Resumen

Jorge Santis García

Primer Parcial

Biomatemáticas

Dra. Brenda Paulina Ortiz Solís

Medicina Humana

Segundo Semestre Grupo "B"

Comitán de Domínguez, Chiapas. 15 de marzo del 2024

LIMITES

1.1.- conceptos: "Cuando los valores atribuidos sucesivamente a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para llegar por último a diferir de ese valor en una cantidad tan pequeña como se desee, entonces dicho valor fijo recibe el nombre de límite de todos los demás valores."

En palabras más llanas decimos que: el límite de una función $f(x)$ en el punto x_0, es obtener el valor al que se va aproximando dicha función cuando x tiende a x_0, pero sin llegar a ese punto.

1.2: Limites unilaterales:

Hay casos en que las funciones no están definidas (en los reales) a la izquierda o a la derecha de un número determinado, por lo que el límite de la función cuando *x* tiende a dicho número, que supone que existe un intervalo abierto que contiene al número, no tiene sentido.

Ejemplo:

$f(x) = \sqrt{x}$: f no está definida para valores menores que 0; por lo que

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ no tiene sentido; no obstante, se pueden tomar valores suficentemente cercanos a 0 pero mayores que 0. En este caso x se aproxima a 0 por la derecha, lo cual permite definir el limite unilateral por la derecha.

Para el limite por la izquierda la situación es similar, en ese caso la variable independiente se aproxima al número por la izquierda.

Límite unilateral por la derecha:

Sea *f* una función definida en todos los números del intervalo abierto (*a, c*). Entonces, el límite de *f* (*x*), cuando *x* se aproxima a *a* por la derecha es *L*, y se escribe

Limitebilateral: Ahora, nos podemos referir al $\lim_{x\to a} f(x) = L$ como el limite no dirigido o **limitebilateral,** para distinguirlo de los limites unilaterales.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar cuán pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \ 0 < x - a < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite unilateral por la izquierda:

Sea *f* una función definida en todos los números de (*d, a*). Entonces, el límite de *f* (*x*), cuando *x* se aproxima a por la izquierda es *L*, y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar cuán pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \ 0 < a - x < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

1.3.- propiedad de los limites:

Algunas propiedades matemáticas de los límites pueden facilitar en algunos casos los cálculos en funciones más complejas. Considerando dos funciones definidas en un mismo intervalo.

. Unicidad del límite: El límite de una función será único en caso de su existencia.

. Límite de una constante: El límite de una función constante $f(x) = \mathrm{k}$ será igual a la constante k.

. Suma y resta de límites: El límite de la suma será la suma de los límites.

. Producto de límites: El límite del producto de una constante por una función será la constante por el límite de la función.

1.4.- cálculos de limites:

Hemos visto dos formas distintas de calcular límites. A partir de la representación gráfica de la función o usando la idea intuitiva de límite. La primera, tiene el problema de que no siempre conocemos la gráfica de la función, y la segunda, que calcular un límite de esta forma es un poco pesado y engorroso, así que, vamos a buscar artimañas que sean más eficaces y sobre todo que nos hagan el cálculo de un límite más rápido.

Importante

Regla I

Para calcular el límite de una función, cuando x tiende a x_0, basta con sustituir x_0 en la función y si nos da un número, es decir, se pueden hacer todas las operaciones, ese es el resultado del límite.

Regla II

En una función a trozos, para calcular el límite en el punto donde se corta la función, hay que hacer los límites laterales y para ello sustituir en los trozos adecuados.

Regla III

Las funciones polinómicas, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado:

2.- LIMITES

2.1.- límites al infinito:

Recuerda que el símbolo

no representa un número real. En cambio,

describe el comportamiento de los valores de la función

infinito que se hacen más y más grandes infinito; al igual que

describe el comportamiento de una función que se hace más y más negativa.

Así que, si ves

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

no lo tomes como un valor de la función.

¿Cómo calcular límites infinitos?

Hay tres maneras sencillas de calcular los límites al infinito:

1. Por representación gráfica
2. Por sustitución
3. Por deducción

LIMITES CONTINUIDAD:

Podríamos empezar diciendo que los límites son importantes en el cálculo, pero afirmar tal cosa sería infravalorar largamente su auténtica importancia. Sin límites el cálculo sencillamente no existiría. Cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido. ¿Qué es la velocidad instantánea? Es el límite de las velocidades medias. ¿Qué es la pendiente de una curva? Es el límite de las pendientes de las rectas secantes. ¿Qué es la longitud de una curva? Es el límite de la longitud de los caminos poligonales. ¿Qué es la suma de una serie infinita? Es el límite de las sumas finitas. ¿Qué es el área de una región limitada por curvas? Es el límite de la suma de las áreas de las regiones delimitadas por segmentos de rectas poligonales.

Idea intuitiva del límite

Empezamos con un número c y una función f definida cerca de c aunque no necesariamente en el mismo c. El número L es el límite de f cuando x se aproxima a c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si y sólo si los valores de la función $f(x)$ se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c.

3.- DERIVADAS:

Una definición generalizada de la derivada es la siguiente: La derivada es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función según cambie el valor de su variable independiente. Así como que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Las matemáticas tienen su simbología para representar abstracciones que necesitan ser entendidas por la mente humana y la derivada no es la excepción.

La primera derivada de una función y = f(x), puede expresarse en cualquiera de las formas siguientes:

Todas ellas indican la primera derivada de (y) con respecto a (x). Además, las derivadas sucesivas pueden expresarse de la siguiente forma:

La primera derivada de (y) con respecto a (x) se define como “El límite cuando Δx tiende a cero del cociente Δy / Δx”, que en símbolos matemáticos se expresa como: $y' = \Delta y / \Delta x$. También podemos decir que la primera derivada de (y) con respecto a (x), nos expresa qué tanto varía (y) ante una variación que tenga (x). Δx y Δy se refieren a esa variación.

Vamos a ver una gráfica que nos ayude a interpretar el concepto de derivada de forma geométrica.

Cuando h tiende a cero, es decir, empieza a disminuir su longitud, puedes ver que el punto Q empieza a aproximarse al punto P, y el cateto QR empieza a disminuir, hasta que Q se confunde con P. Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función f(x) en P, y por lo tanto

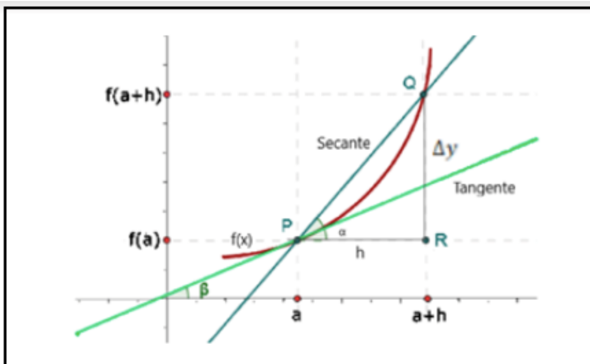

Figura 10.1

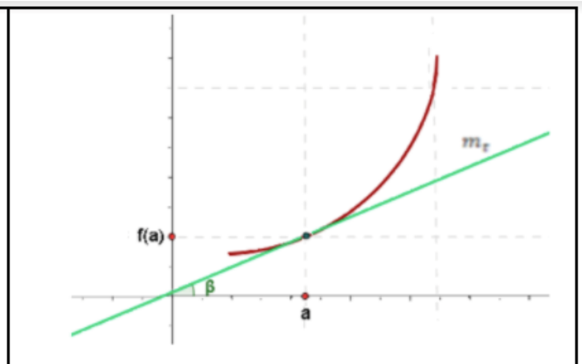

Figura 10.2

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

$$m_t = f'(a)$$

en ángulo α tiende a ser β.

LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE

Según lo que hemos descubierto anteriormente la derivada de una constante es cero. Veamos un ejemplo.

f(x) = 7

f '(x) = 0

La derivada de una potencia entera positiva

Como ya sabemos, la derivada de xn es n xn-1, entonces:

f(x)= x5

f '(x)= 5x4

Pero que sucede con funciones como f(x) = 7x5, aún no podemos derivar la función porque no sabemos cual es la regla para derivar ese tipo de expresiones.

La derivada de una constante por una función.

