



**Nombre de alumnos: Emma Yareni  
Montejo García.**

**Nombre del profesor: Rosario Lujano  
Gómez.**

**Nombre del trabajo: límites y  
funciones.**

**Materia: calculo.**

**Grado: 4to semestre.**

**Grupo: "U"**

# Límites y funciones

El límite de una función es un concepto fundamental del análisis matemático aplicado a las funciones. En particular, el concepto aplica en análisis real al estudio de límites, continuidad y derivabilidad de las funciones reales. Intuitivamente, el hecho de que una función  $f$  alcance un límite  $L$  en un punto  $c$  significa que, tomando puntos suficientemente próximos a  $c$ , el valor de  $f$  puede ser tan cercano a  $L$  como se desee. La cercanía de los valores de  $f$  y  $L$  no depende del valor que adquiere  $f$  en dicho punto  $c$ . Si la función tiene límite en  $c$  podemos decir de manera informal que la función tiende hacia el límite cerca de  $c$  si se puede hacer que esté tan cerca como queramos de  $L$  haciendo que  $x$  esté suficientemente cerca de  $c$  siendo distinto de  $c$ . Los conceptos cerca y suficientemente cerca son matemáticamente poco precisos. Las dos grandes áreas del cálculo, denominadas cálculo diferencial y cálculo integral, se basan en el concepto fundamental de límite. En esta sección, el enfoque que haremos a este importante concepto será intuitivo, centrado en la comprensión de que es un límite mediante el uso de ejemplos numéricos y gráficos. En la siguiente sección nuestro enfoque será analítico; es decir, usaremos métodos algebraicos para calcular el valor del límite de una función. Para realizar un límite de una función  $f(x)$  en  $x=p$  simplemente tenemos que sustituir  $x$  por  $p$  en la expresión del límite. Al hacer este paso puede ser que obtengamos un valor concreto (un número), un valor infinito o una indeterminación. En el último caso tendremos que modificar la expresión del límite a otra expresión equivalente para conseguir evitar la indeterminación. Este paso está explicado en el siguiente tema, en el apartado de indeterminaciones.

La noción de límites se refiere en términos coloquiales a lo que nos lleva nuestra intuición: es aquello a lo que nos podemos acercar hasta que queramos. El límite es una noción muy importante en el cálculo matemático. Fundamental para áreas, continuidad, asíntotas, convergencia, derivadas o integrales. En el límite de una función las claves son la variable  $x$  y los diferentes valores que adquiere la función  $f(x)$ . En el límite de una sucesión, la equivalencia del papel de  $x$  es el índice  $n$ , mientras que los términos  $a_n$  de la sucesión equivaldrían al papel de los

valores de  $f(x)$ . Límite define formalmente ese valor cuando nos acercamos a un determinado punto, tanto para el límite de una función como para el límite de una sucesión. En matemáticas, el límite de una función en un punto o el de una sucesión es el valor único al que se acerca la función cuando la variable independiente  $x$  se aproxima, tan cerca como queramos, a un valor establecido o es el término de una sucesión cuando el índice  $n$  tiende al infinito. En una función, si al valor del límite lo llamamos  $L$  y al punto al que tiende la variable independiente lo llamamos  $a$ , la expresión del límite sería: 
$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Las **funciones** son reglas que relacionan los elementos de un conjunto con los elementos de un segundo conjunto. Cuando una magnitud depende de otra, se dice que está en función de ésta.

Una **función**  $f$  es una relación que asigna a los elementos de un primer conjunto (conjunto inicial  $X$ ) un elemento de un segundo conjunto (conjunto final  $Y$ ). A cada elemento de  $X$  le corresponde, **un y solo un** elemento de  $Y$ .

El **dominio de una función**  $f$  es el subconjunto **Dom**  $f$  (o **D**) de elementos que tienen imagen. Es decir, el conjunto de elementos  $x$  de la variable independiente  $X$  que tienen imagen en  $Y$ . También se le llama campo de existencia de la función.

Las **funciones polinómicas de primer grado** o de grado 1 son aquellas que tienen un polinomio de grado 1 como expresión. Están compuestas por un escalar que multiplica a la variable independiente más una constante. Su mayor exponente es  $x$  elevado a 1.

**Historia**, Aunque implícita en el desarrollo del Cálculo de los siglos XVII y XVIII, la notación moderna del límite de una función se remonta a Bolzano quien, en 1817, introdujo las bases de la técnica épsilon-delta. Sin embargo, su trabajo no fue conocido mientras él estuvo vivo. Cauchy expuso límites en su Cours d'analyse (1821) y parece haber expresado la esencia de la idea, pero no de una manera sistemática.<sup>3</sup> La primera presentación rigurosa de la técnica hecha pública fue dada por Weierstrass en los 1850 y 1860 y desde entonces se ha convertido en el método estándar para trabajar con límites.

# Continuidad de funciones

La continuidad de funciones es uno de los estudios principales de una función.

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Diríamos que es continua si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel.

Se dice que la función es discontinua si no es continua, es decir, presenta algún punto en el que existe un salto y la gráfica se rompe.

## Calcular los siguientes límites:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 4} (-2) = -2 \quad -2(x) + 4 = -2.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 3(2)+1 = 6+1 = \textcircled{7}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} (2x+4) = 2(0)+4 = 0+4 = \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x}{x} = \frac{3(5)}{5} = \textcircled{3}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 1} (10+3x) = 10(1)+3 = 10+3 = \textcircled{13}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 2} (6-2x) = 6(2)-2 = 12-2 = \textcircled{10}$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow -4} (-4-3x) = -4(-4)-3(-4) = 16+12 = \textcircled{28}$$