Nombre del alumno: Jhoana Guadalupe Arreola Mayorga

Nombre del profesor: Sergio Jiménez Ruíz

Nombre del trabajo: La integral como función primitiva o antiverivada

Materia: Biomatemáticas

Grado: 2do semestre Medicina Humana

Comitán de Domínguez Chiapas a 23 de junio del 2021

La integral como función primitiva o antiderivada

Objetivo

Obtener la función primitiva, antiderivada o integral de la función algebraica.

Las integrales

Las integrales son la suma de infinitos indefinidamente pequeños. Como bien ya se sabe, las integrales y las derivadas son conceptos directamente inversos. El cálculo integral se emplea con frecuencia en la ingeniería y la ciencia para el cálculo de volúmenes.

Historia de las integrales

A pesar deque las integrales ya estaban presentes en el Antigüo Egipto, la técnica que ha prevalecido para desarrollar las integrales es el método desarrollado por Eudoxo (370 a.C.). Posteriormente el matemático Arquímedes empleó este método para calcular áreas de parábolas y áreas del círculo. Fue hasta el siglo XVI que los trabajos de Cavallieri y Fermat, además de las aportaciones de Barrow y Torricelli hicieron percatarnos de la conexión entre integrales y derivadas. Durante el siglo XVII se formuló el teorema fundamental del cálculo por Newton y Leibniz que permitió la resolución de una amplia variedad de problemas. A finales de la primera mitad del siglo XX apareció la formulación de la integral de Itô mediante el desarrollo de la noción del proceso estocástico dentro de la teoría de la probabilidad, y más adelante se conoció como integral de Skorohod

Conceptos básicos

La integral de una función $f(x)$ es una función que al ser derivada nos genera la misma $f(x)$. Dando a entender que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Se expresa algebraicamente de la siguiente manera

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Procedimiento

Se tienen las siguientes funciones: $f(x) = ax^n$ y $g(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Al derivar se obtiene:

$$\frac{d}{dx}g(x) = (n+1)\frac{a}{n+1}x^{(n+1)-1} = ax^n = f(x)$$

Como podemos ver, al derivar $g(x)$ se obtiene $f(x)$. De esta manera se observa que $g(x)$ es una antiderivada de $f(x)$.

Es de importancia señalar que al proceso para la determinación de la primitiva de una función es conocido como integración indefinida. Es por lo anterior que la integral es considerada un proceso inverso a la derivada. También comparte muchas propiedades con esta, como:

a) La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada una de ellas. Por ejemplo:

$$\int (8x^2 - 3x^3)dx = \int 8x^2 dx - \int 3x^3 dx$$

b) La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función. Por ejemplo:

$$\int 8x^2 dx = 8\int x^2 dx$$

Fórmulas de integrales inmediatas

1.- $\int (du + dv + dw) = \int du + \int dv + \int dw$
2.- $\int k\,du = k \int du$
3.- $\int dx = x + C$
4.- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
5.- $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$
6.- $\int \frac{dv}{v} = \ln |v| + C$
7.- $\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$
8.- $\int e^v dv = e^v + C$

Fórmulas de integrales de funciones trigonométricas

9.- $\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + c$
10.- $\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + c$
11.- $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + c$
12.- $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + c$
13.- $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + c$
14.- $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + c$
15.- $\int \tan v\, dv = -\ln |\cos v| + c$
16.- $\int \cot v\, dv = \ln |\operatorname{sen} v| + c$
17.- $\int \sec v\, dv = \ln |\sec v + \tan v| + c$
18.- $\int \csc v\, dv = \ln |\csc v - \cot v| + c$

Otras fórmulas de integrales

19.- $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{v}{a}\right) + c$

20.- $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{v-a}{v+a}\right| + c$

21.- $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + c$

22.- $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \text{Arc Sen} \left(\frac{v}{a} \right) + c$

23.- $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right) + c$

24.- $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a}} = \frac{1}{a} \text{ Arc Sec} \left(\frac{v}{a} \right) + c$

25.- $\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc Sen} \left(\frac{v}{a} \right) + c$

26.- $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right) + c$

Ejemplos

1.- $f(x) = 9\sqrt[2]{x^{10}} - 4x^{-4/-4} + 7x^{4.5}$

$f(x) = 9x^5 - 4x + 7x^{4.5}$

$\int 9x^5 - 4x + 7x^{4.5}$

$\int 9x^5 - \int 4x + \int 7x^{4.5}$

$9\int x^5 - 4\int x + 7\int x^{4.5}$

$9\left(\frac{x^6}{6}\right) - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 7\left(\frac{x^{5.5}}{5.5}\right)$

$9x^6/6 - 4x^2/2 + 7x^{11/2}/11/2$

$\frac{9x^6}{6} - 2x^2 + \frac{7x^{11/2}}{\frac{1}{\frac{11}{2}}}$

$\frac{9x^6}{6} - 2x^2 + \frac{14x^{11/2}}{11}$

2.- $f(x) = -3\sqrt[1]{x^6} - 9.5x^{3/-1} - 9.5x^{-8.5}$

$f(x) = -3x^6 - 9.5x^{-3} - 9.5x^{-8.5}$

$\int -3x^6 - 9.5x^{-3} - 9.5x^{-8.5}$

$-3\int x^6 - 9.5\int x^{-3} - 9.5\int x^{17/2}$

$$-3\left(\frac{x^7}{7}\right)-9.5\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)-9.5\left(\frac{x^{19/2}}{19/2}\right)$$
$$-\frac{3x^7}{7}-{}^{19}/_{2}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)-{}^{19}/_{2}\left(\frac{x^{19/2}}{\frac{1}{\frac{19}{2}}}\right)$$
$$-{}^{3x^7}/_{7}+\frac{19x^{-2}}{4}-{}^{19}/_{2}\left(\frac{2x^{19/2}}{19}\right)$$
$$-{}^{3x^7}/_{7}+\frac{19x^{-2}}{4}-\frac{38x^{19/2}}{38}$$
$$-{}^{3x^7}/_{7}+{}^{19x^{-2}}/_{4}-x^{19/2}$$

3.- $f(x)=-5\sqrt[2]{x^{10}}+6.5x^{\frac{-10}{-7}}+9x^{8.5}$
$$f(x)=-5x^5+6.5x^{10/7}+9x^{17/2}$$
$$\int-5x^5+\int6.5x^{10/7}+\int9x^{17/2}$$
$$-5\int x^5+6.5\int x^{10/7}+9\int x^{17/2}$$
$$-5\left(\frac{x^6}{6}\right)+6.5\left(\frac{x^{17/7}}{17/7}\right)+9\left(\frac{x^{19/2}}{19/2}\right)$$
$$-\frac{5x^6}{6}+\frac{13}{2}\left(\frac{x^{17/7}}{\frac{1}{\frac{17}{7}}}\right)+9\left(\frac{x^{19/2}}{\frac{1}{\frac{19}{2}}}\right)$$
$$-\frac{5x^6}{6}+\frac{13}{2}\left(\frac{7x^{17/7}}{17}\right)+9\left(\frac{2x^{19/2}}{19}\right)$$
$$-\frac{5x^6}{6}+\frac{91x^{17/7}}{34}+\frac{18x^{19/2}}{19}$$

4.- $f(x)=6.5\sqrt{x^6}+0.5x^{-7/-4}+6.5x^{-9}$
$$f(x)={}^{13}/_{2}\,x^6+{}^{1}/_{2}\,x^{7/4}+{}^{13}/_{2}\,x^{-9}$$
$${}^{13}/_{2}\int x^6+{}^{1}/_{2}\int x^{7/4}+{}^{13}/_{2}\int x^{-9}$$
$${}^{13}/_{2}\left(\frac{x^7}{7}\right)+{}^{1}/_{2}\left(\frac{x^{11/4}}{\frac{1}{\frac{11}{4}}}\right)+{}^{13}/_{2}\left(\frac{x^{-8}}{-8}\right)$$
$$\frac{13x^7}{14}+{}^{1}/_{2}\left(\frac{4x^{11/4}}{11}\right)-\frac{13x^{-8}}{16}$$
$$\frac{13x^7}{14}+\frac{4x^{11/4}}{22}-\frac{13x^{-8}}{16}$$
$${}^{13x^7}/_{14}+{}^{2x^{11/4}}/_{11}-{}^{13x^{-8}}/_{16}$$

Referencias

Rodillo Díaz A. (Diciembre 2014) La integración como función primitiva o anti derivada. UNAM. Recuperado de: http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/03/3_065/index.html

Anónimo. (S.f.) Integrales. Superprof. Materiales didácticos. Recuperado de: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/

Anónimo. (S.f.) Tabla de integrales: tipos y explicación. Derivadas. es. Recuperado de: https://www.derivadas.es/tabla-de-integrales/