



**Nombre de alumno: María
Magdalena Martínez Solís**

**Nombre del profesor: Juan José
Ojeda Trujillo**

**Nombre del trabajo mapa
conceptual**

Materia: física 1.

Grado: 4 semestre.

Grupo: A.

VECTORES

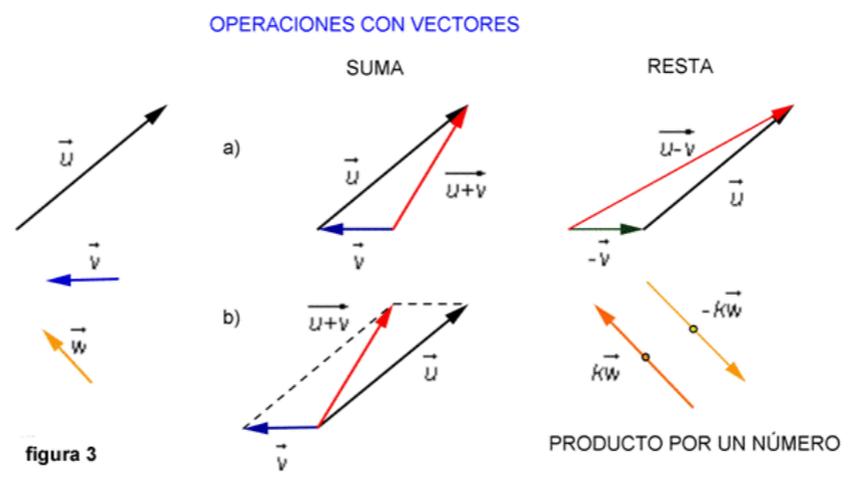
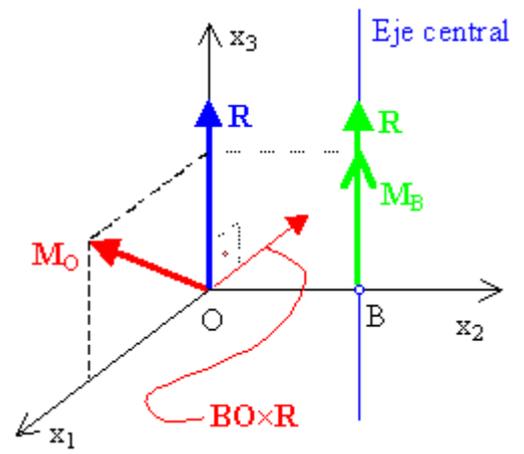
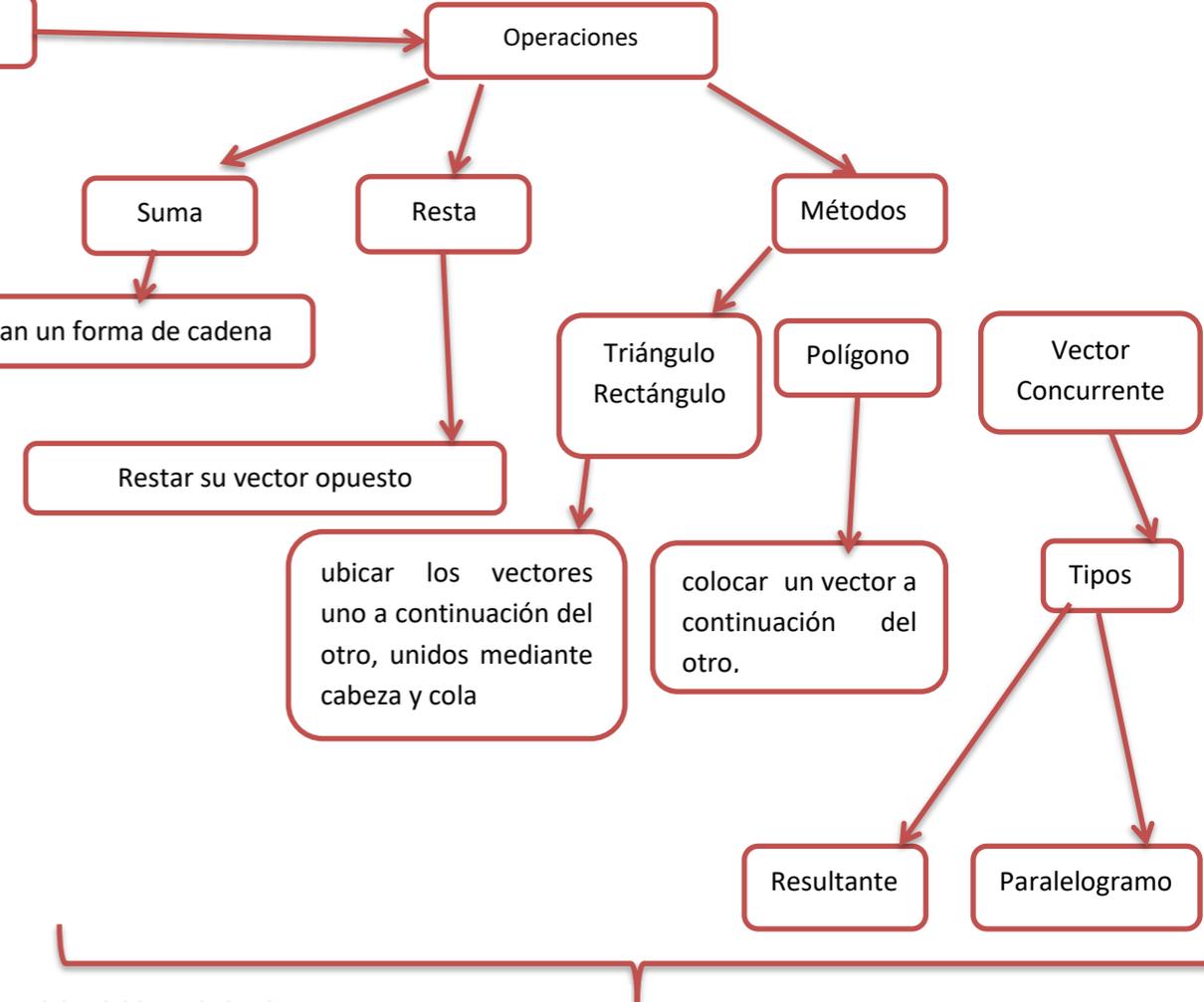
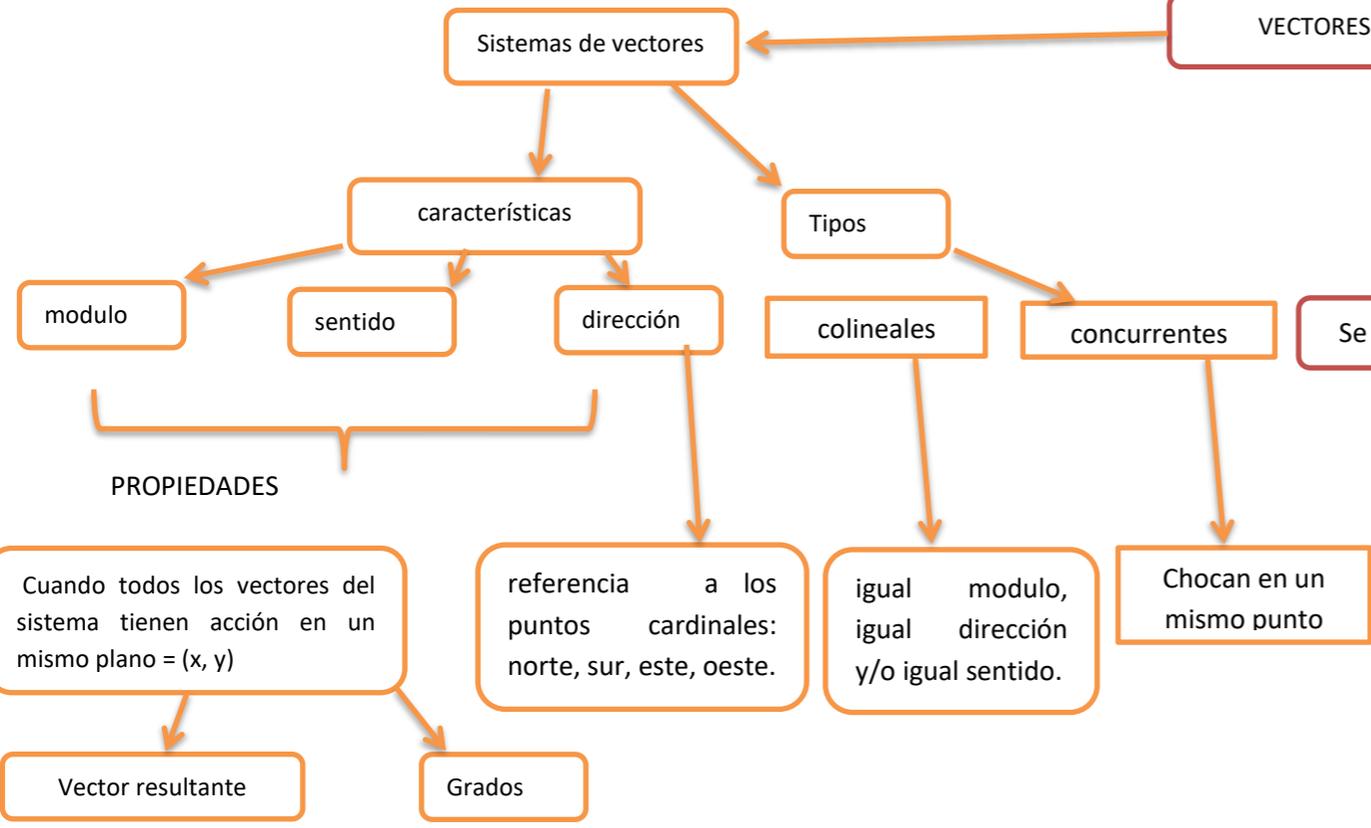


