Nombre de alumno: Jesus Emmanuel Meza Gomez

Nombre del profesor: Juan José Ojeda Trujillo

Nombre del trabajo: Ensayo primera unidad

Materia: calculo

Grado: 4°

Grupo: A

Comitán de Domínguez Chiapas a 5 de marzo del 2023

Introducción

En esta unidad apreciaremos grandes temas principales los cuales non enseñaran el principio de esta gran materia llamada calculo en la cual aprenderemos muchísimas cosas, para empezar que es calculo:

Acción de hacer las operaciones matemáticas necesarias para averiguar el resultado, el valor o la medida de algo, en expresión numérica. Que es el primer tema de nuestra unidad la cual será las medidas su conocimiento y conversiones.

El cálculo infinitesimal o simplemente cálculo constituye una rama muy importante de las matemáticas. En la misma manera que la geometría estudia el espacio y el álgebra estudia las estructuras abstractas, el cálculo es el estudio del cambio y la continuidad.

- Naci el 1 de julio de 1646 en Leipzig (ahora Alemania).
- Muri el 14 de noviembre de 1716 en Hannover, (Alemania).

Los inventores del CÆlculo

En el œltimo tercio del siglo XVII, Newton (en 1664 - 1666) y Leibniz (en 1675) inventaron el CÆlculo (de forma independiente):

- Uni caron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, la gran variedad de tØcnicas diversas y de problemas que se abordaban con mØtodos particulares.
- Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de cÆlculo que pod an aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independientes de cualquier signi cado geomØtrico, que hac a casi automÆtico, el uso de dichos conceptos generales.
- Reconocieron la relaci n inversa fundamental entre la derivaci n y la integraci n.

Newton llam a nuestra derivada una uxi n una raz n de cambio o ujo; Leibniz vio la derivada como una raz n de diferencias in nitesimales y la llam el cociente diferencial. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez aœos antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados.

Newton y el cÆlculo de uxiones

Los principales descubrimientos matemÆticos de Newton en el campo del cÆlculo in nitesimal datan de los llamados Anni Mirabiles 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se hab a graduado como bachelor of arts en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos aœos. Newton pas ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como Øl mismo reconoci cincuenta aœos despuØs, Øse fue el per odo mÆs creativo de su vida.

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cÆlculo con las series in nitas. A nales de ese mismo aœo, el mØtodo de uxiones, es decir, el cÆlculo de derivadas. En 1666 el mØtodo inverso de uxiones y la relaci n entre cuadraturas y uxiones. En esos dos aœos tambiØn inici las teor as de los colores y de la gravitaci n universal. Newton ten a 24 aœos.

Newton desarroll tres versiones de su cÆlculo. En la obra De Analysi per aequationes numero terminorum in nitas, que Newton entreg a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del CÆlculo, Newton usa conceptos in nitesimales de manera similar a como hac a el propio Barrow.

Una segunda presentaci n del CÆlculo es la que realiza Newton en el libro Methodus uxionum et serierum in nitorum, escrito hacia 1671 y que se public mucho despuØs en 1736. Newton considera cantidades variables que van uyendo con el tiempo, a las que llama uentes. DespuØs se introducen las razones de cambio instantÆneas de las uentes, a las que llama uxiones, que son las derivadas respecto al tiempo de las uentes. Newton representaba a las primeras por letras $x, y, z, \ldots$ y a las segundas por letras punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ Los incrementos de las uentes $x, y, z, \ldots,$ los representa por medio de las correspondientes uxiones en la forma $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \ldots,$ y los llama momentos, donde o es entendido como un incremento in nitesimal de tiempo. Newton desarroll una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como determinaci n de tangentes, mÆximos y m nimos, Æreas y super cies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., a dos problemas fundamentales que pueden formularse tanto en tØrminos mecÆnicos como en tØrminos matemÆticos:

Problema 1 Determinaci n de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado segœn un camino dado. De otro modo: dada la relaci n entre las cantidades uentes, determinar la relaci n de las uxiones.

Problema 2 Dada la velocidad de movimiento, determinar el camino recorrido en un tiempo dado. MatemÆticamente: determinar la relaci n entre las uentes dada la relaci n entre las uxiones.

Hay que notar que Newton no piensa en tØrminos de funciones con el signi cado actual de ese tØrmino, sino que imagina curvas o super cies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las uentes del tipo $f\left(x, y, z, \ldots\right) = 0$, donde f para Øl es una expresi n anal tica nita o in nita. Por tanto, el primer problema planteado puede verse como un problema de derivaci n impl cita: supuesta conocida la expresi n anal tica que satisfacen las uentes $f\left(x, y, z, \ldots\right) = 0$, obtener la expresi n anal tica $F\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots\right) = 0$ que satisfacen las uxiones. Para este problema, Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cÆlculos necesarios. Por ejemplo, sea la curva de ecuaci n

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo x e y por $x + x o\dot{}$ e $y + y o\dot{}$ respectivamente, tenemos:

$$\left(x^3 + 3xo\dot{x}^2 + 3\dot{x}^2 o^2 x + \dot{x}^3 o^3\right) - a\left(x^2 + 2xo\dot{x} + \dot{x}^2 o^2\right) + a\left(xy + xo\dot{y} + yo\dot{x} + \dot{x}\dot{y}o^2\right) - \left(y^3 + 3yo\dot{y}^2 + 3\dot{y}^2 o^2 y + \dot{y}^3 o^3\right) = 0$$

Teniendo en cuenta ahora que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividiendo por o y despreciando los demÆs tØrminos que contengan a o, resulta

$$3x\dot{x}^{2} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ax\dot{y} -$$
$$3y\dot{y}^{2} = 0$$

Esta es la relaci n que satisfacen las uxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en cualquier punto (x, y) de la misma, que viene dada por:

$$\dot{y} \quad 3x^2 - 2ax + ay\,\dot{x} \qquad 3y^2 -$$
$$ax$$

$$- =$$

Como ya hemos indicado, Newton aplica los resultados sobre uentes y uxiones a la resoluci n de multitud de problemas. Por ejemplo, con respecto a los problemas de mÆximos y m nimos, escribe:

> Cuando una cantidad es la mÆs grande o la mÆs pequeœa, en ese momento su uir ni crece ni decrece: si creciera, eso probar a que era menor y que lo que sigue ser a mÆs grande que lo que ahora es, y rec procamente pasar a si decreciera. As , calcœlese su uxi n como se ha explicado en el problema 1 e iguÆlese a cero.

Newton usa el teorema fundamental del cÆlculo para realizar cuadraturas. Escribe:

> Problema 9: Determinar el Ærea de cualquier curva propuesta.
>
> La resoluci n del problema estÆ basada en el establecimiento de la relaci n entre la cantidad uente y su uxi n (problema 2).

Newton reduce la integraci n al proceso inverso del cÆlculo de uxiones, esto es, al cÆlculo de primitivas.

El problema 2, es mucho mÆs dif cil que el problema 1, pues se trata de resolver una ecuaci n diferencial que puede ser muy general. Newton consider varias posibilidades resolviendo algunos casos particulares. Para ello utiliz tØcnicas de cÆlculo de primitivas y de desarrollos en serie.

En De Quadratura Curvarum, escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cÆlculo de uxiones en lo que llama razones primera y œltima de incrementos evanescentes. De esa forma se re ere Newton a los cocientes de los incrementos in nitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero (raz n primera) o se anulan (raz n œltima). Un ejemplo ayudarÆ a entender el signi cado de estas ideas. En la introducci n de la citada obra, Newton calcula la uxi n de x^n. Para ello, considera un incremento o de forma que x pasa a $x + o$. Entonces x^n se convierte

en

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

Los incrementos de x y x^n, a saber,

$$o \quad \text{y} \quad nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

estÆn entre s en la misma raz n que

$$1 \quad \text{a} \quad nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots$$

Dice Newton dejemos ahora que los incrementos se anulen y su œltima proporci n serÆ 1 a nx^{n-1}: por tanto, la uxi n de la cantidad x es a la uxi n de la cantidad x^n como $1 : nx^{n-1}$.

Hay distintas interpretaciones de las razones que llevaron a Newton a exponer su cÆlculo de una u otra forma. La mÆs extendida es que su intenci n era conseguir una fundamentaci n rigurosa del mismo. La primera exposici n, basada en el concepto de cantidad in nitesimal, entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia l gica de los que Newton era muy consciente. En sus propias palabras, su cÆlculo estaba concisamente explicado mÆs que exactamente demostrado.

