Nombre del alumno: Arguello Tovar Avilene del Rocío

Nombre del profesor: Jiménez Sergio

Nombre del trabajo: “La integral como función primitiva o antiderivada”

Materia: Biomatemáticas

Grado: 2do “B”

Comitán de Domínguez Chiapas a 23 de junio del 2021

La integral como función primitiva o antiderivada.

• Primitivas o antiderivadas de funciones algebraicas.

La función primitiva o antiderivada de una función $f(x)$ es una función tal que al ser derivada nos generará la misma $f(x)$. Así pues, $F(x)$ será una antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.
En notación de integral, $F'(x) = f(x)$ se puede expresar como $\int f(x)dx = F(x)$.

La integral comparte, al ser inversa de la derivada, muchas propiedades con ésta: como por ejemplo:
a) La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada una de ellas. Por ejemplo: $\int(8x^2-3x^2)dx = \int 8x^2dx - \int 3x^3dx$.
b) La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función. Por ejemplo:

$$\int 8x^2 dx = 8\int x^2 dx$$

Cabe hacer una observación importante. Una vez que se cuenta con una antiderivada o primitiva de una función original, a ésta se le puede sumar cualquier constante. Al derivar cualquier antiderivada más cualquier constante elegida, la derivada será siempre igual, esto es, la función original.
A este conjunto se le conoce como integral indefinida.
A continuación tenemos ejemplos a partir de $f(x)$, su antiderivada $F(x)$.

Considera la siguiente función algebraica: $f(x) = -7.7x^{2.7} + 9.6x^3 - 6.3x^{0.95} + 0.6x^{0.95}$
Para funciones de la forma $y(x) = x^n$, su antiderivada se obtiene dividiendo $y(x)$ por $n+1$ y considerando como el nuevo exponente de x a $n+1$. De esta forma, la primitiva $Y(x)$ de $y(x)$ está dada por $Y(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Observa que derivando $Y(x)$ obtienes $y(x)$. Dado que la integral de una constante por una función de x es igual a la constante por la integral de la función, para el caso $y(x) = ax^n$ tendríamos que ~~Y(x)~~

$Y(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$! Obtenemos la primitiva de cada término como una función $y(x)$ como se acaba de describir.

• Primer término: $y(x) = -7.7x^{2.7} + 9.6x^3 - 6.3x^{0.95} + 0.6x^{0.95}$

Dividimos por $2.7+1$ y lo usamos como nuevo exponente:

$$Y(x) = \frac{-7.7}{2.7+1} x^{2.7+1} = -2.08x^{3.7}$$

• Segundo término: $y(x) = 9.6x^3$

Dividimos por $3+1$ y lo usamos como nuevo exponente:

$$Y(x) = \frac{9.6}{3+1} x^{3+1} = 2.4x^4$$

• Tercer término: $y(x) = -6.3x^{0.95}$

Dividimos por $0.95+1$ y lo usamos como nuevo exponente:

$$Y(x) = \frac{-6.3}{0.95+1} x^{0.95+1} = -3.23x^{1.95}$$

• Cuarto término: $y(x) = 0.6x^{0.95}$

Dividimos por $0.95+1$ y lo usamos como nuevo exponente:

$$Y(x) = \frac{0.6}{0.95+1} x^{0.95+1} = 0.31x^{1.95}$$

• Aplicando la propiedad de que la integral de una suma es la suma de las integrales de cada sumando, el valor de esta integral sería:

$$F(x) = -2.08x^{3.7} + 2.4x^4 - 3.23x^{1.95} + 0.31x^{1.95}$$

Observa que en ninguno de los ejemplos donde aparecen sólo sumas de potencias en x se aborda el caso en que el exponente es -1. Si sigues las reglas arriba expuestas para obtener la integral, en dicho caso se tendría una determinación.

$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x} = f(x)$ donde a es una constante, al integrar

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

se debe obtener la antiderivación de $f(x)$, que es $F(x)$. Es decir $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$.

Ejemplos:

Considera la siguiente función trascendente: $f(x) = 3e^{5.5x} - 4.5e^{4x}$

Tomamos la función $= (x) = \frac{Ae^{ax}}{a}$ con A y a constantes.

Su derivada será $z'(x) = a\cos(ax)$. Por ello, notamos que si hemos de integrar una exponencial. Además, observamos que, por la regla de la cadena, al derivar terminamos multiplicando por a. Para poder efectivamente pasar de $z'(x)$ a $z(x)$ tendremos ahora que usar la operación inversa, es decir, dividido por a.

Considera la siguiente función trascendente: $f(x) = 3e^{5.5x} - 4.5^{4x}$

• Primer término: $y(x) = 3e^{5.5x}$

Para obtener la antiderivada, utilizamos: $Y(x) = \left(\frac{1}{5.5}\right)3e^{5.5x} = 0.55e^{5.5x}$

• Segundo término: $y(x) = -4.5e^{4x}$

Para obtener la antiderivada, utilizamos: $Y(x) = \left(\frac{1}{4}\right) - 4.5e^{4x} = -1.13e^{4x}$

Aplicando la propiedad de que la integral de una suma es la suma de las integrales de cada sumando, la expresión de la antiderivada de $f(x)$ sería:

$$F(x) = 0.55e^{55x} - 1.13x^{4x}$$

Puedes derivar $F(x)$ y corroborar que, en efecto, obtienes la expresión para $f(x)$.

→ Se tiene la función $f(x) = 7.8\exp\left(\frac{3}{1}x\right) + 1.4\sec^2\left(\frac{5}{3}x\right)$ y se busca su antiderivada $F(x)$.

• 1er término: $y(x) = 7.8\exp\left(\frac{3}{1}x\right) = Y(x) = 2.6\ e.\left(\frac{3}{1}x\right)$

• 2do término: $y(x) = 1.4\sec^2\left(\frac{5}{3}x\right) = Y(x) = 0.84\ t..\left(\frac{5}{3}x\right)$

La antiderivada es $F(x) = 2.6\exp\left(\frac{3}{1}x\right) + 0.84\tan\left(\frac{5}{3}x\right)$.

→ Se tiene la función $f(x) = 7.2\sec^2\left(\frac{-4}{-8}x\right) + 2.9\,\mathrm{sen}\left(\frac{-1}{7}x\right)$ y se busca su antiderivada $F(x)$.

• 1er término: $y(x) = 7.2\sec^2\left(\frac{-4}{-8}x\right) = Y(x) = 14.4\ t.\left(\frac{-4}{-8}x\right)$

• 2do término: $y(x) = 2.9\,\mathrm{sen}\left(\frac{-1}{7}x\right) = Y(x) = 20.3\ c..\left(\frac{-1}{7}x\right)$

La antiderivada es $F(x) = 14.4\tan\left(\frac{-4}{-8}x\right) + -20.3\cos\left(\frac{-1}{7}x\right)$

Bibliografía

Díaz, A. R. (2014). La integral como función primitiva o antiderivada. *Objetos de la UNAM*, 1.

Díaz, A. R. (2014). La integral como función primitiva o antiderivada. *Objetos UNAM*, 1.