figura 3

Acciones de los vectores del sistema se encuentran en planos distintos en tres ejes (x, y, z)

UNIDAD 2

2.1 Sistemas de vectores

2.1.1. Vectores coplanares y no paralelos

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 36 + 1 - 20 + 6 - 15 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = -8\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

Paralelos: $\cos \theta = \pm 1$

Ortogonales: $\cos \theta = 0$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

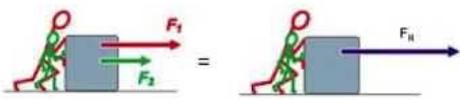
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-8)(2) + (-3)(-2) + (10)(1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -16 + 6 + 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

2.1.2. Sistemas de vectores colineales

Ejemplo de suma de vectores colineales.



Si $F_1 = 50 \text{ N}$ y $F_2 = 35 \text{ N}$ encuentra el valor de F_R

$$F_1 + F_2 = F_R$$
$$F_R = 50 \text{ N} + 35 \text{ N} = 85 \text{ N}$$

Suma y resta de vectores colineales

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

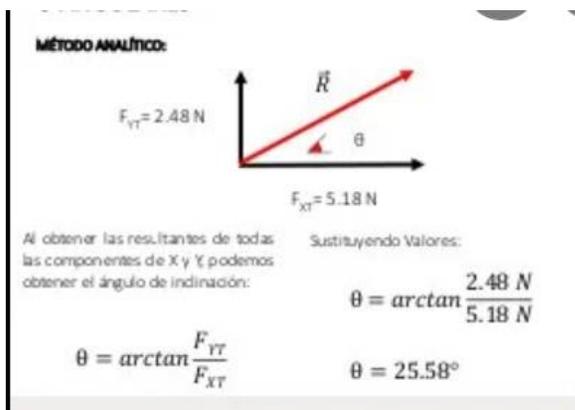
$$\vec{R} = +4 + 1 - 3$$

$$\vec{R} = +5 - 3$$

$$\vec{R} = +2 \dots (\text{apunta hacia arriba})$$

2.1.3. Sistema de vectores concurrentes

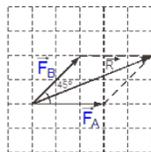
Suma de vectores concurrentes. Ejemplo 1



Ejercicio sobre hallar valor de medidas por vectores concurrentes.

$$R = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2(3)(2\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

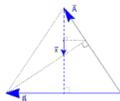
$$R = \sqrt{29 \text{ cm} = 500 \sqrt{29} \text{ N}}$$



Rpta.: E

8. En la figura el triángulo mostrado es equilátero. Expresar el vector \vec{x} en función de los vectores \vec{A} y \vec{B} .

- A) $\frac{2\vec{A} + \vec{B}}{6}$ B) $\frac{\vec{B} - 2\vec{A}}{12}$ C) $\frac{2\vec{A} - \vec{B}}{6}$
 D) $\frac{\vec{B} - \vec{A}}{24}$ E) $\frac{2\vec{B} - \vec{A}}{12}$



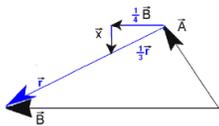
Solución:

De la figura se deduce:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\vec{r} = \frac{\vec{B}}{4} + \vec{x} \\ \vec{r} = \vec{B} - \frac{\vec{A}}{2} \end{cases}$$

De donde:

$$\vec{x} = \frac{1}{12}(\vec{B} - 2\vec{A})$$



Rpta.: B

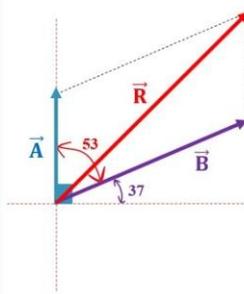
2.1.4. Resultante y equilibrante de un sistema de vectores

Ejercicio: hallar el resultante del siguiente sistema de vectores.

Suscríbete
CIVIL ENGINEERING TUTORIALES
(Alvaro Gabriel Rodríguez Cerin)

VECTORES

Ejercicios :
Hallar la resultante de $\vec{A} + \vec{B}$; Si $\vec{A} = 5 \angle 90^\circ$ y $\vec{B} = 12 \angle 37^\circ$

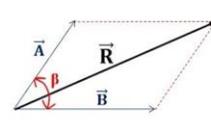


$$|\vec{R}| = \sqrt{5^2 + 12^2 + 2(5)(12)\cos(53)}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{169 + (120)\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{241}$$

$$|\vec{R}| = 15.52$$



$$|\vec{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2(A)(B)\cos(\beta)}$$

Vector equilibrante calculado

$$\theta = \tan^{-1} \frac{|R_y|}{|R_x|} = \tan^{-1} \frac{23.4594N}{19.7064N}$$

$\theta = 49.9690^\circ$
 Medido a partir del eje x+
 Hacia abajo

$$E = R = 30.6379$$

$$\theta_E = \theta_R - 180$$

$$\theta_E = 310.0309^\circ - 180^\circ$$

$$\theta_E = 130.0309^\circ$$

2.1.5. Propiedades de los vectores

Vectores en \mathbb{R}^n

Propiedades

$$i) \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad v) \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

$$ii) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad vi) \alpha \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

$$iii) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

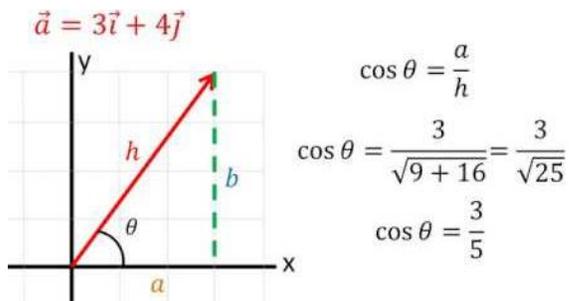
$$iv) \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad vii) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$viii) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$



