Nombre del alumno: Victor Hugo López Moreno

Nombre del profesor: Andrés Alejandro Reyes Molina

Nombre del trabajo: Supernota

Materia: Ecuaciones Diferenciales

Grado: 3°

Teorema de existencia y unicidad.

El teorema global de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es el siguiente.

Teorema: Supongamos que se cumplen las siguientes tres hipótesis:

- $U = [a, b] \times \mathbb{R}$, donde $[a, b]$ es un intervalo compacto en $\mathbb{R}$.
- $f : U \to \mathbb{R}$ es continua en U, y
- f es lipschitziana en U respecto de la segunda variable.

En esta situación, para cada $(x_0, y_0) \in U$, el problema de valores iniciales (PVI)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

posee una única solución definida en el intervalo $[a, b]$.

Además, las iterantes de Picard $y_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ asociadas al PVI (1), dadas por

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad y_0 = y_0(x) \tag{2}$$

convergen uniformemente en el intervalo $[a, b]$ hacia la solución del PVI.

Una observación importante es que el punto (x_0, y_0) puede estar en la frontera de la banda vertical $U = [a, b] \times \mathbb{R}$, es decir, puede ser de la forma (a, y_0) o (b, y_0).

Podemos notar que en el enunciado se hace mención de términos que aún no conocemos, como lo son *función lipschitziana* e *Iterantes de Picard*, así que necesitamos definirlos.

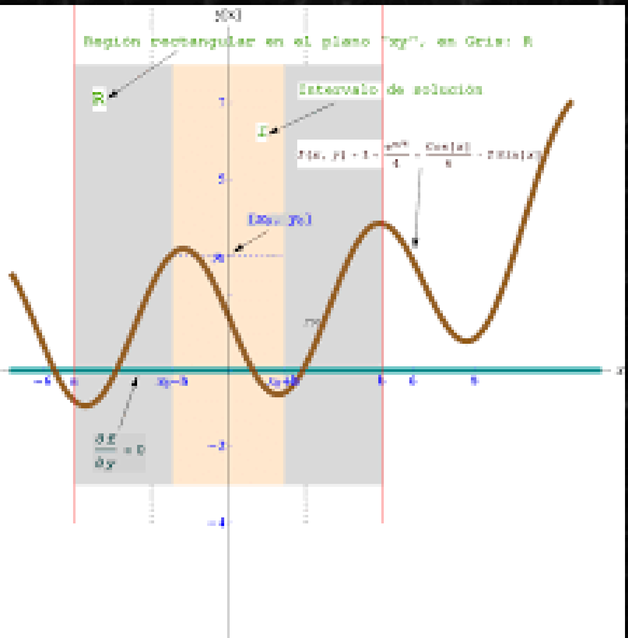
Este teorema corresponde al resultado global en el que el intervalo es una banda vertical $U = [a, b] \times \mathbb{R}$, en el caso local se considera una región limitada definida como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_1| \leq a, |y - y_1| \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

y la solución esta definida en el intervalo $\delta = [x_0 - h, x_0 + h]$ para cierta $h \in \mathbb{R}$. Una vez demostrado el resultado global retomaremos el caso local.

En esta teoría preliminar veremos que el PVI (1) puede ser equivalente a resolver una ecuación integral, estudiaremos las funciones lipschitzianas de una y dos variables, demostraremos algunas proposiciones al respecto, demostraremos el lema de Gronwall, repasaremos algunos conceptos importantes sobre sucesiones, series y convergencia, definiremos las iteraciones de Picard y veremos algunos ejemplos. Una vez desarrollada esta teoría pasaremos a la demostración del teorema de existencia y unicidad.

Para comenzar, veamos que el PVI (1) se puede escribir de forma equivalente como una ecuación integral cuando la función f es continua.



Métodos de coeficientes indeterminados para calcular la integral particular.

