

**Nombre del alumno: Jose Antonio
Borrallés Morales**

**Nombre del profesor: Juan Jose
Ojeda Trujillo**

Nombre del trabajo: Apuntes

Materia: Geometría y trigonometría

Grado: 2 semestre

Grupo: BEN01EMM0121-A

Introducción a la Geometría.

Antecedentes históricos.

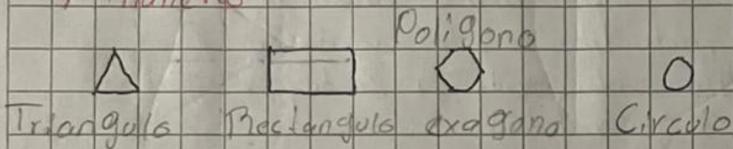
Aprender geometría aporta elementos formales que nos permiten desarrollar nuestras capacidades de validación y deducción, facilitando así la adquisición de conocimientos.

Se considera que la geometría es la parte de las matemáticas más intuitiva y relacionada con la realidad que ha evolucionado en grados crecientes de abstracción y generalidad.

Como hemos mencionado en el relato anterior, la geometría nació de la necesidad de medir formas y longitudes de terrenos, es por eso que el vocablo geometría proviene de la palabra griega geo (tierra, métron (medida) y la terminación ia (lo relativo a). Por lo que la palabra geometría se refiere a lo relativo a medir la tierra.

Por otra parte, es conveniente redefinir el concepto de geometría a causa de los cambios actuales que han surgido del rápido desarrollo de nuevas tecnologías. No solo debe considerarse a la geometría como parte de las matemáticas que estudia las figuras geométricas así como sus formas, medidas y propiedades, sino también como una herramienta para el entendimiento de la descripción del medio ambiente en el que vivimos así como para interactuar con el mismo.

Como la geometría es una ciencia abstracta y muy amplia, ya que comprende diversos temas que están relacionados entre sí, su estudio se divide de la siguiente manera. Geometría Plana o euclidiana es la rama de las matemáticas que estudia las formas y propiedades de las figuras geométricas que se encuentran en un mismo plano. Esta geometría entonces se refiere a figuras con 2 dimensiones: Longitud y ancho.

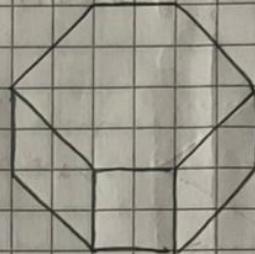


Geometría del espacio.

Es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y formas de cuerpos geométricos cuyos puntos no están en el plano. Esta geometría entonces se refiere a cuerpos con tres dimensiones: *Longitud, anchura y altura*.



Cubo



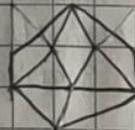
Prisma hexagonal



cilindro



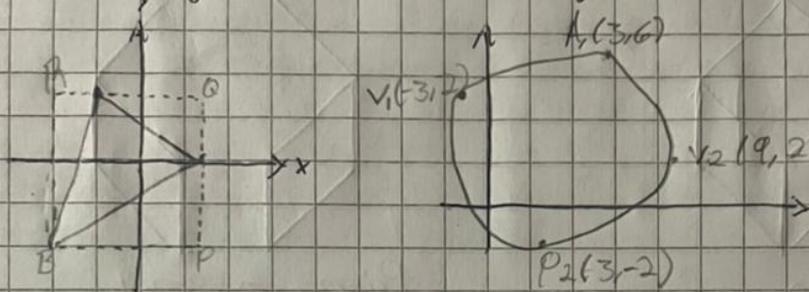
Pirámide



Icosaedro

Geometría analítica

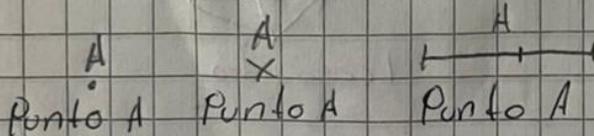
Es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras geométricas en un plano cartesiano, expresando estas propiedades mediante ecuaciones. Esta disciplina surge de combinar geometría con el álgebra.



Conceptos básicos de la geometría plana

Concepto de punto.

La idea de punto está caracterizada por la huella que deja la punta afilada de un lápiz al ser presionado sobre una hoja de papel, o por la marca que resulta de presionar la punta afilada de un clavo sobre una hoja de papel. La notación de punto se efectúa mediante una letra mayúscula y se puede representar gráficamente de la siguiente manera:



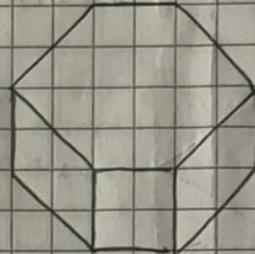
Punto A Punto A Punto A

Geometría del espacio.

Es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y formas de cuerpos geométricos cuyos puntos no están en el plano. Esta geometría entonces se refiere a cuerpos con tres dimensiones: *Longitud, anchura y altura*.



Cubo



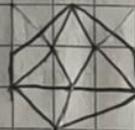
Prisma hexagonal



Pirámide



cilindro



Icosaedro

Concepto de línea.

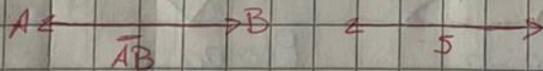
Una línea es un sucesoión infinita de puntos.
Consta de una sola dimensión, la longitud.
Las líneas se clasifican en rectas, curvas y mixtas.

Línea recta.

Es aquella línea que tiene todos sus puntos en una misma dirección y se prolonga indefinidamente en ambos sentidos. La idea de recta puede ser dada por medio de una línea que se traza con la punta afilada de un lápiz al hacerla ~~trazar~~ ~~trazar~~ con una escuadra o una regla apoyada en una hoja de papel.
La notación de recta se efectúa mediante:

1. Dos letras mayúsculas y arriba de estas un segmento de recta \overline{AB}

2. Una letra minúscula



Línea curva.

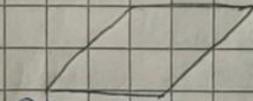
Es aquella línea en la que los puntos cambian continuamente de dirección por lo que no posee algún tramo recto.

Línea mixta.

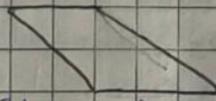
Es aquella línea formada por uno o varios tramos rectos u otros tramos curvos.

Concepto de Plano.

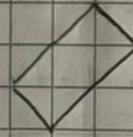
Un plano es aquella figura geométrica formada por dos dimensiones la longitud y su anchura la idea de plano o superficie viene dada por una pared de tu recámara, por una cara de una hoja de tu cuaderno o por la superficie de la mesa de trabajo. Normalmente la notación de un plano se realiza empleando letras minúsculas y se representa gráficamente mediante un paralelogramo.



Plano a



Plano b



Plano c

Proposiciones Geométricas.

Una Proposición es el enunciado de un hecho, como una ley o un Principio que puede ser verdadera o falso pero nunca ambas cosas a la vez.

En la obra de Euclides, Elementos se plantea un conjunto de Principios Primarios, clasificados en definiciones, nociones comunes y postulados, considerados como verdades in cuestionables que permitieron deducir otras conclusiones de mayor complejidad que Euclides denominó Proposiciones que ahora son conocidas como teoremas.

La definición.

Una definición es una Proposición que implica la descripción clara y precisa de las características de una cosa.

Ejemplos

La circunferencia es un conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

El triángulo es una figura cerrada formada por 3 rectas que se cortan dos a dos.

El axioma.

Una axioma es una Proposición que por su evidencia se admite sin demostración

Ejemplo.

Los siguiente axioma seran utilizados en algunas demostraciones que realizaremos más adelante.

Axioma de identidad.

Cualquier cantidad u objeto es igual asi misma

Axioma de sustitución

En toda expresión, una cantidad u objeto cualquiera pueda remplazarse por su igual

Axioma de transitividad.

Das cantidades iguales a una tercera son iguales entre si

Axioma de adición

Si a cantidades iguales les sumamos o restamos cantidades iguales los resultados son iguales

$$20 + 10 - 10 = 20$$

Axioma del todo e de Partición

El todo es igual a la suma de sus partes y mayor que cualquiera de ellas

Postulado.

Un Postulado es una Proposición no tan evidente como el axioma Pero que tambien se admite sin demostración.

Ejemplos

- A) Dados dos puntos cualquiera existe una recta que los contiene
- B) Un segmento rectilineo puede ser siempre alargado
- C) Existe una sola circunferencia con un centro y un radio dado
- D) Todos los angulos rectos son iguales.

El teorema y el corolario.

El teorema es una proposición que requiere ser demostrada para que se acepte su validez.

Su demostración se apoya en los axiomas y postulados que, por convención han sido aceptados como verdaderos.

Ejemplos.

A) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

B) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .

C) Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

D) Dos segmentos que se cortan el uno al otro producen ángulos opuestos iguales.

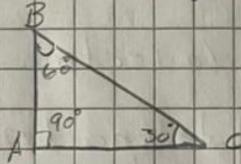
El Corolario.

El corolario es una consecuencia inmediata de un teorema y por lo tanto su demostración requiere de poco o de ningún razonamiento nuevo.

Ejemplos:

a) Teorema. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .

De este teorema se obtiene en consecuencia el corolario: La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.



$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 90$$

$$+ A = 180$$

La recta.

Definición nomenclatura y notación.

La recta es un sucesión infinita de puntos los cuales están ubicados en una misma dirección; en ambos sentidos

Postulados de la recta.

Postulado.

Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

Postulado. Dos rectas se intersecan en uno y solo un punto.

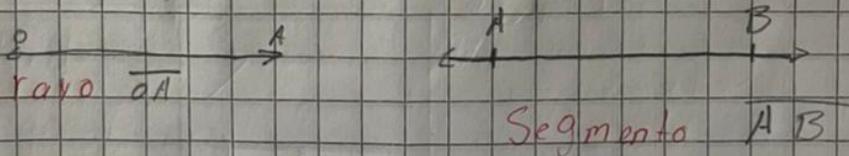
Conceptos derivados de la recta

Rayo o semi recta.

Un rayo es la parte de una línea recta que comienza en un punto determinado y se extiende en forma indefinida en un sentido; También se le denomina semi recta

Segmento rectilíneo.

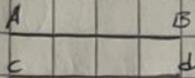
Es la porción o sección de una línea recta comprendida entre dos puntos cualesquiera de esta



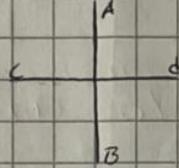
Posición de dos rectas en un Plano.

La posición relativa de dos rectas trazadas en un mismo plano, es decir dos rectas coplanarias puede ocurrir de tres maneras: Que sean Paralelas, Perpendiculares u oblicuas

