RESUMEN

María Fernanda Pérez Guillén

Segundo parcial

Biomatemáticas

Dra. Brenda Paulina Ortiz Solís

Medicina humana

Segundo semestre, grupo "C"

Comitán de Domínguez, Chiapas, a 2 de mayo del 2024

Las derivadas son una parte fundamental del cálculo y tienen una amplia gama de aplicaciones en matemáticas, ciencias y ingeniería. En resumen, una derivada es una medida de cómo cambia una función en relación con su variable independiente. Más precisamente, la derivada de una función en un punto dado representa la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto.

En términos más formales, si tienes una función $f(x)$, la derivada $f'(x)$ (también denotada como $\frac{df}{dx}$ o $\frac{d}{dx}f(x)$) describe cómo cambia $f(x)$ cuando x cambia infinitesimalmente. En otras palabras, la derivada nos da la tasa de cambio instantánea de la función en cualquier punto dado.

Las derivadas se utilizan para varios propósitos importantes, incluyendo:

1. Encontrar pendientes y tasas de cambio: En geometría analítica y física, las derivadas se utilizan para calcular pendientes de curvas y tasas de cambio en problemas de movimiento.

2. Optimización: Las derivadas se utilizan para encontrar máximos y mínimos de funciones. Esto es crucial en economía, ingeniería y ciencias naturales cuando se busca optimizar alguna variable bajo ciertas restricciones.

3. Análisis de gráficas: Las derivadas nos dan información sobre la concavidad y la dirección de una curva. Esto es útil para comprender la forma y el comportamiento de las funciones.

4. Modelado matemático: En física, ingeniería y otras ciencias, las derivadas se utilizan para modelar y resolver ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos, como el movimiento de los cuerpos, la difusión de calor, la dinámica de fluidos, entre otros.

Las derivadas implícitas son un concepto importante en cálculo que se utiliza cuando una función no está expresada explícitamente en términos de una variable, sino que está implícitamente definida por una ecuación que relaciona dos o más variables.

Cuando una función está definida implícitamente, es posible que no podamos despejar una variable en términos de la otra(s) de manera directa para obtener una expresión explícita. Sin embargo, aún podemos encontrar la derivada de esta función respecto a una de las variables utilizando el método de derivación implícita.

El proceso para encontrar la derivada implícita implica tomar la derivada de ambos lados de la ecuación con respecto a la variable respecto a la cual deseamos diferenciar. Luego, resolvemos la derivada resultante para obtener la derivada de la función en términos de las variables dadas.

Aquí hay un ejemplo básico para ilustrar el concepto:

Supongamos que tenemos la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, que define implícitamente la relación entre las variables x e y. Para encontrar $\frac{dy}{dx}$, la derivada de y con respecto a x, podemos seguir estos pasos:

1. Diferenciamos ambos lados de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

2. Aplicamos la regla de la cadena y derivamos cada término:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

3. Resolvemos para $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Este es el resultado de la derivada implícita. Nos da la tasa de cambio instantánea de y con respecto a x, incluso cuando y no está expresada explícitamente en términos de x.

Las derivadas implícitas son útiles en situaciones donde las ecuaciones están definidas de manera implícita, como en la intersección de curvas o en problemas de geometría más avanzados. Son una herramienta poderosa en el análisis y modelado matemático.

La diferenciación logarítmica es un método utilizado para encontrar la derivada de funciones que están en forma de productos o cocientes y que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Es especialmente útil cuando una función es complicada y difícil de diferenciar utilizando las reglas estándar de derivación.

El método de diferenciación logarítmica se basa en la regla de la cadena y la propiedad de los logaritmos que nos permite transformar productos en sumas y cocientes en restas.

Pasos generales para aplicar la diferenciación logarítmica:

1. Toma el logaritmo natural de ambas partes de la función original: Si tienes una función $y = f(x)$, toma el logaritmo natural (ln) de ambos lados de la ecuación para obtener $\ln(y) = \ln(f(x))$.

2. Utiliza las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión: Los productos se convierten en sumas y los cocientes en restas. Esto simplifica la expresión y facilita la diferenciación.

