Resúmenes

Andrea Alejandra Albores López

Parcial 1

Biomatematicas

Dra. Brenda Paulina Ortiz Solís

Licenciatura en medicina humana

Segundo semestre grupo "C"

Comitán de Domínguez Chiapas a 16 de marzo de 2024

Limites

El matemático francés Augustine Louis Cauchy (1789-1857) fue el primero en desarrollar una definición rigurosa de límite (aunque ya era usado este concepto desde los antiguos griegos para el cálculo de áreas) de la siguiente manera:

"Cuando los valores atribuidos sucesivamente a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para llegar por último a diferir de ese valor en una cantidad tan pequeña como se desee, entonces dicho valor fijo recibe el nombre de límite de todos los demás valores."

En palabras más llanas decimos que: el límite de una función $f(x)$ en el punto x_0, es obtener el valor al que se va aproximando dicha función cuando x tiende a x_0, pero sin llegar a ese punto.

La sintaxis matemática del límite es:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

donde L es el valor del límite.

Propiedades de los límites

Algunas propiedades matemáticas de los límites pueden facilitar en algunos casos los cálculos en funciones más complejas. Considerando dos funciones definidas en un mismo intervalo.

- **Unicidad del límite:** El límite de una función será único en caso de su existencia.
- **Límite de una constante:** El límite de una función constante $f(x) = \mathrm{k}$ será igual a la constante k.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

- **Suma y resta de límites:** El límite de la suma será la suma de los límites.

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Producto de límites:** El límite del producto de una constante por una función será la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Cálculo de límites en un punto específico

El cálculo de límites en un punto específico es uno de los métodos más comunes para calcular los límites de una función. Para calcular el límite en un punto específico de una función, se debe evaluar la función en valores cada vez más cercanos a ese punto. De esta manera, se puede obtener una aproximación cada vez más precisa del valor del límite. Es importante tener en cuenta que, en algunos casos, este método no proporciona una solución definitiva.

Cálculo de límites en intervalos

El cálculo de límites en intervalos es una técnica que se aplica para encontrar el límite de una función en un intervalo específico. Para aplicar esta técnica, se deben evaluar los extremos del intervalo y comparar los valores de la función en esos puntos. Si los valores son iguales, se puede afirmar que el límite existe para ese intervalo. En caso contrario, es necesario evaluar la función en puntos adicionales para determinar la existencia del límite.

Cálculo de límites laterales

El cálculo de límites laterales tiene como objetivo determinar el valor de un límite de función cuando se aproxima el límite desde la izquierda y la derecha. Si el resultado es diferente para cada lado, el límite no existe. Si ambos lados se aproximan al mismo valor, se puede afirmar que el límite existe. Es importante tener en cuenta que, en caso de que el valor de la función sea cero en el punto de interés, es necesario evaluar los valores laterales para determinar la existencia del límite.

Cálculo de límites con formas indeterminadas

El cálculo de límites con formas indeterminadas es una técnica que se aplica en casos donde la función tiene una forma que no permite su evaluación directa. Este tipo de formas incluyen aquellos casos en los que el numerador y/o el denominador se anulan, o cuando la función toma una forma que no permite su evaluación directa. Para resolver este tipo de límites, es necesario aplicar técnicas como la regla de L'Hôpital o el uso de series de Taylor.

Cálculo de límites con infinitos

Los límites que tienden al infinito se pueden presentar en diferentes tipos de funciones, como las polinómicas, exponenciales o logarítmicas. Para calcular estos límites, es necesario tener una buena comprensión de la idea de límite infinito y de las propiedades que se derivan de ella. Una forma común de calcular límites con infinitos es dividir tanto el numerador como el denominador por la variable que tiende a infinito y observar qué sucede cuando la variable se aproxima a infinito. Es importante tener una buena comprensión de la notación matemática para interpretar correctamente estos límites.

Continuidad y Discontinuidad de Funciones

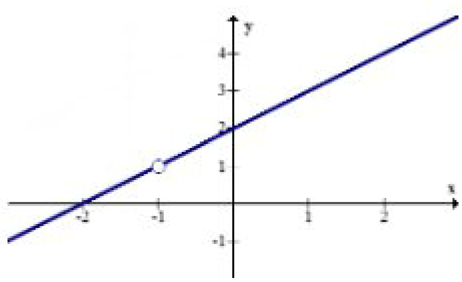
Las funciones que se pueden dibujar sin levantar el lápiz se denominan **funciones continuas**. Definirás continuo de una manera matemáticamente más rigurosa después de estudiar los límites.

Existen tres tipos de discontinuidades: Removible, Salto e Infinito.

Discontinuidades removibles

Las **discontinuidades removibles** ocurren cuando una función racional tiene un factor con un x que existe tanto en el numerador como en el denominador. Las discontinuidades removibles se muestran en una gráfica mediante un círculo hueco que también se conoce como agujero.