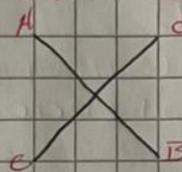
Paralelas



Perpendiculares



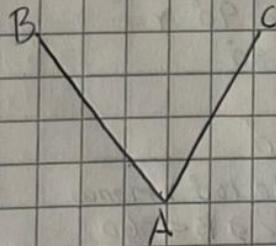
Oblicuas



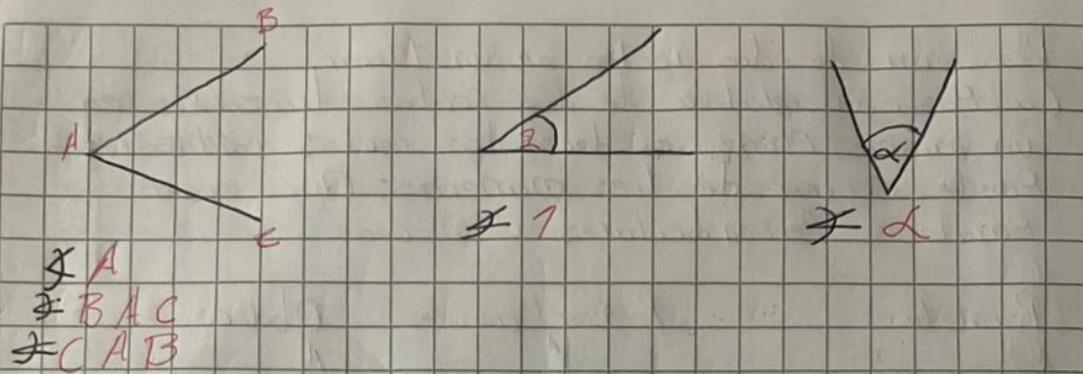
Ángulos

Definición de ángulo y su notación

Un ángulo es la abertura formada por dos rayos que tienen un origen común al cual se le llama vértice



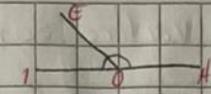
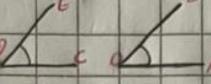
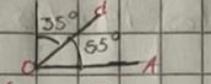
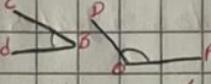
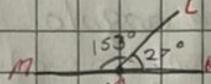
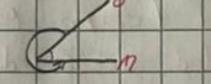
Hay diversas maneras de denotar un ángulo (En todas ellas se antepone el símbolo \angle al nombre)



Clasificación de los ángulos

Clasificación de los ángulos por la medida de su abertura

Nombre	Figura	Medida
Agudo		Mide menos de 90° $\angle A < 90^\circ$
Recto		Mide 90° $\angle B = 90^\circ$
Obtuso		Mide más de 90° y menos de 180°
Llano		Mide 180° $\angle COD = 180^\circ$
Entrante		Mide más de 180° y menos de 360° $180^\circ < \angle B < 360^\circ$
Perigonal		Es el giro completo de un rayo al rededor del punto donde comienza $\angle ABC = 360^\circ$
Consecutivos		<ul style="list-style-type: none"> Tienen un lado común o B situado entre los dos no comunes Verice o es común

Adyacentes		$\angle GOA$ y $\angle LOE$ son adyacentes
Opuestos por el vertice		$\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vertice
Complementarios		$\angle AOB + \angle CDE = 90^\circ$
		$\angle AOB$ es el complemento de $\angle BOC$
Suplementarios		$\angle ABC + \angle DOF = 180^\circ$
		$\angle Mol$ es el suplemento de $\angle Lok$
Conjugados		$\angle Mol$ y el angulo enfrente $\angle Com$ son conjugados

Teoremas sobre angulos

A continuacion se presentan algunos teoremas basicos relativos a angulos. Varios de estos teoremas seran utilizados para demostrar otras propiedades de figuras geometricas.

1. Si dos rectas se cortan y forman un angulo recto entonces forman 4 angulos rectos
2. Si dos angulos son iguales y suplementarios entonces cada uno de ellos es recto
3. Si dos angulos son iguales entonces sus angulos conjugados son iguales

4. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
5. Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos que no les son adyacentes.
6. Los suplementos de ángulos iguales son iguales.
7. Los complementos de ángulos iguales son iguales.

Sistemas de medición de ángulo

La tierra completa una rotación sobre su eje cada 24 h. El sistema usado para medir el tiempo procede de los babilonios, en el cual cada unidad se subdivide en 60 partes iguales.

Este sistema es también uno de los más utilizados para medir ángulos. Aunque es sistema para medir el tiempo y los ángulos es el mismo esto es el sexagesimal, los símbolos que representan sus unidades son diferentes.

Tiempo		Grados			
Hora	Minutos	Seg	Minutos	Segundos	Grados
HR	Min	S	'	"	°

El problema que ahora nos ocupa es la medición de la abertura de los ángulos. Los sistemas de mayor utilidad son sexagesimal mencionado anteriormente y el sílico. En el sistema sexagesimal se divide a la circunferencia en 360 partes iguales y se toma como ángulo unidad al grado que es la $\frac{1}{360}$ parte de la circunferencia.

Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales denominada minutos y cada minuto a su vez se divide en 60 partes iguales denominadas segundos.

$$1^{\circ} = 60' = 3600''$$

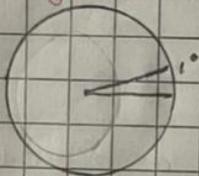
En el sistema sílico el ángulo unidad es el radian (Rad) que es el ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados abarcan un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Por lo visto anteriormente y a partir de la comparación entre ambos sistemas de medida se puede establecer que

Medición Física de ángulo.

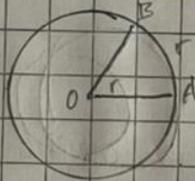
Una de las formas más sencillas de medir ángulos es mediante un transportador. Este instrumento consiste en un semi círculo graduado y dividido en 180° partes iguales.



Sistema Sexagesimal



Sistema Cíclico



1 vuelta de 360°

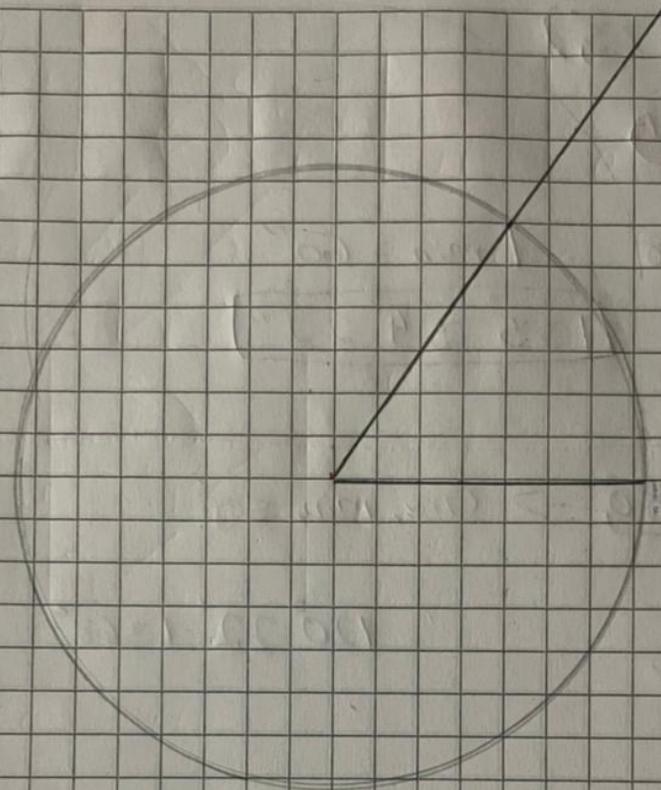
$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ vuelta}$$

$$\frac{1}{2} \text{ vuelta} = 180^\circ$$

1 vuelta = 2π rad

$$1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} \text{ de vuelta}$$

$$\frac{1}{2} \text{ vuelta} = \pi \text{ rad}$$



Formas de expresar la medida de un ángulo en el sistema sexagesimal la medida de un ángulo se puede expresar de forma incompleja, esto es indicando su amplitud solo con una unidad (Por ejemplo) 135.573° y en forma compleja cuando indicamos su medida en grados, minutos y segundos, Por ejemplo $135^\circ 34' 22''$. Cuando queremos transformar una medida expresada de una forma a la otra se sigue el siguiente procedimiento.

(135.573)

$1^\circ = 60'$
 $0.573^\circ \times$

$x = 34.38$ $1 \text{ min} = 60''$

$1' = 60''$ $135.57322''$

$0.38 \times$
 $x = 22.8$

120.380 → Gra, min, seg

$1^\circ = 60'$
 $0.380 \times$

$120^\circ 22' 1368''$

$x = 22.8$

$1' = 60''$
 22.8

$350.18'$

$350^\circ 10' 648''$

$1' = 60''$
 $.18$
 $\times 10.8$

$1' = 60''$
 10.8