Ecuaciones Lineales con Coeficientes Constantes NO Homogéneas

Método de los Coeficientes Indeterminados

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = b(x)$$

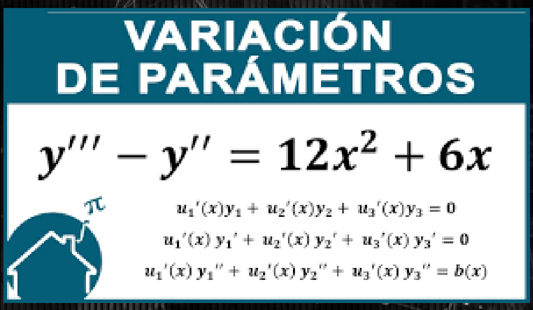
Sólo de aplica el método para:

$b(x)$	y_p no se repite en y_h	y_p se repite en y_h
$p_k(x)$	$\overline{p_k}(x)$	Multiplicar por x^h
$e^{\alpha x} p_k(x)$	$e^{\alpha x}\,\overline{p_k}(x)$	
$e^{\alpha x}[p_k(x)\cos(\beta x) + q_l(x)\sin(\beta x)]$	$e^{\alpha x}[\overline{p_d}(x)\cos(\beta x) + \overline{p_d}(x)\sin(\beta x)]$	
	d máx. grado de k y l	h multiplicidad

El método de los coeficientes indeterminados consiste en hacer conjeturas sobre la forma de la solución particular basándose en la forma de r (x). r (x). Cuando tomamos derivadas de polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos, obtenemos polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos.

Método de variación de parámetros.

El método de variación de parámetros es un procedimiento útil para la obtención de una solución particular yp.x/ de la ecuación diferencial ordinaria lineal (no homogénea) y se basa en el conocimiento de la solución general de la lineal homogénea asociada a dicha edo. lineal. Haciendo referencia a las lineales de segundo orden diremos que el método de variación de parámetros es útil para obtener una solución particular yp.x/ de la lineal y 00 C p.x/y 0 C q.x/y D g.x/; (1) a partir del conocimiento de la solución general de la lineal homogénea asociada y 00 C p.x/y 0 C q.x/y D 0: (2) Si suponemos que la solución general de la lineal homogénea (2) está dada por la combinación lineal □.x/ D C1□1.x/ C C2□2.x/; debemos tener presente que y D □1.x/ & y D □2.x/ son soluciones de esta ecuación diferencial (2) tales que W Œ□1.x/; □2.x/□ ¤ 0 en todo el intervalo .¿; ˇ/ donde las funciones p.x/ & q.x/ son continuas. Es decir, y D □1.x/ & y D □2.x/ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial (2). Supongamos pues que □.x/ D C1□1.x/ C C2□2.x/ es la solución general de y 00 C p.x/y 0 C q.x/y D 0. El método de variación de parámetros propone que la solución particular yp.x/ tenga la misma forma que □.x/, pero permitiendo variar a los parámetros C1 y C2. Esto es, propone que yp.x/ sea yp.x/ D u1□1.x/ C u2□2.x/; donde u1 D u1.x/ & u2 D u2.x/ son funciones de x, desconocidas ambas y que deben ser determinadas. ¿Cómo determinar a las funciones u1 & u2? De la siguiente manera. yp D u1□1 C u2□2)) y 0 p D u 0 1□1 C u1□ 0 1 C u 0 2□2 C u2□ 0 2



Fuentes

https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-teorema-de-existencia-y-unicidad-ecuacion-integral-funciones-lipschitzianas-y-lema-de-gronwall/

https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/7-2-ecuaciones-lineales-no-homogeneas#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20los%20coeficientes%20indeterminados%20consiste%20en%20hacer%20conjeturas,funciones%20exponenciales%2C%20senos%20y%20cosenos.

http://canek.uam.mx/Ecuaciones/Teoria/4.LinealesOrdenSuperior/ImpVariacion.pdf

Ecuación lineal de Cauchy-Euler

En matemáticas, la ecuación ecuación de Cauchy-Euler, o ecuación de Euler-Cauchy, o simplemente ecuación de Euler, es una ecuación diferencial ordinaria homogénea con coeficientes variables de la forma:

$xny(n)(x)+a1xn-1y(n-1)(x)+\ldots+an-1xy'(x)+any(x)=0$

La sustitución $x=eu$ muestra que la búsqueda de soluciones para este tipo de ecuación diferencial se puede reducir a resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. De esta observación se sigue que las soluciones de las ecuaciones homogéneas de Euler pueden escribirse como combinaciones lineales de funciones de la forma:

$x\lambda \log m x$

donde λ es un número complejo y m es un número entero no negativo.

En su forma más general (no homogénea):

$\Sigma i=0naixiy(i)(x)=f(x)an\neq 0$

fue estudiada por Euler a partir de 1740.

Ecuación de segundo orden[editar]

La ecuación de Euler más común es la de segundo grado:

$x2y''+a1xy'+a2y=0$

donde a $a1$ e $a2$ son números reales. Se utiliza en varios contextos, por ejemplo, en el estudio de la ecuación de Laplace.

Suponiendo que la ecuación admite una solución trivial del tipo:

$y=xm$

diferenciando tenemos:

$dydx=mxm-1d2ydx2=m(m-1)xm-2$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$x2(m(m-1)xm-2)+a1x(mxm-1)+a2(xm)=0$

y reordenando los términos:

$m2+(a1-1)m+a2=0$

Ahora se puede resolver en función de m, obteniendo tres casos de particular interés:

- Caso 1: hay dos raíces distintas $m1$ y $m2$.
- Caso 2: tenemos una raíz real múltiple m.
- Caso 3: tenemos dos raíces complejas $m1,2=\alpha\pm i\beta$

En el primer caso la solución es:

$y=c1xm1+c2xm2$

En el segundo es:

$y=c1xm\ln(x)+c2xm$

Para obtener esta solución debemos aplicar el método de reducción de orden después de encontrar una solución $y=xm$.

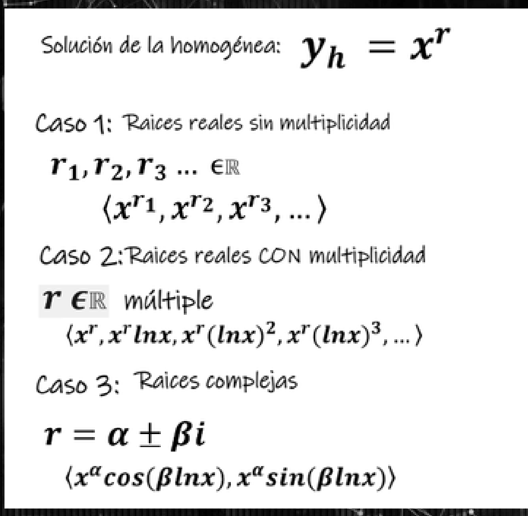
En el tercer caso la solución es:

$y=c1x\alpha\cos(\beta\ln(x))+c2x\alpha\sin(\beta\ln(x))$

con:

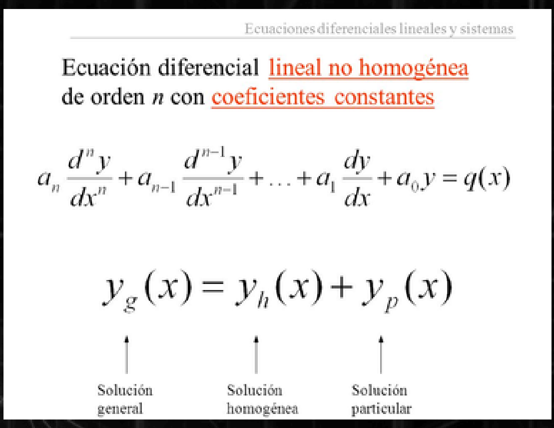
$\alpha=\mathrm{Re}(m)\beta=\mathrm{Im}(m)$

Para $c1$ y $c2$ en el plano real. Esta forma se obtiene estableciendo $x=et$ y usando la fórmula de Euler.



Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

En el presente estudio, se utiliza el método de integrales sucesivas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes. El método consiste en encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea a partir de una serie de integrales.



Fuentes

https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-teorema-de-existencia-y-unicidad-ecuacion-integral-funciones-lipschitzianas-y-lema-de-gronwall/

https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/7-2-ecuaciones-lineales-no-homogeneas#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20los%20coeficientes%20indeterminados%20consiste%20en%20hacer%20conjeturas,funciones%20exponenciales%2C%20senos%20y%20cosenos.

http://canek.uam.mx/Ecuaciones/Teoria/4.LinealesOrdenSuperior/ImpVariacion.pdf

https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial_homog%C3%A9nea#:~:text=Una%20ecuaci%C3%B3n%20diferencial%20puede%20ser,no%20existen%20los%20t%C3%A9rminos%20constantes.