Nombre del Alumno David Daniel vazquez Hernández

Nombre del tema la unidad

Parcial 2

Nombre de la Materia fisica

Nombre del profesor: juan José Ojeda trijillo

Nombre de la Licenciatura enfermería

Cuatrimestre 6

Métodos de integración

sustituciones algebraicas

En álgebra, la sustitución es un procedimiento utilizado para resolver determinados tipos de ecuaciones, reemplazando una variable por una expresión en función de otra variable, 1 lo que permite transformar la ecuación inicial en un tipo cuya resolución se conoce.

Método de sustitución El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la derivada de la función compuesta. Para cambiar de variable identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable t , de modo que se obtenga una integral más sencilla.

Integración por partes

Si consideramos la regla para derivar el producto de dos funciones:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

podemos despejar el primer término de la derecha de la igualdad y escribir:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d(u \cdot v)}{dx} - v \cdot \frac{du}{dx}$$

Usando el hecho de que la integración es el proceso inverso de la derivación, al integrar ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Esta es la regla de integración por partes. La recomendación para no confundirte con las definiciones que hagas para el cálculo de la integral por partes es que elabores una tabla con los valores de u, du, dv y v. uando tengas la tabla completa, sigue sustituir estos valores en la regla de integración por partes, y después de calcular la integral, simplificar el resultado hasta donde sea posible.

Ejemplo

Calcula la integral indefinida:

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

Dado que no tenemos una regla de integración inmediata para esta función, vamos a utilizar la regla de integración por partes. Empezamos definiendo:

$$\begin{array}{rcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin x \, dx & \Rightarrow & v = -\cos x \end{array}$$

Ahora podemos sustituir en la regla de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x \, dx &= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Y hemos terminado.

Integración por sustitución trigonométrica

Aprenderás a calcular antiderivadas de cierto tipo de funciones aplicando la técnica de sustitución trigonométrica.

En esta sección vamos a estudiar el primer método para integrar funciones que no son inmediatamente integrables a partir de la tabla de integrales que tenemos. Las siguientes sustituciones sirven para simplificar el integrando a una forma inmediatamente integrable:

Para:	Sustituir:	para obtener:		
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \dfrac{a}{b} \sin z$	$a\sqrt{1 - \sin^2 z}$	$=$	$a \cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \dfrac{a}{b} \tan z$	$a\sqrt{1 + \tan^2 z}$	$=$	$a \sec z$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \dfrac{a}{b} \sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1}$	$=$	$a \tan z$

Debes recordar siempre sustituir dx a partir del cálculo correspondiente para que la diferencial quede en términos de dz.

Ejemplo

Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx$$

Empezamos observando que $a^2 = 9$, lo cual implica que $a = 3$, y $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$. Entonces hacemos: $x = (a/b)\,\sin z$:

$$x = \frac{3}{2}\,\sin z \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{3}{2}\,\cos z\,dz$$

Sustituyendo estos valores en la integral obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{9-4\,\left(\frac{3}{2}\,\sin z\right)^2}}{\frac{3}{2}\,\sin z}\,\left(\frac{3}{2}\,\cos z\,dz\right)$$

Ahora podemos simplificar dentro del signo de raíz:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\,\left(\frac{3}{2}\,\sin z\right)^2}}{\frac{3}{2}\,\sin z}\,\left(\frac{3}{2}\,\cos z\,dz\right) &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 z}}{\sin z}\,\cos z\,dz \\
&= \int \frac{3\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}\,\cos z\,dz
\end{aligned}$$

Pero $1-\sin^2 z = \cos^2 z$,luego,

$$\begin{aligned}
3\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}\,\cos z\,dz &= 3\int \frac{\cos z}{\sin z}\,\cos z\,dz \\
&= 3\int \frac{\cos^2 z}{\sin z}\,dz \\
&= 3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z}\,dz \\
&= 3\int \left(\frac{1}{\sin z} - \sin z\right)\,dz
\end{aligned}$$

