Nombre del alumno: Victor Hugo López Moreno

Nombre del profesor: Andrés Alejandro Reyes Molina

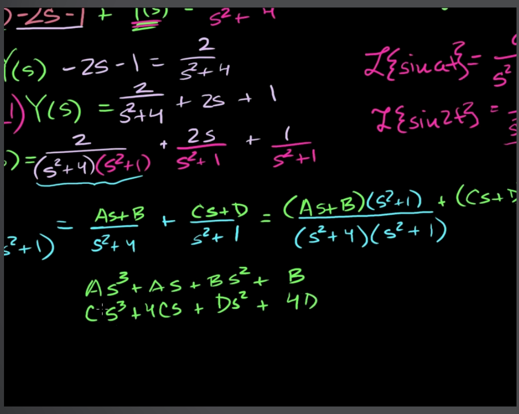
Nombre del trabajo: Súper nota

Materia: Ecuaciones Diferenciales

Grado: 3

Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas por el método de la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace se aplica a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando son lineales, de coeficientes constantes, van acompañadas de condiciones iniciales y el dominio de la función incógnita es el eje positivo. El método puede esquematizarse en los siguientes pasos: 1. aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación y utilizar la propiedad P1 sobre linealidad, 2. utilizar la propiedad P5 sobre transformada de la derivada, lo que genera una ecuación algebraica con la función transformada como incógnita, 3. despejar esa función transformada, 4. buscar su inversa. Este método se aplica igualmente a sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes con datos iniciales; en este caso la aplicación de la transformada genera un sistema algebraico lineal de la misma dimensión que el sistema diferencial inicial. También es aplicable en algunos casos especiales de coeficientes variables, pero entonces la ecuación transformada no es algebraica, sino nuevamente diferencial.



Solución de ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas por el método de la transformada de Laplace.

Para detallar un poco más el proceso anterior consideramos ahora el problema

$$ay'' + by' + cy = g(t)\ ,\ y(0) = y_0\ ,\ y'(0) = y_1$$

y efectuamos los pasos anteriores:

1. aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación y utilizar la propiedad P1 sobre linealidad; llamamos $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$:

$$a\mathcal{L}[y''(t)] + b\mathcal{L}[y'(t)] + cY(s) = G(s)$$

2. utilizar la propiedad P5 sobre transformada de la derivada, lo que genera una ecuación algebraica con la función transformada como incógnita:

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay_1 = G(s)$$

3. despejar esa función transformada:

$$Y(s) = [(as + b)y_0 + ay_1 + G(s)]H(s)\ ,\ \text{siendo } H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

4. buscar su inversa.

La función $H(s)$ se conoce como función de transferencia y sólo depende de los coeficientes de la ecuación y no del término $g(t)$. La función $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ se denomina respuesta al impulso, ya que es la solución del problema

$$ay'' + by' + cy = \delta(t)\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$$

$y' + 6y = x'$

$3x - x' = 2y'$

Con las condiciones $x(0) = 2;\ y(0) = 3$. Nótese que se necesitan dos condiciones.

Tomando en cuenta que $\mathcal{L}\{x\} = X$ y $\mathcal{L}\{y\} = Y$, aplicamos la TL y obtenemos:

$sY - y(0) + 6Y = sX - x(0)$

$3X - sX - x(0) = 2(sY - y(0))$

Operando se llega a

$sX - (s+6)Y = 1$

$(3-s)X - 2sY = -8$

Se resuelve para X e Y y se obtiene:

$$X = \frac{2s+16}{(s-2)(s+3)} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s+3}$$

$$Y = \frac{3s-1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+3}$$

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{2}{s+3}\right\} = 4e^{2t} - 2e^{-3t}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right\} = e^{2t} + 2e^{-3t}$$

Solución de ecuaciones diferenciales de 2°. Orden.

