Ecuaciones Diferenciales Aplicadas al Área de Ciencias de la Salud

BIOMATEMÁTICAS

Dr. Jose Miguel Ricaldi Culébro
Yannick Harper Narcia

las matemáticas aportan herramientas y modelos matemáticos de ecuaciones diferenciales como apoyo a estudios específicos de investigación en el área de Ciencias de la Salud.

Entre las primeras disciplinas encontramos el álgebra, la geometría y la trigonometría. Los griegos veían las matemáticas como una ciencia educativa, pues contemplaban definiciones, axiomas claramente formulados, y a partir del razonamiento lógico y prueba precisa, elaboraron una teoría de la geometría que demostró para todos los tiempos, el poder del pensamiento abstracto y condujo al hombre a descubrir que a través de las matemáticas se puede entender la naturaleza.

Después de casi dos mil años, en el siglo XVII, aparece lo que hoy conocemos como matemática y ciencia moderna. Fue ésta la época de las grandes academias, donde los matemáticos eran físicos, los físicos eran filósofos y los filósofos eran matemáticos. La geometría analítica comienza con Fermat (1629) y Descartes (1637), siendo este último el primero en aplicar sistemáticamente el álgebra al estudio de la geometría. Cincuenta años más tarde, Newton y Leibniz desarrollan el cálculo diferencial e integral, que consiste en calcular la pendiente de la recta tangente a una curva y determinar el área limitada por una curva, respectivamente. A ellos se les conoce como los fundadores del cálculo, por la manera en cómo relacionaron ambos problemas; tales relaciones se encuentran enunciadas en el resultado más importante del cálculo, denominado: Teorema Fundamental del Cálculo. Éste fue el comienzo del análisis y dio ímpetu a las matemáticas y a la ciencia moderna vigente en la actualidad. De esta manera, el mayor número de aplicaciones de las matemáticas a la ciencia se concentran en el cálculo, en particular dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales.

MODELOS MATEMÁTICOS EN CIENCIAS DE LA SALUD

A ciencia cierta, no se sabe quién descubrió las ecuaciones diferenciales, ya que la historia de las matemáticas es tan grande como el origen del universo, del cual tampoco sabemos quién es su creador. Una ecuación diferencial es una expresión que involucra derivadas de una función desconocida de una o varias variables.

De las ecuaciones diferenciales, encontramos dos tipos:

(a) Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama Ecuación diferencial ordinaria.

(b) Si la función desconocida depende de más de una variable, la ecuación se llama Ecuación diferencial parcial.

También las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse por su orden y por su grado. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación, y el grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que esté elevada la derivada que da el orden de la ecuación diferencial.

MODELO DE CRECIMIENTO BIOLÓGICO.

Un problema fundamental en biología es el crecimiento, sea éste el crecimiento de una célula, un órgano, un ser humano, una planta o una población. La ecuación diferencial (1) nos dice que el crecimiento ocurre si > 0, y por otro lado el decaimiento (o encogimiento) ocurre si < 0. Un defecto obvio de la ecuación (1) y de su solución es que si > 0 y el tiempo transcurre, el crecimiento es ilimitado. Esto es una contradicción con la realidad, puesto que, después de transcurrir un cierto tiempo, sabemos que la célula o individuo deja de crecer, y obtiene un tamaño máximo.

MODELO DE PROBLEMA EPIDEMIOLÓGICO.

Un problema importante de biología y medicina trata de la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa; esto es, una enfermedad que puede transmitirse de un individuo a otros. La ciencia que estudia este problema se llama epidemiología, y si un porcentaje grande no común de una población adquiere la enfermedad, decimos que hay una epidemia. Un modelo matemático sencillo para la propagación de una enfermedad es:

$$\frac{dP_i}{dt} = kP_i(P - P_i) \quad , \quad P_i(t_0) = P_0 \qquad (4)$$

Donde *Pi* es el número de individuos infectados en el tiempo *t*, *P0* el número de individuos infectados en el tiempo *t0* y *P* es el número total de la población. La solución a la ecuación (4) se obtiene por separación de variables, dando como solución:

$$P_i = \frac{P}{1 + \left(\frac{P}{P_0} - 1\right) e^{-kP(t-t_0)}} \qquad (5)$$

Así, el modelo formado por (4) y (5) describe la propagación de una enfermedad en una población grande pero finita. El problema de epidemias donde se toma en cuenta la cuarentena es más complicado, ya que se considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual implica aplicar teoría de álgebra lineal.

MODELO DE ABSORCIÓN DE DROGAS EN ÓRGANOS O CÉLULAS. Un problema importante en el campo de la medicina consiste en determinar la absorción de químicos (tales como drogas) por células u órganos. Supongamos que un líquido transporta una droga dentro de un órgano de volumen *V* cm3 a una tasa de *a* cm3/seg y sale a una tasa de *b*cm3/seg. La concentración de la droga en el líquido que entra es *c* cm3/seg. La ecuación diferencial que modela tal problema es:

$$V\frac{dx}{dt} = ac - bx \qquad (6)$$

cuya solución es:

$$x = \frac{ac}{b} + \left(x_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-(t-t_0)/V} \qquad (7)$$

donde se presentan los siguientes casos:

Caso 1: *a = b*. En este caso, la tasa a la cual entra la droga es igual a la tasa a la cual sale, y (7) se convierte en:

$$x = c + \left(x_0 - c\right)e^{-b(t-t_0)/V}$$

Caso 2: *a = b* y *x0 = 0*. En este caso, las tasas de entrada y de salida son iguales, y la concentración inicial de la droga en el órgano es 0; entonces (7) resulta:

$$x = c\left(1 - e^{-b(t-t_0)/V}\right)$$