites:

1. Sustitución directa: En muchos casos, si una función es continua en el punto $x = c$, el límite puede calcularse simplemente sustituyendo c en la función.
2. Factorización: Si la sustitución directa lleva a una indeterminación $\frac{0}{0}$, es posible que se pueda factorizar el numerador y el denominador para cancelar términos y luego reevaluar el límite.
3. Racionalización: Para límites que implican raíces cuadradas, puede usarse la técnica de multiplicar por el conjugado para eliminar la raíz.
4. Regla de L'Hopital: Esta regla es útil cuando se obtiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Consiste en derivar el numerador y el denominador y luego reevaluar el límite.

$$\lim_{{x \to c}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{{x \to c}} \frac{f^{\prime}(x)}{g^{\prime}(x)}$$

5. Límites trigonométricos: Existen límites especiales en trigonometría que se deben memorizar o conocer, como:

$$\lim_{{x \to 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidad de una función

Una función es continua en un punto c si satisface tres condiciones:

1. El límite existe: $\lim_{{x \to c}} f(x)$ existe.
2. La función está definida en c: $f(c)$ existe.
3. El límite es igual al valor de la función: $\lim_{{x \to c}} f(x) = f(c)$.

Si se cumplen estas tres condiciones, la función es continua en c. Si una función es continua en todos los puntos de su dominio, se dice que es continua en su dominio.

- **Puntos de discontinuidad:** Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple, la función es discontinua en c. Hay diferentes tipos de discontinuidad:
  1. Discontinuidad evitable: Ocurre cuando el límite existe, pero $f(c)$ no está definido o no es igual al límite.
  2. Discontinuidad infinita: Cuando el límite tiende a ∞ o $-\infty$.
  3. Discontinuidad de salto: Ocurre cuando los límites laterales son diferentes.

Relación entre límite y continuidad

La continuidad de una función está directamente relacionada con la existencia de límites. Si una función es continua en un punto, su límite en ese punto existe y es igual al valor de la función. Sin embargo, no todas las funciones que tienen límite en un punto son continuas, ya que la función podría no estar definida en ese punto.

Ejemplos de continuidad

- La función $f(x) = x^2$ es continua en todo su dominio.
- La función $g(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$, ya que no está definida en ese punto.

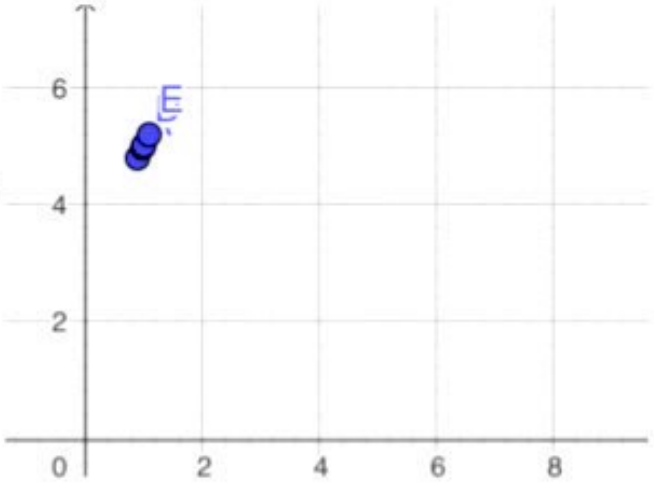
En resumen, la noción de límite permite describir el comportamiento de las funciones en torno a puntos específicos, mientras que la continuidad asegura que no hay "saltos" o interrupciones en la función en su dominio. Ambas ideas son esenciales para el desarrollo del cálculo y análisis matemático.

1. Calcula el límite de la función f(x) = 2x + 3 cuando a tiende a 1.

Tabla tabuladora:
Elegimos valores de x que se acercan a 1 desde ambos lados:

f(x) = 2x+ 3	
0.9	2(0.9) + 3=4.8+3=4.8
0.99	2(0.99) + 3 =4.98 + 3 =4.98
1	2(1) + 3=5
1.01	2(1.01) + 3 = 5.02 + 3 = 5.02
1.1	2(1.1) + 3=5.2+3 = 5.2

Cálculo directo:
Sustituimos x = 1 en la función:
$\lim_{x\to 1} f(x)=2(1) +3=2+3=5$
El límite es 5.