Álgebra lineal

2.1.6. Dirección de un vector



$$\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

Magnitud

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 4 + 1}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{21}$$

Dirección

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

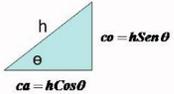
$$\vec{u} = \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{21}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{k}$$

2.2. Operaciones con vectores

2.2.1. Suma de vectores

$\text{sen}\theta = \frac{co}{h}$ $\text{cos}\theta = \frac{ca}{h}$ $\text{Tan}\theta = \frac{co}{ca}$

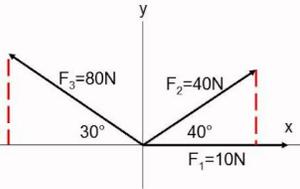
$h = \sqrt{co^2 + ca^2}$

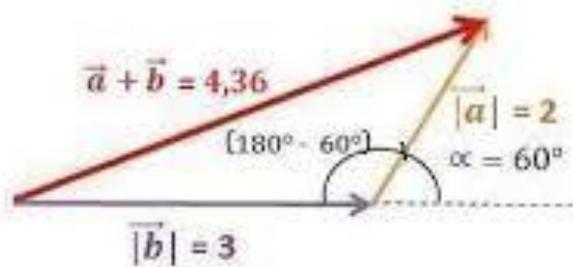


 $co = h\text{Sen}\theta$
 $ca = h\text{Cos}\theta$

$\Sigma F_x = \text{Sumatoria de furezas en } x$
 $\Sigma F_x = 10 + 40\text{Cos}(40^\circ) - 80\text{Cos}(30^\circ)$
 $\Sigma F_x = 10 + 30.64 - 69.28$
 $\Sigma F_x = -28.64\text{N}$

$\Sigma F_y = \text{Sumatoria de furezas en } y$
 $\Sigma F_y = 40\text{Sen}(40^\circ) + 80\text{Sen}(30^\circ)$
 $\Sigma F_y = 25.71 + 40$
 $\Sigma F_y = 65.71\text{N}$





$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}$$

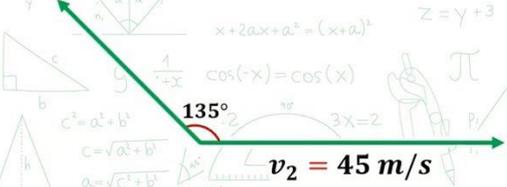
$$= \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{4 + 9 - 12 \cdot (-0,5)} = 4,36$$

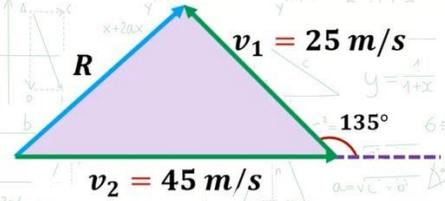
2.2..2. Método del triángulo rectángulo

Suma de vectores por el método del triángulo

$v_1 = 25 \text{ m/s}$



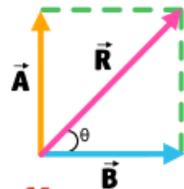
$v_2 = 45 \text{ m/s}$



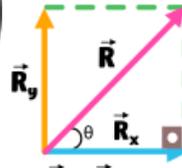
VITUAL

VIDEO 1

Suma de vectores - forma analítica



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$



$$R_y = R \sin \theta$$

$$R_x = R \cos \theta$$

Y +
Donde:

$$\frac{|R|}{\sin \alpha} = \frac{|A|}{\sin \theta} = \frac{|B|}{\sin \beta}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

Donde:

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2 \times A \times B \times \cos \theta$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \times A \times B \times \cos \theta}$$

ney.one

2.2.3. Método del polígono

Método del polígono

Los vectores se dibujan uno a continuación del otro, respetando su magnitud y dirección. El vector resultante es el que une el origen del primero con el extremo del último.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$$

$$\vec{B} + \vec{A} = \vec{R}$$

La suma de vectores es conmutativa

Método del polígono: suma de vectores

EJEMPLO: sumar los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

PASO 1
Colocamos los vectores uno a continuación del otro, unidos mediante cabeza y cola.