En Methodus Fluxionum et Serierum In nitarum (1671), el concepto bÆsico es el de cantidad en movimiento o que uye continuamente en el tiempo. Las magnitudes estÆn generadas por el movimiento continuo y no por agregaci n de cantidades in nitesimales; la idea bÆsica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. QuizÆs Newton pretend a de esta forma evitar el uso de in nitesimales estÆticos o geomØtricos , pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los in nitesimales de tiempo usados para de nir los momentos de las uentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracci n matemÆtica anÆloga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que uye uniformemente y con la que se relacionan todas las uentes. Puede verse aqu un intento de Newton por evitar los problemas matemÆticos del continuo (in nitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo f sico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantÆnea de las uentes, no le pareci preciso de nirla.

En Quadrature of Curves (1676), Newton expresa su prop sito de abandonar por completo el uso de cantidades in nitesimales. Mani esta en este sentido que errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi , esto es, que en matemÆticas ni siquiera los errores mÆs pequeæos pueden ser admitidos. Y eso es justamente lo que se hac a cuando se despreciaban en los cÆlculos cantidades in nitesimales. Seguidamente, enuncia su teor a de las razones primera y œltima de cantidades evanescentes . Estas ideas seæalan claramente al concepto matemÆtico de l mite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en tØrminos actuales, el l mite de un cociente de funciones que se anulan. Pero estamos en el siglo XVII y se necesitarÆn casi 200 aæos para precisar matemÆticamente el concepto de l mite. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuici n mecÆnica del movimiento.

> Por velocidad œltima se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto nal y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco despuØs de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto nal y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por raz n œltima de cantidades

> evanescentes, la raz n de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni despuØs de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen.

Newton ten a su particular idea de l mite .

> Las razones œltimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades œltimas, sino l mites a los que tiende a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, l mites a los que pueden acercarse mÆs que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in in nitum.

La teor a de las razones œltimas puede verse como una teor a cinemÆtica de l mites. Con esta teor a, Newton pretend a recuperar el rigor de la geometr a de la Antig edad.

> [. . .] investigar las razones primera y œltima de cantidades nitas, nacientes o evanescentes, estÆ en armon a con la geometr a de los antiguos; y me he esforzado en probar que, en el mØtodo de uxiones, no es necesario introducir en la geometr a cantidades in nitamente pequeœas.

Otros autores opinan que estos tres mØtodos empleados por Newton responden, mÆs que a fundamentar con rigor su cÆlculo, a distintos prop sitos. As , la teor a de uxiones proporciona mØtodos heur sticos de descubrimiento y algoritmos œtiles para el calculo; la teor a de razones primera y œltima servir a al prop sito de proporcionar demostraciones convincentes y el uso de los in nitØsimos servir a para proporcionar atajos a las pruebas mÆs rigurosas. Newton us simultÆneamente estas tres aproximaciones en la resoluci n de una gran variedad de problemas.

Newton realiz también contribuciones importantes en la teor a de ecuaciones, donde podemos destacar las identidades de Newton para la suma de las potencias de las ra ces de una ecuaci n polin mica, y a la teor a de curvas, siendo notable su clasi caci n de las curvas de tercer grado.

> Considerando la matemÆtica desde el comienzo del mundo hasta la Øpoca de Newton, lo que Øl ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.
> Leibniz

Las tres obras consideradas, escritas entre 1666 y 1676, se publicaron ya en el siglo XVIII, por eso la primera noticia impresa de la teor a de uxiones apareci , de forma bastante circunstancial, en la obra magna de Newton Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, cuya primera edici n se hizo en 1687. Los Principia consta de tres libros escritos en el estilo tradicional a la manera de los Elementos de Euclides, y su lenguaje es principalmente el de la geometr a sintØtica.

Los Principia estÆn considerados como la obra cient ca mÆs importante de todos los tiempos y una hazaœa intelectual incomparable por sus logros y sus consecuencias. En dicha obra Newton estable los fundamentos de la mecÆnica y enuncia las tres cØlebres leyes del movimiento, as como la ley de la gravitaci n universal. En los dos primeros libros, se estudia el movimiento de los cuerpos en el vac o y en un medio resistente. Newton deduce matemÆticamente las tres leyes que Kepler hab a obtenido emp ricamente. En el libro III, titulado Sobre el Sistema del Mundo, Newton desarrolla la mecÆnica celeste. Hace un detallado estudio de los movimientos de la Luna, explicando las causas de las mareas. Calcula la masa del Sol con respecto a la de la Tierra, estudia la precesi n de los equinoccios, predice el achatamiento de la Tierra por los polos . . . .

En los Principia el mundo aparece como un sistema ordenado y armonioso en el que todo, los cielos, la tierra y el mar, obedecen unas pocas leyes matemÆticas fundamentales. A partir de Newton quedarÆ claro que no hay diferencias entre un mundo sublunar y otro supralunar, ni entre la Tierra y el Cielo; las leyes de la Naturaleza no hacen estas distinciones y en todas partes del Universo los procesos obedecen a las mismas leyes naturales inexorables.

El Universo newtoniano es un Cosmos diÆfano y sereno ofrecido a la exploraci n racional del hombre. La gran obra de Newton proporcionarÆ a la Ilustraci n, en el siglo XVIII, la base cient ca necesaria para acabar con una concepci n conservadora y absolutista del poder pol tico apoyada en dogmÆticas concepciones religiosas.

El prestigio y admiraci n que goz Newton en vida queda re ejado en las palabras de Alexander Pope:

Nature, and Nature's Laws lay hid in Night:

God said, Let Newton be and All was light.

Y qu Ø pensaba el propio Newton de s mismo? Escuchemos sus palabras, ya casi al nal de su vida.

> No sØ c mo puedo ser visto por el mundo, pero a m me parece haber sido solamente como un niœo que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra mÆs pulida o una concha mÆs bonita de lo normal, mientras que el gran ocØano de la verdad yace ante m completamente desconocido.

Newton muri en la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado con grandes honores en la abad a de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

Leibniz y el cÆlculo de diferencias

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) naci en Leipzig (Alemania) en el seno de una piadosa familia luterana. A los quince aœos entr en la Universidad de su ciudad natal donde estudi una gran variedad de materias incluyendo derecho, teolog a, losof a y matemÆticas. Se doctor a la edad de 21 aœos en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, donde le fue ofrecido un puesto de profesor que Øl rechaz .

A lo largo de su vida, Leibniz realiz mœltiples actividades. Como abogado y diplomÆtico trabaj para el Pr ncipe elector arzobispo de Maguncia y, desde 1676 hasta su muerte, para los Duques de Brunswick-Luneburgo (conocidos como pr ncipes electores de Hanover desde 1692), lo que le llev a viajar por gran parte de Europa. Invent una mÆquina de calcular, la primera mÆquina de este tipo capaz de realizar las operaciones de multiplicaci n, divisi n y extracci n de ra ces cuadradas. Como ingeniero trabaj en prensas hidrÆulicas, molinos de viento y desarroll proyectos para drenar el agua de las minas de plata de las montaœas de Harz en la Baja Sajonia. Como historiador escribi la historia de la casa de Brunswick, realizando muchas investigaciones geneal gicas. Trabaj tambiØn como bibliotecario en la ciudad de Hanover.

Leibniz fue un pensador profundo. Como l sofo se propuso la creaci n de un Ælgebra del pensamiento humano, algo as como un lenguaje simb lico universal para escribir los razonamientos con s mbolos y f rmulas, cuyas reglas de combinaci n permitieran reducir todo discurso racional a cÆlculos rutinarios. Esto explica el gran interØs de Leibniz en desarrollar una notaci n matemÆtica apropiada para su cÆlculo; de hecho, su notaci n, muy superior a la de Newton, es la que usamos actualmente. Leibniz fund la Academia de Ciencias de Berl n en 1700 y fue su primer presidente; tambiØn fue uno de los fundadores de la primera revista cient ca alemana, el Acta Eruditorum.

Aunque Leibniz public poco, mantuvo correspondencia con mÆs de 600 eruditos y se han conservado sus manuscritos que estÆn en el archivo que lleva su nombre en la ciudad de Hannover. Las contribuciones de Leibniz al Ælgebra (determinantes, resoluci n de ecuaciones), la historia natural, la geolog a y la ling stica son tambiØn importantes.