3. Diferencia ambos lados de la ecuación con respecto a la variable independiente x utilizando la regla de la cadena.

4. Resuelve la ecuación resultante para la derivada que estás buscando.

Ejemplo para ilustrar este proceso. Supongamos que queremos encontrar la derivada de la función $y = x^2 \cdot e^x$.

Los pasos serían los siguientes:

1. Tomamos el logaritmo natural de ambas partes:

$$ \ln(y) = \ln(x^2 \cdot e^x) $$

2. Utilizamos las propiedades de los logaritmos para simplificar:

$$ \ln(y) = \ln(x^2) + \ln(e^x) = 2\ln(x) + x $$

3. Diferenciamos ambos lados de la ecuación con respecto a x:

$$ \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + 1 $$

4. Resolvemos para $\frac{dy}{dx}$:

$$ \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{2}{x} + 1 \right) = x^2 \cdot e^x \left(\frac{2}{x} + 1 \right) $$

Entonces, la derivada de $y = x^2 \cdot e^x$ utilizando diferenciación logarítmica es $x^2 \cdot e^x \left(\frac{2}{x} + 1 \right)$.

Este método es especialmente útil cuando te encuentras con funciones complicadas que involucran productos, cocientes o funciones exponenciales o logarítmicas. Te permite diferenciarlas de manera más sencilla y ordenada.

Las derivadas de orden superior son las derivadas sucesivas de una función. Es decir, después de encontrar la primera derivada de una función, puedes continuar derivando la función para obtener derivadas de orden superior. La derivada de primer orden es simplemente la tasa de cambio instantánea de la función, mientras que las derivadas de orden superior describen cómo cambia la tasa de cambio de la función.

Para denotar las derivadas de orden superior, se utilizan notaciones como $f'(x)$ para la primera derivada, $f''(x)$ para la segunda derivada, y así sucesivamente. También puedes encontrarlas expresadas como $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, donde n indica el orden de la derivada.

El proceso de encontrar derivadas de orden superior implica simplemente derivar la función original tantas veces como sea necesario. Cada vez que derivas, aplicas las reglas de derivación correspondientes según el tipo de función que estés tratando.

Por ejemplo, considera la función $f(x) = x^3$. Aquí están las primeras tres derivadas:

1. **Primera derivada**:

$$ f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 $$

2. **Segunda derivada**:

$$ f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^3) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x $$

3. **Tercera derivada**:

$$ f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}(x^3) = \frac{d}{dx}(6x) = 6 $$

En este caso, la tercera derivada de $f(x) = x^3$ es constante, lo que significa que la tasa de cambio de la tasa de cambio de la función es constante en todos los puntos.

Las derivadas de orden superior tienen varias aplicaciones, como en la física para describir la aceleración en función del tiempo en movimiento, en la economía para modelar cambios en la tasa de crecimiento y en la ingeniería para entender la dinámica de sistemas complejos. En resumen, las derivadas de orden superior proporcionan información más detallada sobre la forma y el comportamiento de las funciones.

La razón de cambio es una medida que describe cómo una cantidad cambia en relación con otra cantidad. Matemáticamente, se define como el cociente de la diferencia entre dos valores de una variable (generalmente una cantidad dependiente) y la diferencia correspondiente entre los valores de otra variable (generalmente una cantidad independiente). En otras palabras, es la tasa a la cual una cantidad cambia con respecto a otra cantidad.

La razón de cambio se expresa de diversas maneras dependiendo del contexto en el que se aplique.

Algunas de las formas comunes de expresarla incluyen:

1. Razón de cambio promedio: Se calcula tomando la diferencia entre dos valores de la cantidad dependiente y dividiendo por la diferencia correspondiente en los valores de la cantidad independiente. Matemáticamente, si y es una función de x, la razón de cambio promedio entre x_1 y x_2 se calcula como:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Razón de cambio instantánea: Se refiere a la tasa de cambio en un punto específico en el tiempo o en una posición específica en una curva. En el contexto del cálculo, la razón de cambio instantánea se representa mediante la derivada de la función y respecto a la variable independiente x, es decir, $\frac{dy}{dx}$. Esta derivada representa la tasa de cambio de y con respecto a x en un punto dado.