PASO 2
El vector resultante \vec{R} se traza uniendo la cola del primer vector con la cabeza del último vector.

2.2.4. Resta de vectores

Suma y resta de vectores

EJERCICIO RESUELTO
Dados los vectores:
 $\vec{u}(6, 2)$; $\vec{v}(3, 4)$
calcula:
 $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = (9, 6)$
 $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2)$

EJERCICIO PROPUESTO
Arrastra los puntos A y B para resolver:
Dados los siguientes vectores:
 $\vec{u}(-3, 2)$; $\vec{v}(4, 3)$
calcula analíticamente y geoméricamente:
 $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$

Autores: José María Arias Cabezas e Ildelfonso Maza Sáez. © Grupo Editorial Bruño, S. L.

$\vec{A} + \vec{B} = (5 + 3, 2 + 8)$

$\vec{A} + \vec{B} = (8, 10)$

$\vec{A} = (5, 2)$

$\vec{B} = (3, 8)$

2.2.5. Método del paralelogramo para vectores concurrentes

Paralelogramo

$|\vec{a}| = 2$
 $|\vec{b}| = 3$
 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4,36$
 $\alpha = 60^\circ$

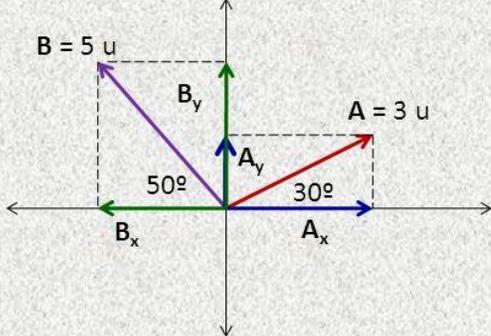
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |-\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |-\vec{b}| \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ)} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{4 + 9 + 12 \cdot (-0,5)} = 2,65$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ)} = \sqrt{4 + 9 - 12 \cdot (-0,5)} = 4,36$$

2.2.6. Método de componentes rectangulares

SUMA DE VECTORES POR COMPONENTES RECTANGULARES

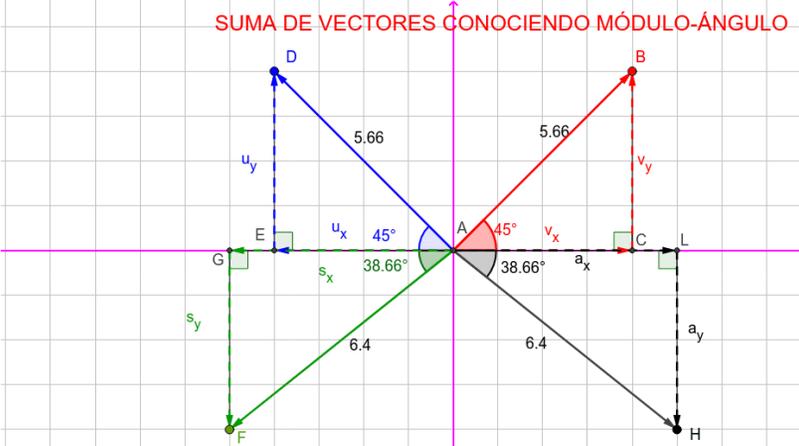


$A_x = A \cos 30^\circ = (3 \text{ u})(0.86) = 2.58 \text{ u}$
 $A_y = A \sin 30^\circ = (3 \text{ u})(0.5) = 1.5 \text{ u}$
 $B_x = -B \cos 50^\circ = (5 \text{ u})(0.64) = -3.21 \text{ u}$
 $B_y = B \sin 50^\circ = (5 \text{ u})(0.76) = 3.83 \text{ u}$