Para derivar una constante por una función, es decir cf(x), su derivada es la constante por la derivada de la función, o cf'(x), por ejemplo:>

f(x)= 3x5

f '(x)= 3(5x4) = 15x4

LAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LA DERIVADA SON:

La derivada de una suma de funciones es la suma de sus derivadas. Es decir, la derivada de f(x)+g(x)

es igual a f′(x)+g′(x)

La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función. Es decir:

(k·f(x))′=k·f′(x)

Estas dos propiedades son muy útiles para determinar, por ejemplo, la derivada de un polinomio, ya que un polinomio no es otra cosa que una suma de monomios de la forma axn

. Por ello, para hallar la derivada de cualquier polinomio es suficiente conocer las derivadas xn

. La derivada de un producto de funciones se calcula de la siguiente manera: si $h(x)=f(x)\cdot g(x)$

, su derivada es igual a

$$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

La derivada de un cociente de funciones se calcula de la siguiente manera: si h(x)=f(x)g(x)

, su derivada es igual a

$$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)g2(x)$$

La derivada de una composición de funciones se calcula con la denominada regla de la cadena: si $h(x)=(g\circ f)(x))$

, entonces su derivada es igual a

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

4.- DERIVADAS:

4.1.- reglas de cadena:

La regla de la cadena es una norma de la derivación que nos dice que, teniendo una variable y que depende de u, y si esta depende a la variable x, entonces la razón de cambio de y respecto a x puede estimarse como el producto de la derivada de y con respecto a u por la derivada de u respecto a x.

Regla de la cadena

La regla de la cadena es una norma de la derivación que nos dice que, teniendo una variable y que depende de u, y si esta depende a la variable x, entonces la razón de cambio de y respecto a x puede estimarse como el producto de la derivada de y con respecto a u por la derivada de u respecto a x.

En términos matemáticos, se puede traducir de esta manera:

Regla De La Cadena

Para utilizar bien esta regla es importante poder identificar correctamente si una función es compuesta, así como determinar la función exterior e interior.

Por ejemplo, si tenemos (4x+7)2, se trata de una función compuesta donde 4x+7 es la función interna a la que podemos asignar el nombre y, mientras que la función externa es y2.

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{3h}{h} = \lim_{h=0} 3 = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2(3x - 11) \times 3 = 6(3x - 11)$$

$$\frac{dy}{dx} = 18x - 66$$

FUNCIONES POTENCIAL, LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL

La derivada de una función potencial, que se expresa como f (x) = un (x), se calcula como el producto del exponente por la derivada de la función u (x) y por la función u (x) elevada a un grado menos (n-1).

La derivada de una función logarítmica, de fórmula general f (x) = loga u(x), se obtiene como el cociente de la derivada de u (x) por la propia función u (x) y todo ello multiplicado por el logaritmo en base a del número e. Esta fórmula se simplifica para los logaritmos neperianos, ya que loge e = 1.

Finalmente, para derivar una función exponencial de expresión general f (x) = au(x), se multiplica la propia función por la derivada del exponente, y todo ello multiplicado por el logaritmo neperiano de la base. Como caso particular, hay que resaltar que la función y = ex tiene como derivada ella misma (y¿ = ex).

Funciones trigonométricas

La derivación de funciones trigonométricas se resume en unas reglas muy sencillas de recordar. En esencia, la derivada del seno es igual al coseno, y la del coseno coincide con el seno cambiado de signo (todo ello multiplicado, claro está, por la derivada de la función que figura como argumento de la razón trigonométrica). Es decir:

Las restantes funciones trigonométricas se determinan aplicando las reglas de la derivación de un cociente de funciones (para la tangente, la cotangente, etcétera) y la regla de la cadena (para las funciones circulares inversas).

Derivación de una función implícita

La derivación de una función expresada en la forma explícita y 5 f (x) es sencilla si se conocen las reglas de derivación. En cambio, esta tarea se complica cuando la función que ha de derivarse está implícita en una expresión (por ejemplo: y3 + xy ++ 2x = 5, donde se ha de derivar y).

Para obtener esta derivada, lo primero que hay que hacer es despejar y. A veces, esta operación resulta complicada, por lo que resulta preferible aplicar el procedimiento siguiente:

Referencia bibliográfica

1.- Mora, W. MA-1404 Cálculo.