En 1672, estando en Par s en misi n diplomÆtica, Leibniz se dedic intensamente al estudio de la matemÆtica superior teniendo como gu a al matemÆtico y f sico Christian Huygens (1629 - 1695). En los aœos 1673 y 1676 realiz , tambiØn en misi n diplomÆtica, dos viajes a Londres donde tuvo acceso al manuscrito de Newton De Analysi, circunstancia que se us para acusar, hoy sabemos que sin motivo alguno, a Leibniz de plagio cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del CÆlculo. Los progresos matemÆticos realizados por Leibniz en estos cuatro aœos fueron extraordinarios.

En las matemÆticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numØricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesi n de nœmeros:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$$

Podemos formar la sucesi n de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \ldots, b_n = a_n - a_{n-1}, \ldots$$

Leibniz se hab a dado cuenta de la relaci n:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n$$

lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fÆcilmente, y que el proceso de formar la sucesi n de diferencias y despuØs sumarla recupera la sucesi n inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometr a, conduce al concepto central del cÆlculo de Leibniz que es el de diferencial , el cual tuvo para Øl diferentes signi cados en distintas Øpocas.

Leibniz consideraba una curva como un pol gono de in nitos lados de longitud in nitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesi n de abscisas x_1, $x_2, x_3, x_4, \ldots$ y una sucesi n de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ donde los puntos (x_i, y_i) estÆn todos ellos en la curva y son algo as como los vØrtices de la poligonal de in nitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la diferencial de x y se representa por $\mathrm{d}x$, signi cado anÆlogo tiene $\mathrm{d}y$. El diferencial $\mathrm{d}x$ es una cantidad ja, no nula, in nitamente pequeœa en comparaci n con x, de hecho es una cantidad in nitesimal. Los lados del pol gono que constituye la curva son representados por $\mathrm{d}s$. Resulta as el triÆngulo caracter stico de Leibniz que es el mismo que ya hab a sido considerado por Barrow.

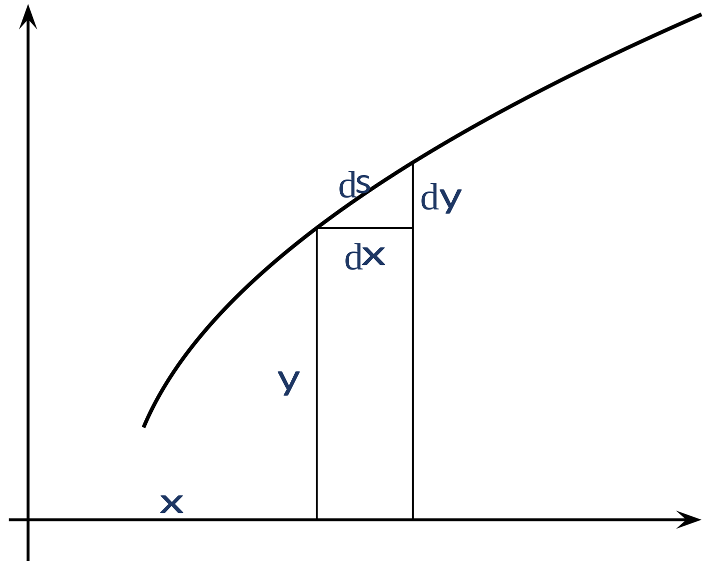

Figura 1. TriÆngulo caracter stico

Curiosamente, los tØrminos abscisa , ordenada y coordenadas , tan propios de la geometr a anal tica, no fueron usados nunca por Descartes sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de diferenciales , Leibniz siempre hablaba de diferencias .

El triÆngulo caracter stico tiene lados in nitesimales dx , dy , ds y se veri ca la relaci n $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. El lado ds sobre la curva o pol gono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{dy}{dx}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llam cociente diferencial. Leibniz nunca consider la derivada como un l mite.

Leibniz investig durante algœn tiempo hasta encontrar las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes. Dichas reglas se expresan fÆcilmente con su notaci n diferencial:

$$\left(-\right) =$$

$x \quad y\,\mathrm{d}x - x$

$\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, $\quad \mathrm{d} \quad y$

y_2

La manera en que Leibniz lleg a estas f rmulas pudo ser como sigue. Consideremos

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)!$$

Entonces

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1}\sum_{j=1}^{n} x_j \quad (1)$$

Si interpretamos, al estilo de Leibniz, que x_j e y_j son diferencias de valores consecutivos de las cantidades x e y respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrÆn dados por las sumas respectivas $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$, mientras que $\mathrm{d}x = x_{n+1}$ y $\mathrm{d}y = y_{n+1}$ por ser diferencias de valores consecutivos. De la misma forma, $z_{n+1} - z_n$ ser a la diferencial de $z = xy$. Por tanto, la igualdad 1 es interpretada por Leibniz en la forma $\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, lo que lleva a la regla para la diferencial de un producto.

A partir de la regla para la diferencial de un producto, Leibniz obtuvo la regla correspondiente para la diferencial de un cociente $z = \frac{x}{y}$. Poniendo $x = zy$ se tiene que $dx = y\,dz + z\,dy$, de donde despejando dz, resulta:

$$dz = \frac{dx - z\,dy}{y} = \frac{dx - \frac{x}{y}\,dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

Consideremos ahora una curva como la de la gura 2 con una sucesi n de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad.

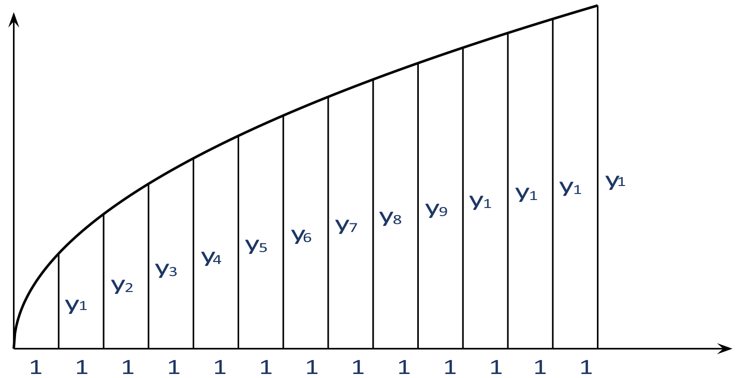

Figura 2. Aproximaci n de una cuadratura

La suma de las ordenadas es una aproximaci n de la cuadratura de la curva (del Ærea bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto mÆs pequeœa se elija la unidad 1, tanto mejor serÆn estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada in nitamente pequeœa, estas aproximaciones se har an exactas, esto es, la cuadratura ser a igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente ser a igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas.

Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son rec procas entre s , dedujo Leibniz que el cÆlculo de cuadraturas y de tangentes tambiØn eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integraci n y el origen de sus notaciones para la integral y los diferenciales, pueden seguirse con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. En 1676 Leibniz ya hab a obtenido prÆcticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicaci n sobre cÆlculo diferencial fue el art culo de Leibniz Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, que fue publicado en Acta Eruditorum hace ya mÆs de tres siglos, en 1684. En este trabajo, Leibniz de n a el diferencial dy de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades in nitesimales. Poco despuØs, en 1686, Leibniz public un trabajo con sus estudios sobre la integraci n.

Reconocido hoy d a como un genio universal, Leibniz vivi sus œltimos aæos en Hannover en un aislamiento cada vez mayor y muri el 14 de noviembre de 1716. A su entierro solamente asisti su secretario.

El Teorema Fundamental del CÆlculo segœn Newton

Newton desarroll tres versiones de su cÆlculo. En la obra De Analysi per aequationes numero terminorum in nitas, que Newton entreg a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del CÆlculo, Newton usa conceptos in nitesimales de manera similar a como hac a el propio Barrow. Este trabajo, ademÆs de contener el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series in nitas, contiene tambiØn un claro reconocimiento de la relaci n inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. La exposici n que hace Newton de esta relaci n fundamental es como sigue. Supone una curva y llama z al Ærea bajo la curva hasta el punto de abscisa x (ver gura 3). Se supone conocida la relaci n entre x y z. Aunque Newton explica su mØtodo con un ejemplo, queda perfectamente claro su carÆcter general.