$\Sigma V_x = A_x + B_x$
 $\Sigma V_x = (2.58 \text{ u}) + (-3.21 \text{ u})$
 $\Sigma V_x = -0.63$
 $\Sigma V_y = A_y + B_y$
 $\Sigma V_y = (1.5 \text{ u}) + (3.83 \text{ u})$
 $\Sigma V_y = 5.33 \text{ u}$

$R^2 = (\Sigma V_x)^2 + (\Sigma V_y)^2$
 $R^2 = (-0.63)^2 + (5.33)^2$
 $R^2 = 0.39 + 28.4$
 $R^2 = 28.79$
 $R = 5.36$

SUMA DE VECTORES CONOCIENDO MÓDULO-ÁNGULO



$v_x = 5.66 \times \cos 45^\circ = 5.66 \times 0.71 = 4$
 $v_y = 5.66 \times \sin 45^\circ = 5.66 \times 0.71 = 4$
 $u_x = -5.66 \times \cos 45^\circ = -5.66 \times 0.71 = -4$
 $u_y = 5.66 \times \sin 45^\circ = 5.66 \times 1 = 5.66$
 $s_x = -6.4 \times \cos 38.66^\circ = -6.4 \times 0.78 = -5$
 $s_y = -6.4 \times \sin 38.66^\circ = -6.4 \times 0.62 = -4$
 $a_x = 6.4 \times \cos 38.66^\circ = 6.4 \times 0.78 = 5$
 $a_y = -6.4 \times \sin 38.66^\circ = -6.4 \times 0.62 = -4$

$\Sigma_x = R_x = v_x + (-u_x) + (-s_x) + a_x = 4 + (-4) + (-5) + 5 = 4 - 4 - 5 + 5 = 0$
 $\Sigma_y = R_y = v_y + u_y + (-s_y) + (-a_y) = 4 + 4 + (-4) + (-4) = 4 + 4 - 4 - 4 = 0$

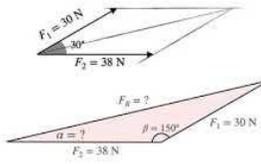
$v_x = 5.66 \times \cos 45^\circ = 5.66 \times 0.71 = 4$
 $v_y = 5.66 \times \sin 45^\circ = 5.66 \times 0.71 = 4$
 $u_x = -5.66 \times \cos 45^\circ = -5.66 \times 0.71 = -4$
 $u_y = 5.66 \times \sin 45^\circ = 5.66 \times 1 = 5.66$
 $s_x = -6.4 \times \cos 38.66^\circ = -6.4 \times 0.78 = -5$
 $s_y = -6.4 \times \sin 38.66^\circ = -6.4 \times 0.62 = -4$
 $a_x = 6.4 \times \cos 38.66^\circ = 6.4 \times 0.78 = 5$
 $a_y = -6.4 \times \sin 38.66^\circ = -6.4 \times 0.62 = -4$

63 / 63

2.2.7. Resultante de un sistema de vectores concurrentes

Para obtener la resultante de un sistema de dos vectores concurrentes por el método analítico aplicamos ley de cosenos y para la dirección la ley de los senos. Es importante hacer un análisis a detalle de la información con la que contamos.

Ejemplo: obtén la resultante del siguiente sistema de vectores por el método analítico.



$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta}$$

$$F_R = \sqrt{30^2 + 38^2 - 2 \times 30 \times 38 \times \cos 150}$$

$$F_R = \sqrt{900 + 1444 - 2 \times 30 \times 38 \times -0.866}$$

$$F_R = \sqrt{4318.48}$$

$$F_R = 65.715 \text{ N}$$

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_R}{\sin \beta} \therefore \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{F_1 \sin \beta}{F_R} \right)$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{30 \times 0.5}{65.715} \right)$$