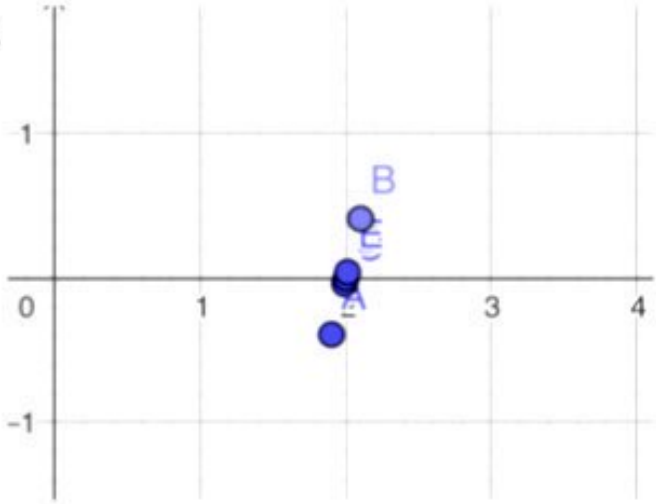


2. Determina el límite de la función g(x) = x2 - 4 cuando z tiende a 2.

Tabla tabuladora:
Elegimos valores de x que se acercan a 2 desde ambos lados:

9 (x) =x2-4	
1.9	1.92- 4= 3.61 - 4 =-0.39
1.99	1.992 - 4 = 3.9601 - 4 = -0.0399
2	22- 4 =0
2.01	2.012 - 4 = 4.0401 - 4 = 0.0401
2.1	2.12- 4=4.41 - 4 = 0.41

Cálculo directo:
Sustituimos x = 2 en la función:
lim9(2) =22-4=4-4=0
El límite es 0.

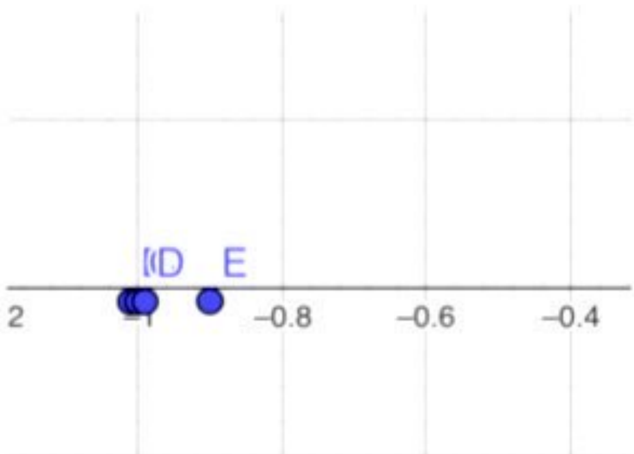


3. Calcula el límite de la función h(x) = 3a - 5 cuando a tiende a -1.

Tabla tabuladora:
Elegimos valores de x que se acercan a -1 desde ambos lados:

h (x) = 3X - 5	
-1.1	3(-1.1) - 5=-3.3-5=-8.3
-1.01	3(-1.01) - 5=-3.03-5=-8.03
-1	3(-1) - 5=-8
-0.99	3(-0.99) - 5 =-2.97-5=-7.97
-0.9	3(-0.9)-5=-07-5=-7.7

Cálculo directo:
Sustituimos x = -1 en la función:
$\lim_{x\to -1} h(x)=3(-1)-5=-3-5=$
El límite es -8.



4. Encuentra el límite de la función j(x) = 23 + 2x cuando z tiende a 1.

Tabla tabuladora:
Elegimos valores de x que se acercan a 1 desde ambos lados:

j(x) = 23 + 2x	
0.9	23 + 2(0.9) =23 + 1.8 = 24.8
0.99	23 + 2(0.99) =23 + 1.98 = 24.98
1	23 + 2(1) = 25
1.01	23 + 2(1.01) = 23 + 2.02 = 25.02
1.1	23 + 2(1.1) = 23 + 2.2 = 25.2

Cálculo directo:
Sustituimos x = 1 en la función:
lim j(x) = 23 +2(1)
=23 +2 =25
X→1
El límite es 25.

5. Determina el límite de la función k(2) = 22 + 3x + 2 cuando z tiende a -1.

Tabla tabuladora:
Elegimos valores de x que se acercan a -1 desde ambos lados:

k (x) = 2x2 + 3x + 2	
-1.1	2(-1.1)2+3(-1.1) +2=2(1.21) -3.3+2=2.42-3.3+2=1.12
-1.01	2(-1.01)? +3(-1.01) +2=2(1.0201) -3.03+2=2.0402-3.03 + 2 =1.0102
-1	2(-1)2+3(-1) +2=1
-0.99	2(-0699)7 +31-099) +25210 9801)-297 +2=0.9602-2.97+2=0.9902
-0.9	2(-09) +31-09) +2521081)-217+2=0.62-217+2=-0.08

Cálculo directo:
Sustituimos x = 1 en la función:
lim ;(x) = 23 + 2(1) = 23 + 2 = 25
El límite es 25.