

**Nombre del alumno: GABRIELA  
MONSERRATH HERRERA CRUZ**

**Nombre del profesor: ANGEL DE JESUS  
PEREZ DOMINGUEZ**

**Licenciatura: ARQUITECTURA**

**Materia: ANALISIS DE ESTRUCTURA**

PASIÓN POR EDUCAR

**Nombre del trabajo: APLICACIÓN A  
VIGAS, MARCOS.**

## Aplicación a vigas, marcos, armaduras y arcos en edificaciones.

Esta ecuación permite calcular la deflexión buscada  $\Delta$  v como la suma de los productos de las fuerzas  $\mu$ , producidas por la carga virtual unitaria, y las deformaciones axiales  $d_l$  producidas por las fuerzas externas  $P$ . La carga virtual puede sustituirse por un momento virtual, y entonces se obtendrán las rotaciones en cualquier punto del cuerpo en que se coloque el momento. La ecuación correspondiente queda en la forma

Donde  $\theta$  representa la rotación en un punto cualquiera  $D$

el método de los nudos o el de las secciones, sin que sea necesario asignarle una unidad específica a la carga virtual, como kilogramos o toneladas. Y las deformaciones  $d_l$  en cada miembro se pueden calcular con la ecuación.

Recuérdese que en esta ecuación el término  $M$  representa la ecuación del momento flexionante producido por las cargas reales  $P$ , mientras que el término  $m$ , la ecuación del momento flexionante producido por la carga virtual unitaria colocada en el punto en que se desea conocer la deflexión  $\Delta$ , en la dirección de la deflexión buscada.

## MÉTODO DE CASTIGLIANO

El primer teorema, establece lo siguiente:

“La primera derivada parcial de la energía total de deformación de una estructura con respecto a un desplazamiento de los puntos en los que actúan las acciones exteriores es igual a la componente de la acción que sobre dicho punto actúan en dirección de este desplazamiento” El segundo teorema, que es el más usado, establece lo siguiente:

“La primera derivada parcial de la energía total de deformación de una estructura con respecto a una de las acciones aplicadas es igual al desplazamiento a lo largo de esa sección” El desplazamiento a que se hace referencia puede ser lineal o angular, es decir, puede ser una deflexión o una rotación. Si se denomina  $\Delta$  a este desplazamiento,  $P$  a la acción aplicada, que puede ser una fuerza o un momento, y  $U_i$  a la energía de deformación o trabajo interno, el segundo teorema de Castiglione puede escribirse.

También pueden calcularse rotaciones, en vez de deflexiones. Para esto, se deriva respecto a un momento aplicado en el punto en que se desea calcular la rotación; este momento puede ser real o ficticio, al final se le asigna un valor de cero. El teorema de Castiglione puede usarse también para calcular las deflexiones en armaduras. Lo obtención de las ecuaciones correspondientes es similar a la presentada para el caso de vigas. Dichas ecuaciones quedan en la forma. En las cuales  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son las deflexiones en los puntos de aplicación de las cargas  $P_1$  y  $P_2$ ,  $S$  son las fuerzas en las barras de la armadura producidas por las cargas aplicadas,  $L$  es la longitud de cada barra,  $A$  es su área transversal y  $E$  su módulo de elasticidad.

Ejemplo 2.4.1. Cálculo de la deflexión y la rotación en el extremo de una viga con dos apoyos y un voladizo aplicando el teorema de Castigliano. La primera integral sobre el miembro del lado derecho es el momento de inercia  $I_{xc}$  con respecto al eje  $X_c$ ; la segunda integral es cero, ya que el eje  $X_c$  pasa a través del centroide; y la tercera integral es el área  $A$  de la figura. Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce.

En las cuales  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son las deflexiones en los puntos de aplicación de las cargas  $P_1$  y

P2, S

son las fuerzas en las barras de la armadura producidas por las cargas aplicadas,  $L$  es la longitud de cada barra,  $A$  es su área transversal y  $E$  su módulo de elasticidad. Ejemplo 2.4.1. Cálculo de la deflexión y la rotación en el extremo de una viga con dos apoyos y un voladizo aplicando el teorema de Castigliano. La primera integral sobre el miembro del lado derecho es el momento de inercia  $I_{xc}$  con respecto al eje  $X_c$ ; la segunda integral es cero, ya que el eje  $X_c$  pasa a través del centroide; y la tercera integral es el área  $A$  de la figura. Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a: El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje alojado en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes. Momentos polares de inercia. Los momentos de inercia considerados en las secciones anteriores se calculan con respecto a ejes alojados en el plano del área misma, tales como los ejes  $x$  y  $y$  en la Fig. 4.1. Consideremos ahora un eje perpendicular al plano del área y que corta al plano en el origen  $O$ . El momento de inercia con respecto a este eje se llama momento polar de inercia  $I_p$ ; y se define como la integral

El cálculo de momentos polares de inercia con respecto a diversos puntos se facilita enormemente mediante el teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia. Podemos deducir este teorema refiriéndose nuevamente a la Fig. 4.4. Denotemos los momentos polares de inercia respecto al origen  $O$  y al centroide  $C$  por  $I_{po}$  e  $I_{pc}$ , respectivamente; entonces podemos escribir las siguientes ecuaciones

El cálculo de momentos polares de inercia con respecto a diversos puntos se facilita enormemente mediante el teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia. Podemos deducir este teorema refiriéndose nuevamente a Denotemos los momentos polares de inercia respecto al origen  $O$  y al centroide  $C$  por  $I_{po}$  e  $I_{pc}$ , respectivamente; entonces podemos escribir las siguientes ecuaciones: El momento polar de inercia con respecto a cualquier punto  $O$  en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al centroide  $C$  más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los puntos  $O$  y  $C$ .

## PRODUCTOS DE INERCIA Y ROTACIÓN DE EJES

El producto de inercia de un área plana es una propiedad que se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares alojados en el plano del área.

El producto de inercia de un área plana es una propiedad que se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares alojados en el plano del área. Luego, refirámonos nuevamente al área  $A$  mostrada definamos el producto de inercia con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  y como sigue: Los productos de inercia de un área con respecto a conjuntos de ejes paralelos se relacionan mediante un teorema de ejes paralelos análogos a los teoremas correspondientes para momentos de inercia y para momentos polares de inercia.

## ROTACIÓN DE EJES.

Los momentos de inercia de un área plana dependen de la posición de los ejes de referencia. Además, para un origen dado, los momentos y productos de inercia varían según se giran los ejes respecto al origen. Consideremos el área plana mostrada y supongamos que los ejes  $x$  y  $y$  son un par de ejes de referencia localizados arbitrariamente. Los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  son:

Luego, las dos ecuaciones anteriores proporcionan el momento de inercia  $I_{x_1}$  y el producto de inercia  $I_{x_1y_1}$  con respecto a los ejes girados en términos de los momentos y el producto de inercia para los ejes originales. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia.