Mi Universidad

Resumen de unidad

Carlos Adrián Álvarez López

Parcial 1

Biomatemáticas

Dra. Brenda Paulina Ortiz Solis

Licenciatura en Medicina Humana

Semestre 2, grupo C

Comitán de Domínguez, Chiapas a 15 de diciembre del 2023

Límites

Definición:

En matemáticas, un límite nos dice a qué valor se acerca una función a medida que su variable independiente se acerca a un punto específico, sin llegar a tocarlo.

El matemático francés Augustine Louis Cauchy (1789-1857) definió el límite de una función $f(x)$ en el punto $x0$ como el valor L al que se aproxima la función $f(x)$ cuando x se acerca a $x0$, sin llegar a tocarlo.En otras palabras, si podemos hacer que los valores de $f(x)$ sean tan cercanos a L como queramos, simplemente haciendo que x sea lo suficientemente cercano a $x0$, entonces L es el límite de $f(x)$ en $x0$.

Propiedades de los límites:

1. Unicidad del límite:

Si el límite de una función existe, este será único. En otras palabras, no puede haber dos valores diferentes para el límite de la misma función en un mismo punto.

2. Límite de una constante:

El límite de una función constante, es decir, una función que siempre tiene el mismo valor, será igual a ese valor constante. Por ejemplo, si f(x) = 5 para todo x, entonces el límite de f(x) cuando x tiende a cualquier valor será 5.

3. Suma y resta de límites:

El límite de la suma de dos funciones será la suma de los límites de cada función individual. De manera similar, el límite de la resta de dos funciones será la resta de los límites de cada función.

4. Producto de límites:

El límite del producto de dos funciones será el producto de los límites de cada función. Additionally, el límite del producto de una constante por una función será la constante por el límite de la función.

5. Límite de una función compuesta:

El límite de una función compuesta, es decir, una función dentro de otra, se puede calcular utilizando el teorema del límite compuesto. Este teorema establece que el límite de la función compuesta es igual al límite de la función interior evaluado en el límite de la función exterior.

Límites que tienden al infinito:

Un límite que tiende al infinito se refiere al comportamiento de una función cuando su variable independiente (x) aumenta sin límite. En otras palabras, buscamos el valor al que se aproxima la función a medida que x se acerca a infinito positivo o negativo.

Existen diferentes métodos para calcular el límite de una función cuando sus variables tienden al infinito:

1. Sustitución directa:

Si al sustituir x por infinito en la función obtenemos un valor finito, ese es el límite.

Ejemplo:

$f(x) = 2x + 1$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (2x + 1) = \infty$

Continuidad y discontinuidad de una función:

Definición:

Continuidad:
Una función es continua en un punto si el límite bilateral en ese punto existe y es igual al valor de la función en ese mismo punto.La gráfica de la función no tiene "saltos" o "huecos" en el punto. La función se comporta de manera suave y continua a medida que se aproxima al punto.

Discontinuidad removible:
Ocurre cuando el límite bilateral en el punto existe, pero no es igual al valor de la función en ese punto. La gráfica de la función tiene un "salto" o "hueco" en el punto, pero este puede ser "eliminado" redefiniendo el valor de la función en ese punto. Por ejemplo:

- La función `f(x) = (x-1)/(x-1)` tiene una discontinuidad removible en `x=1`.
- El límite bilateral en `x=1` es `1`, pero `f(1)` no está definida.
- Se puede eliminar la discontinuidad redefiniendo `f(1)` como `1`.

Discontinuidad de salto en un punto:
Se presenta cuando el límite bilateral en el punto no existe porque los límites unilaterales (por la izquierda y por la derecha) no son iguales.La gráfica de la función tiene un "salto" o "hueco" en el punto que no puede ser "eliminado". La función se comporta de manera diferente a medida que se aproxima al punto desde la izquierda y desde la derecha. Por ejemplo:

- La función `f(x) = |x|` tiene una discontinuidad de salto en `x=0`.
- El límite por la izquierda en `x=0` es `-1`, mientras que el límite por la derecha es `1`.

Discontinuidad infinita en un punto:
Aparece cuando el límite bilateral en el punto no existe porque no está acotado (es decir, tiende a infinito o a menos infinito). La gráfica de la función se acerca a una línea vertical asintótica en el punto. La función se vuelve cada vez más grande o pequeña a medida que se aproxima al punto. Por ejemplo:

- La función `f(x) = 1/x` tiene una discontinuidad asintótica en `x=0`.
- El límite bilateral en `x=0` no existe porque la función tiende a infinito.

Derivadas

Definición:

Las derivadas son herramientas matemáticas que nos permiten calcular la tasa de cambio de una función en un punto específico. Esto significa que, en lugar de realizar cálculos complejos para determinar cómo cambia una función a medida que su variable independiente cambia, podemos usar las derivadas para obtener una respuesta rápida y precisa. Las derivadas nos permiten resolver problemas de cálculo de manera más eficiente que los métodos tradicionales. Por ejemplo, si queremos encontrar la pendiente de la línea tangente a una curva en un punto específico, podemos usar la derivada de la función que define la curva en lugar de utilizar métodos geométricos más complejos.

Derivada de una función constante:

La derivada de una función constante es cero. Esto se debe a que una función constante no cambia su valor, independientemente de la variable que la afecte. Esto significa que la derivada de una función f(x) en un punto x, representa la tasa de cambio instantánea de la función en ese punto. En otras palabras, nos indica cómo cambia el valor de la función f(x) a medida que la variable x cambia infinitesimalmente.

En el caso de una función constante, como f(x) = k, donde k es un número real, su valor no cambia con respecto a la variable x. Es decir, para cualquier valor de x, la función siempre tendrá el mismo valor k.
Por lo tanto, la tasa de cambio de una función constante es cero en todos los puntos. Matemáticamente, se expresa como:

- $f'(x) = 0$

La derivada del producto de dos funciones:

La derivada del producto de dos funciones u(x) y v(x) se puede calcular utilizando la siguiente regla:

- $(uv)' = u'v + uv'$

En otras palabras, la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera. Por ejemplo: Si queremos calcular la derivada de la función f(x) = x^2 * sin(x), podemos utilizar la regla del producto:

- f'(x) = (x^2)' * sin(x) + x^2 * (sin(x))'

Utilizando las reglas básicas de derivación, sabemos que:

- (x^2)' = 2x
- (sin(x))' = cos(x)

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación anterior, obtenemos:

- f'(x) = 2x * sin(x) + x^2 * cos(x)

Derivada del cociente de funciones:

La derivada del cociente de dos funciones, f(x) / g(x), se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

- (f(x) / g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) / g(x)^2

En otras palabras, la derivada del cociente es igual a:

- La derivada del numerador (f'(x)) multiplicada por el denominador (g(x))
- Menos la derivada del denominador (g'(x)) multiplicada por el numerador (f(x))
- Todo dividido por el cuadrado del denominador (g(x)^2)

Por ejemplo:
Si queremos calcular la derivada de la función f(x) = x^2 / (x + 1), podemos seguir estos pasos:

- Calcular la derivada del numerador (f'(x)):

f'(x) = 2x

- Calcular la derivada del denominador (g'(x)):

g'(x) = 1

- Sustituir f'(x), g(x), y g'(x) en la fórmula:

(f(x) / g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) / g(x)^2
= ((2x) * (x + 1) - (x^2) * 1) / (x + 1)^2
= (2x^2 + 2x - x^2) / (x + 1)^2
= x^2 + 2x / (x + 1)^2

Bibliografía:

1. https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-2/a/limits-intro
2. http://gmc.geofisica.unam.mx/papime2020/index.php/articulos/8-limites
3. https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-10/v/types-of-discontinuities#:~:text=Que%20una%20funci%C3%B3n%20sea%20continua,al%20valor%20de%20la%20funci%C3%B3n.
4. https://m.youtube.com/watch?v=HUq8qmH68x8
5. https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-9/e/differentiate-quotients