$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$ Aviso que se ve igual a $y = x + 2$ excepción del agujero en $x=-1$. Al graficar la función, debe cancelar el factor removible, graficar como de costumbre y luego insertar un agujero en el punto apropiado al final. Hay un agujero en $x=-1$ porque cuando $x=-1$, $f(x) = \frac{0}{0}$

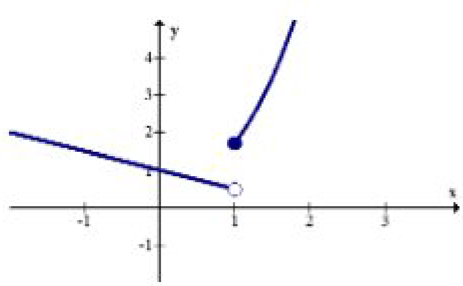


Las discontinuidades removibles se pueden "rellenar" si se hace de la función una función por partes y se define una parte de la función en el punto donde se encuentra el agujero. En el ejemplo anterior, para hacer $f(x)$ continuo podrías redefinirlo como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}, & x \neq -1 \\ 1, & x = -1 \end{cases}$$

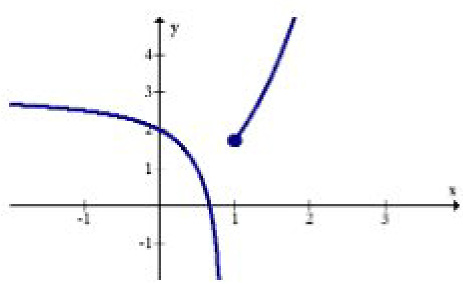
Discontinuidades de salto

Las **discontinuidades de salto** ocurren cuando una función tiene dos extremos que no se encuentran aunque el agujero esté lleno. Para satisfacer la prueba de línea vertical y asegurarse de que la gráfica sea realmente la de una función, solo se puede llenar uno de los puntos finales. A continuación se muestra un ejemplo de una función con una discontinuidad de salto.



Discontinuidades infinitas

Las **discontinuidades finitas** ocurren cuando una función tiene una asíntota vertical en uno o ambos lados. Esto se muestra en la gráfica de la función a continuación $x=1$



Derivada de una función

La derivada de una función representa la tasa de cambio instantánea de una función en un punto específico. En otras palabras, la derivada mide cómo cambia el valor de una función en respuesta a un cambio infinitesimal en su variable independiente. Dada una función $y = f(x)$, la derivada de $f(x)$ con respecto a x se denota comúnmente como $f'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$. La derivada se define como el límite cuando el cambio en x tiende a cero de la razón de cambio promedio, y se expresa matemáticamente como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si este límite existe, la función es diferenciable en ese punto, y la derivada proporciona la tasa de cambio instantánea en ese punto.

La derivada tiene varias interpretaciones, incluyendo la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado y la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, si la función representa la posición del objeto en función del tiempo.

Propiedades de la derivada de una función

Las propiedades de la derivada, esenciales en cálculo, son reglas matemáticas que simplifican el cálculo de la derivada de una función. Las más destacadas incluyen la linealidad, que establece que la derivada de una suma o resta de funciones es la suma o resta de las derivadas individuales; la regla del producto y del cociente, que ofrecen fórmulas para derivar productos y cocientes de funciones respectivamente; y la regla de la cadena, crucial para derivar funciones compuestas.

Derivada de una función constante

Propiedad 1. Derivada de una función constante. Si f es una función constante, es decir, $f(x) = k$, entonces:

$$f'(x) = 0$$

En otra notación:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} k \\ &= 0\end{aligned}$$

Esta propiedad establece que la derivada de una función constante es igual a cero.

Derivada del producto de una constante por una función

Propiedad 2. Regla del múltiplo constante. Si c es una constante de valor real y f es una función derivable en x, entonces:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

En otra notación:

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \left[\frac{d}{dx} f(x)\right]$$

Esta propiedad establece que la derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.

Derivada de una potencia

Propiedad 3. Derivada de la función potencia. Si f es una función definida por $f(x) = x^n$ donde n es cualquier número real distinto de cero, entonces:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

En otra notación:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Esta propiedad establece que la derivada de x elevada a cualquier exponente de número real, es igual al exponente multiplicado por x elevado al exponente menos uno.

Derivada de una suma de funciones

Propiedad 4. Derivada de una suma de funciones. Si f y g son funciones derivables en x, entonces:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

En otra notación:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Esta propiedad establece que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones por separado.

Derivada de una resta de funciones

Propiedad 5. Derivada de una resta de funciones. Si f y g son funciones derivables en x, entonces:

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

En otra notación:

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

Esta propiedad establece que la derivada de una resta de funciones es igual a la resta de las derivadas de cada una de las funciones involucradas por separado.

Derivada de un producto de funciones

Propiedad 6. Derivada de un producto de funciones. Si f y g son funciones derivables en x, entonces:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

En otra notación:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x)+f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

Esta propiedad establece que la derivada del producto de dos funciones es igual a la suma del producto de la derivada de la primera función por la segunda, más el producto de la primera función por la derivada de la segunda función. En otras palabras, la derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar, más la primera función por la derivada de la segunda función.

Derivada de un cociente de funciones

Propiedad 6. Derivada de un cociente de funciones. Si f y g son funciones derivables en x, entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

En otra notación:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - \left[\frac{d}{dx}g(x)\right]f(x)}{[g(x)]^2}$$

Esta propiedad establece que la derivada de una división de dos funciones es igual a (la derivada de la función del numerador multiplicada por la función del denominador) menos (la función del numerador multiplicada por la derivada de la función del denominador), todo esto dividido entre el cuadrado de la función del denominador.

Bibliografias:

http://gmc.geofisica.unam.mx/papime2020/index.php/articulos/8-limites

https://www.ieszaframagon.com/matematicas/matematicas2/limite_continua_b/2_clculo_de_lmites.html

https://sergioruiz.com.mx/matematicas/calculo/calculo-de-limites-de-una-funcion/

https://espanol.libretexts.org/Educacion_Basica/Precalculo/01%3A_Funciones_y_Gr%C3%A1ficas/1.10%3A_1.10_Continuidad_y_Discontinuidad

https://www.momentomatematico.net/2023/03/Propiedades-de-la-derivada.html