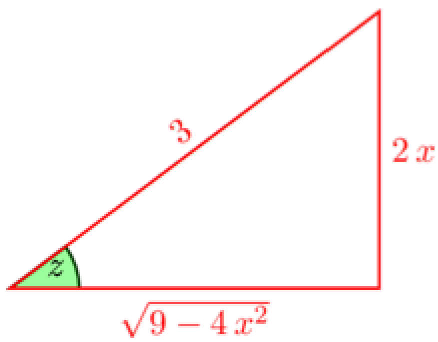
Ahora podemos integrar:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx &= 3\int \frac{1}{\sin z}\,dz - 3\int \sin z\,dz\\
&= 3\int \csc\, z\,dz + 3\,\cos z\\
&= 3\,\ln|\csc\, z - \cot\, z| + 3\,\cos z + C
\end{aligned}
$$

Hasta aquí hemos obtenido un resultado parcial. Recuerda que inicialmente la integral estaba dada en términos de x, no de z. Por lo que nosotros debemos dar el resultado en términos de x. Para lograr eso, vamos a representar geométricamente la sustitución inicial:

$$
x = \frac{3}{2}\,\sin z \qquad \Rightarrow \qquad \sin z = \frac{2\,x}{3} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}
$$

En el triángulo rectángulo tenemos (para calcular el cateto adyancente al ángulo z hemos utilizado el teorema de Pitágoras):



Por la forma como se definen las funciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo tenemos:

$$
\csc\, z = \frac{3}{2\,x}, \qquad \cos z = \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{3} \qquad \text{y} \qquad \cot\, z = \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}
$$

Entonces, podemos reescribir la solución como:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx &= 3\,\ln|\csc\, z - \cot\, z| + 3\,\cos z + C\\
&= 3\,\ln\left|\frac{3}{2\,x} - \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}\right| + 3\left(\frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{3}\right) + C\\
&= 3\,\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}\right| + \sqrt{9-4\,x^2} + C
\end{aligned}
$$

Observa que hemos utilizado un artificio: como la integral no se puede integrar de manera inmediata debido a la forma que tiene, sabiendo que puede transformarse a una forma inmediatamente integrable usando una sustitución trigonométrica, vamos a utilizar la transformación sugerida en la tabla dada al principio de esta lección. Después de hacer la sustitución obtenemos una integral en términos de funciones trigonométricas que se puede integrar usando la variable z.

Para regresar este resultado a términos de x, utilizamos la sustitución que tomamos de la tabla para representarla geométricamente usando un triángulo rectángulo y las definiciones de las funciones trigonométricas en él.

Ejemplo

La antiderivada

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9\,x^2 - 4}}$$

se puede resolver a través de la regla de integración (iv). Utiliza sustitución trigonométrica para calcularla y después la regla (iv) para verificar el resultado.

De acuerdo a la tabla de sustituciones para este tipo de integrales, haremos:

$$x = \frac{2}{3}\sec\,z \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{2}{3}\sec\,z\tan z\,dz$$

Ahora sustituimos estos valores en la integral para transformarla:

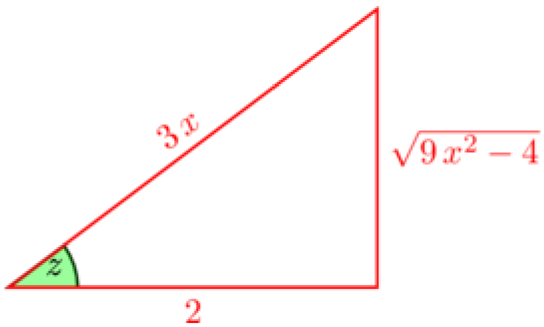
$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9\,x^2 - 4}} &= \int \frac{\frac{2}{3}\sec\,z\,\left(\frac{2}{3}\sec\,z\tan z\,dz\right)}{\sqrt{9\,\left(\frac{2}{3}\sec\,z\right)^2 - 4}} \\
&= \frac{4}{9}\int \frac{\sec^2\,z\tan z\,dz}{\sqrt{4\,\sec^2\,z - 4}} \\
&= \frac{4}{9}\int \frac{\sec^2\,z\tan z\,dz}{2\,\sqrt{\sec^2\,z - 1}}
\end{aligned}$$

Pero, $\sqrt{\sec^2 z - 1} = \sqrt{\tan^2 z} = \tan z$, luego

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9\,x^2-4}} = \frac{2}{9}\int \frac{\sec^2 z\tan z\,dz}{\tan z} = \frac{2}{9}\int \sec^2 z\,dz = \frac{2}{9}\,\tan z + C$$

%na

Ahora vamos a reescribir el resultado en términos de x. El triángulo rectángulo que representa la sustitución que hicimos al principio del problema es el siguiente:



Entonces, de acuerdo a este triángulo, tenemos:

$$\tan z = \frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{2}$$

Y al sustituir este valor en el resultado de la integral obtenemos:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9\,x^2-4}} = \frac{2}{9}\,\frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{2} + C = \frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{9} + C$$

Ahora vamos a verificar el resultado usando la regla (iv). Para este fin, definimos: $v = 9\,x^2 - 4$. Entonces, $dv = 18\,x\,dx$. Luego $x\,dx = \frac{dv}{18}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9\,x^2-4}} &= \int \frac{dv}{18\sqrt{v}} = \frac{1}{18}\int v^{-1/2}\,dv = \frac{1}{18}\cdot\frac{v^{1/2}}{1/2} + C\\
&= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{1}\,\left(9\,x^2-4\right)^{1/2} + C\\
&= \frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{9} + C
\end{aligned}$$

Y terminamos.

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

11/20/2016

2 Comments

Las fracciones parciales es un método de integración que permite resolver integrales de ciertas funciones racionales que no se pueden resolver por los otros métodos (formula directa, por partes, cambio de variable, etc.)
para poder comprender mejor el tema ahí que definir que es una fracción raciona; se le llama fracción racional del tipo:

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3}$$

cuyo numerador y denominador son polinomios; sin embargo, si el exponente de los términos del numerador es igual o mayor al del denominador, la fracción se transforma a división:

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}$$

Pero, en el caso de una fracción donde el numerador es el el que tiene el exponente menor y el denominador tiene el exponente mayor, la fracción puede transformarse en una suma de fracciones parciales por lo cual en denominador debe esta factorizado:

$$\frac{9}{x-3} + \frac{1}{x+1} = \frac{9(x+1) + x - 3}{(x-3)(x+1)} = \frac{9x + 9 + x - 3}{(x-3)(x+1)} = \frac{10x + 6}{(x-3)(x+1)}$$

El proceso inverso incluye el uso de fracciones parciales, que tiene como objetivo encontrar la solución de las constantes involucradas:

$$\frac{10x + 6}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Una definición mas exacta de el método de fracciones parciales seria:

Se dice que una función racional $\frac{P(X)}{Q(X)}$ es una fracción propia, si el grado del polinomio P(x) es menor que el grado del polinomio Q(x). En caso contrario, es decir, si el grado de P(x) es mayor o igual al de Q(x), la fracción se llama impropia. Toda fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio más una fracción propia.

Es decir,

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = (POLINOMIO) + \frac{N_1(X)}{Q(X)}$$

Existen 4 casos de fracciones parciales:

CASO 1: FACTORES LINEALES DISTINTOS.

En este caso a cada factor lineal de la forma ***ax + b*** del denominador le corresponde una constante, se aumentara en numero de constantes dependiendo de cantos factores se tenga en el denominador.

Nota: Todas las integrales que utilicen este caso su resultado sera el logaritmo natural de cada uno de los factores.

$$\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

CASO 2: FACTORES LINEALES REPETIDOS

El numero de factores será igual al grado (exponente) del polinomio; es decir; a cada factor lineal ***ax+b*** que figure ***n*** veces en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma :

$$\frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} \cdots\cdots \frac{N}{(ax+b)^n}$$

Nota: Una de las integrales correspondientes a este caso da como resultado un logaritmo natural, mientras que las restantes se resuelven mediante un cambio de variables.

$$\frac{z^2}{(z-1)^3} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(Z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3}$$

CASO 3:FACTORES CUADRÁTICOS DISTINTOS

En este caso a cada factor le corresponderán dos constantes, de las cuales una de estas será el coeficiente del termino lineal. El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno de estos se repite.
A todo factor no repetido de segundo grado, como

$$x^2 + px + q$$

le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{X^2 + px + q}$$

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^2 - x + 6} = \frac{4x^2 - 8x + 1}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx + C}{(x^2 - 2x + 3)}$$

CASO 4: FACTORES CUADRÁTICOS REPETIDOS

El denominador contiene factores de segundo grado y algunos de estos se repiten.
A todo factor de segundo grado repetido ***n*** veces, como

$$(x^2 + px + q)^n$$

Corresponderá la suma de ***n*** fracciones parciales, de la forma

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^n} + \cdots + \frac{Lx + M}{(x^2 + px + q)^n}$$