La razón de cambio es fundamental en muchos campos, incluyendo la física, la economía, la ingeniería y la ciencia de datos. Por ejemplo, en física, la velocidad es la razón de cambio de la posición de un objeto respecto al tiempo. En economía, la tasa de cambio puede representar la tasa de crecimiento de una economía o el cambio en el valor de una moneda respecto a otra. En ciencia de datos, la tasa de cambio puede utilizarse para medir la velocidad de cambio en un conjunto de datos o para identificar tendencias. En resumen, la razón de cambio es una herramienta importante para comprender cómo cambian las cantidades en función de otras.

Los máximos y mínimos son conceptos clave en análisis matemático y optimización. Estos puntos representan los valores más altos (máximos) y más bajos (mínimos) de una función en un intervalo específico o en todo su dominio.

1. Máximo de una función: Un punto \((x, y) \) se considera un máximo local de una función \(f(x) \) si existe un intervalo abierto alrededor de \(x \) donde \(f(x) \) es mayor o igual a \(f(x) \) para todos los valores de \(x \) en ese intervalo, excepto posiblemente para \(x \) mismo. Si \(f(x) \) es mayor o igual a \(f(x) \) para todos los valores de \(x \) en el dominio de \(f(x) \), entonces \((x, y) \) es un máximo absoluto o global.

2. Mínimo de una función: Un punto \((x, y) \) se considera un mínimo local de una función \(f(x) \) si existe un intervalo abierto alrededor de \(x \) donde \(f(x) \) es menor o igual a \(f(x) \) para todos los valores de \(x \) en ese intervalo, excepto posiblemente para \(x \) mismo. Si \(f(x) \) es menor o igual a \(f(x) \) para todos los valores de \(x \) en el dominio de \(f(x) \), entonces \((x, y) \) es un mínimo absoluto o global.

En cálculo, para encontrar los máximos y mínimos de una función, típicamente seguimos estos pasos:

1. Encontrar los puntos críticos: Estos son los valores de \(x \) donde la derivada de la función es cero o donde no está definida.

2. Aplicar el criterio de la segunda derivada: Evaluamos la segunda derivada de la función en los puntos críticos para determinar si son máximos locales, mínimos locales o puntos de inflexión.

3. Evaluar los valores de la función: Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo dado para determinar los máximos y mínimos absolutos.

los máximos y mínimos nos dan información importante sobre el comportamiento de una función y son fundamentales para problemas de optimización en matemáticas, economía, ingeniería y muchas otras disciplinas.

Las antiderivadas, también conocidas como primitivas o integrales indefinidas, son el inverso de las derivadas. Dada una función \(f(x) \), una antiderivada de \(f(x) \) es cualquier función \(F(x) \) cuya derivada es igual a \(f(x) \). En otras palabras, si \(F'(x) = f(x) \), entonces \(F(x) \) es una antiderivada de \(f(x) \).

La notación general para denotar una antiderivada es la integral indefinida:

\[\int f(x) \, dx \]

Aquí, (f(x)) es la función que queremos integrar, (dx) indica la variable de integración y la integral indefinida nos da una familia de funciones cuyas derivadas son iguales a (f(x)). Esta familia de funciones se representa añadiendo una constante arbitraria (C) al final de la expresión:

\[\int f(x) \, dx = F(x) + C \]

Donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ y C es la constante de integración.

Para encontrar antiderivadas, se pueden utilizar varias técnicas, como la integración directa, la sustitución trigonométrica, la integración por partes y la integración de funciones racionales, entre otras. Es importante recordar que, dado que las antiderivadas incluyen una constante arbitraria C, cualquier antiderivada de una función dada es válida, ya que todas difieren por una constante.

Las antiderivadas son fundamentales en cálculo integral y se utilizan para encontrar áreas bajo curvas, calcular volúmenes y resolver una variedad de problemas de física, ingeniería, economía y ciencias naturales.