Como hemos visto, la transformada de Laplace se aplica a la resolución de problemas de valor inicial cuya e.d.o. es lineal con coeficientes constantes, pues transforma una ecuación de este tipo en una algebraica lineal de la cual se despeja la transformada de la variable dependiente de la e.d.o. inicial. Cuando se trata de resolver un problema de contorno cuya e.d.p. es lineal de coeficientes constantes de dos variables, la aplicación de la transformada transforma la e.d.p. en una e.d.o. cuya variable dependiente es la transformada de la incógnita de la e.d.p. inicial. Una de las ventajas de este método es que es aplicable a ecuaciones no homogéneas. Las características que permiten o aconsejan su uso son la e.d.p. sea lineal (condición necesaria); la ecuación tenga coeficientes constantes; una al menos de las variables independientes tenga dominio infinito; el problema presente una condición inicial en esa variable; las operaciones de derivar respecto a una variable independiente y tomar transformada de Laplace respecto de la otra sean intercambiables, lo cual es cierto en determinadas condiciones de regularidad. El procedimiento general de aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de problemas de contorno puede esquematizarse en los siguientes pasos: 1. transformar la e.d.p. dada mediante Laplace, respecto a una variable independiente de dominio semi-infinito (sea por ejemplo t∈[0,∞)); 2. resolución de la e.d.o. resultante; la variable independiente de esta e.d.o. es la otra variable (sea por ejemplo la x) de la e.d.p.\ inicial y la incógnita es la función transformada; en los coeficientes de su solución intervendrá la variable s como parámetro; 3. aplicar transformadas de Laplace a las condiciones de frontera en la variable x; 4. utilizar esas nuevas condiciones para determinar los coeficientes de la solución general de la e.d.o. anterior; 5. invertir la transformada de Laplace.

Ecuaciones diferenciales

$$5\frac{d^2y}{dx^2} + 4x = 0$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ejemplo Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del sistema x ′ = y/t, y ′ = t/x. Las funciones f1(t, x, y) = y/t, f1,y(t, x, y) = 1/t son continuas salvo en el cero del denominador, t = 0. La función f2(t, x, y) = t/x, f2,x(t, x, y) = −t/x2 son continuas salvo en el cero del denominador, x = 0. Las funciones f1,x(t, x, y) = 0 = f2,y(t, x, y) son constantes y continuas. Recapitulando, el sistema tiene solución única para cualquier conjunto de valores iniciales (t0, x0, y0) con t0 6= 0 6= x0. Por su parte, el problema de valores iniciales para las ecuaciones diferenciales de orden n, x n) = f t, x, x′ , . . . , xn−1) , x(t0) = x0, x′ (t0) = x ′ 0 , . . . xn−1)(t0) = x n−1) 0 , (2.3) se puede reducir al problema para un sistema de n ecuaciones diferenciales de orden uno, sin más que realizar el cambio de variables x1 = x, x2 = x ′ , . . . xn = x n−1) , que proporciona el sistema x ′ 1 = x2 · · · x ′ n−1 = xn x ′ n = f(t, x1, . . . , xn), x1(t0) = x0, x2(t0) = x ′ 0 , . . . xn(t0) = x n−1)(t0), (2.4) con lo cual el vector de funciones del sistema es simplemente F = (x2, . . . , xn, f) t y el vector de condiciones iniciales, x0, x′ 0 , . . . , x n−1) 0.

Introducción a las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_2\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

Ejemplos :

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad \frac{d^6y}{dx^6} + 2\frac{d^5y}{dx^5} - 2\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

Fuentes de investigación

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fm.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBmHiJr2njag&psig=AOvVaw2hjfegH3C2WNsymX2HBc52&ust=1716246990085000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBQQjhxqFwoTCNj5k7PsmoYDFQAAAAAdAAAAABAE

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fes.slideshare.net%2FJimenaRodriguezH%2Fclase-07-ecuaciones-diferenciales-de-segundo-orden&psig=AOvVaw2hjfegH3C2WNsymX2HBc52&ust=1716246990085000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBQQjhxqFwoTCNj5k7PsmoYDFQAAAAAdAAAAABAJ

También se tomó información de la antologia.