$$\alpha = 13.19^\circ$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

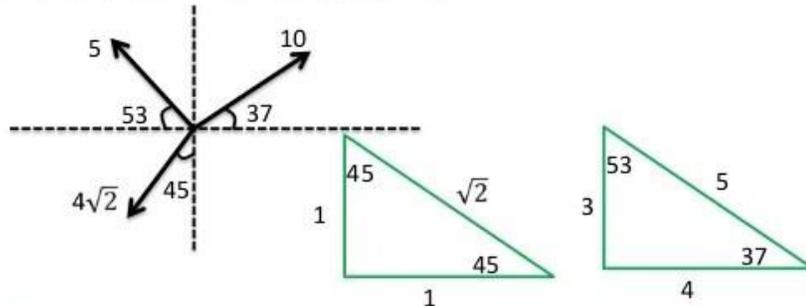
$$\vec{R} = +4 + 1 - 3$$

$$\vec{R} = +5 - 3$$

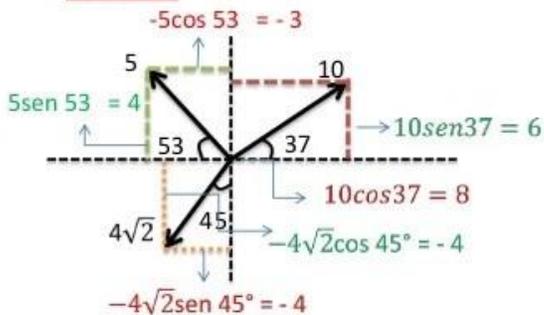
$$\vec{R} = +2 \dots (\text{apunta hacia arriba})$$

2.2.8. Método del polígono para un sistema de vectores concurrentes

5) El diagrama muestra tres fuerzas coplanares concurrentes, calcule el módulo de la fuerza resultante.



SOLUCION:



$$\Sigma_x = 8 - 3 - 4 \quad \Sigma_y = 6 - 4 + 4$$

$$\Sigma_x = 1 \quad \Sigma_y = 6$$

$$R = \sqrt{(\Sigma_x)^2 + (\Sigma_y)^2}$$

$$R = \sqrt{(1)^2 + (6)^2}$$

$$R = \sqrt{1 + 36}$$

$$R = \sqrt{37}$$

Calcular el módulo de la resultante de estos vectores cuando formen un ángulo de 90° .

RESOLUCIÓN

Sabemos que: $A + B = 28$
 $A - B = 4$

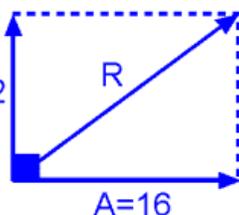
Resolviendo las ecuaciones tenemos:

$$A = 16 \text{ y } B = 12$$

Cuando los vectores forman un ángulo recto:

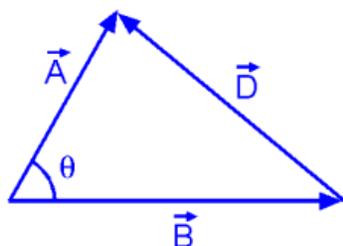
$$R = \sqrt{(16)^2 + (12)^2}$$

$$\Rightarrow R = 20$$



DIFERENCIA DE DOS VECTORES

La diferencia de dos vectores que tienen el mismo origen se consigue uniendo los extremos de los vectores. El vector diferencia D indica el vector minuyendo A .

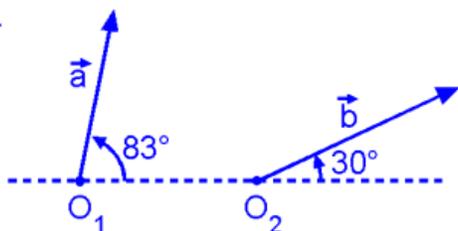


El módulo del vector diferencia se determina aplicando la ley de Cosenos:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2 A B \cos \theta}$$

EJEMPLO:

Sabiendo que: $|\vec{a}| = 5$ y $|\vec{b}| = 6$, calcular: $|\vec{a} - \vec{b}|$.



RESOLUCIÓN

Los vectores forman un ángulo de 53° .
 Aplicamos la ley de Cosenos: