universidad del sureste

UDS Mi Universidad

NOMBRE DEL ALUMNO	FRANCISCO LOPEZ ARGUETA
MATERIA:	ECUASIONES DIFERENCIALES
TEMA:	SUPER NOTA
PROFESOR:	ANDRES ALEJANDRO REYES MOLINA

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Antes de formular este teorema conviene extender no solo la notación sino la generalidad de la aplicación del mismo. En el caso de una sola ecuación diferencial

$\dot{x} = f$

$(t, x(t))$ con $f : R^2 \to R$

continua en un dominio $D \subseteq R^2$ (ver la ecuación (12)) y con $\partial f / \partial x$ también continua en D.

Para escribir el teorema de existencia y unicidad de manera m´as general, sea $x(t) = \langle x_1(t), \ldots, x_n(t) \rangle \in R^n$ $\dot{x} = \langle \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t) \rangle \in R^n$ $f(t, x(t)) = \langle f_1(t, x(t)), \ldots, f_n(t, x(t)) \rangle \in R^n$

donde

$x_k(t)$ es continua en $t \in [a, b]$ y toda $k = 1, \ldots, n$ $f : R^{n+1} \to R^n$

es continua en $D = \{(t, x(t)) | a < t < b, \|x - x_0\| < \rho, \rho > 0\}$ (14)

y las derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$, $i = 1, \ldots, n$

existen y son continuas en D,

y tambi´en Z t t0 f (s, x(s)) ds = ¿Z t t0 f1(s, x(s))ds, . . . , Z t t0 fn(s, x(s))ds À

Con esta notaci´on, supondremos que el punto (t, x(t)) ∈ D

cuando t est´a en el intervalo [t1, t2], ahora sea t0 ∈ (t1, t2) entonces la funci´on Ax = y(t) = x0 + Z t t0 f (s, x(s)) ds, t ∈ [t1, t2] (15)

define a una funci´on continua y en el intervalo [t1, t2].

Como x ∈ C[t1, t2] se tiene que el mapeo A : C[t1, t2] → C[t1, t2] Por otra parte y(t0) = x0 y la continuidad de A asegura la existencia de una vecindad alrededor de t0 donde los puntos (t, y(t)) ∈ D.

METODO DE COEFIECIENTES INDETERMINADOS PARA CALCULAR LA INTEGRAL PARTICULAR

El método de los coeficientes indeterminados es una técnica utilizada en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas. Este método es especialmente útil cuando la función no homogénea se puede expresar como una combinación lineal de funciones exponenciales, polinomios, senos o cosenos.

Para aplicar este método, primero debemos encontrar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea. Para ello, asumimos que la solución particular tiene una forma determinada en función del tipo de función no homogénea. Por ejemplo, si la función no homogénea es un polinomio de grado n, asumimos que la solución particular también es un polinomio de grado n.

Una vez que hemos asumido la forma de la solución particular, sustituimos esta función en la ecuación diferencial y resolvemos para determinar los coeficientes indeterminados. Estos coeficientes son los valores desconocidos que debemos encontrar para completar la solución particular.

Resolver la siguiente ecuación diferencial: y›› – 3y’ + 2y = e^2x

Solución:
1. Asumimos que la solución particular tiene la forma y_p = Ae^2x, donde A es un coeficiente indeterminado.
2. Sustituimos esta función en la ecuación diferencial y obtenemos: (4A – 6A + 2Ae^2x) = e^2x.
3. Igualamos los coeficientes de e^2x en ambos lados de la ecuación y

resolvemos para A: 2A = 1 -> A = 1/2.
4. Por lo tanto, la solución particular es y_p = (1/2)e^2x.

Variación de parámetros

El método de variación de parámetros es un procedimiento útil para la obtención de una solución particular yp.x/ de la ecuación diferencial ordinaria lineal (no homogénea) y se basa en el conocimiento de la solución general de la lineal homogénea asociada a dicha edo. lineal.

Haciendo referencia a las lineales de segundo orden diremos que el método de variación de parámetros es útil para obtener una solución particular y.x/ de la lineal y 00 C .x

y 0 C .x/y D .x/; (1) a partir del conocimiento de la solución general de la lineal homogénea asociada y 00 C .x/y 0 C .x/y D 0:

Si suponemos que la solución general de la lineal homogénea está dada por la combinación lineal □.x/ D C1□1.x/ C C2□2.x/

debemos tener presente que y D □1.x/ & y D □2.x/ son soluciones de esta ecuación diferencial tales que W Œ□1.x/; □2.x/□ ¤ 0 en todo el intervalo .¸; ˇ/ donde las funciones .x

.x/ son continuas.

Es decir, y D □.x/ & y D □.x/ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial.

Supongamos pues que □.x/ D C1□1.x/ C C2□2.x/ es la solución general de y 00 C p.x/y 0 C q.x/y D 0.

El método de variación de parámetros propone que la solución particular y.x/ tenga la misma forma que □.x/, pero permitiendo variar a los parámetros C1 y C2.

Esto es, propone que yp.x/ sea yp.x/ D u1□1.x/ C u2□2.x/; donde u1 D u1.x/ & u2 D u2.x/ son funciones de x, desconocidas ambas y que deben ser determinadas.

¿Cómo determinar a las funciones u1 & u2? De la siguiente manera. yp D u1□1 C u2□2)) y 0 p D u 0 1□1 C u1□ 0 1 C u 0 2□2 C u2□ 0 2

Ecuaciones de Cauchy-Euler

OTRA CLASE DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SOLUCIONABLES que es de interés son las ecuaciones del tipo Cauchy-Euler, también referidas en algunos libros como ecuación de Euler. Estos son dados por

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0 \tag{2.5.1}$$

Obsérvese que en tales ecuaciones la potencia de x en cada uno de los coeficientes coincide con el orden de la derivada en ese término. Estas ecuaciones se resuelven de manera similar a las ecuaciones de coeficiente constante.

Uno comienza por hacer la conjetura $y(x)=x^r$. Insertando esta función y sus derivadas,

$$y'(x)=rx^{r-1}, y''(x)=r(r-1)x^{r-2}$$

en Ecuación 2.5.1, tenemos

$$[ar(r-1)+br+c]x^r=0$$

Como esto tiene que ser cierto para todos x en el dominio del problema, obtenemos la ecuación característica

$$ar(r-1)+br+c=0$$

Las soluciones de las ecuaciones de Cauchy-Euler se pueden encontrar usando la ecuación característica $ar(r-1)+br+c=0$

Al igual que la ecuación diferencial de coeficiente constante, tenemos una ecuación cuadrática y la naturaleza de las raíces vuelve a conducir a tres clases de soluciones. Si hay dos raíces reales y distintas, entonces la solución general toma la forma $y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$

Para dos raíces reales y distintas, la solución general toma la forma $y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$.

Solución general a una ecuación lineal no homogénea

Considerar la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x).$$ $$a2(x)y''+a1(x)y'+a0(x)y=r(x).$$

La ecuación homogénea asociada

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$ $$a2(x)y''+a1(x)y'+a0(x)y=0$$

se llama la *ecuación complementaria*. Veremos que resolver la ecuación complementaria es un paso importante para resolver una ecuación diferencial no homogénea.