MATEMATICA APLICADA

Docente: ***Juan Jose Ojeda Trujillo***

Nombre del alumno: Gerardo Martin Hidalgo Espinosa

Grado: ***5 semestre***

Grupo: ***A***

Formas indeterminadas, integrales impropias, series y sucesiones

- **Regla de L´Hopital**
  - La regla de l'Hôpital se aplica para salvar indeterminaciones que resultan de reemplazar el valor numérico al llevar al límite las funciones dadas.
    - La regla dice que se deriva el numerador y el denominador por separado; es decir: sean las funciones originales f(x)/g(x), al aplicar la regla se obtendrá: f'(x)/g'(x)
- **Formas indeterminadas**
  - Las Formas indeterminadas En matemática, se llama forma indeterminada a una expresión algebraica que involucra límites del tipo: 0 0 ∞ ∞ 0. ∞ 1∞ 00 ∞0 + ∞ − ∞ Estas expresiones se encuentran con frecuencia dentro del contexto del límite de funciones y, más generalmente, del cálculo infinitesimal y el análisis real
    - Los límites indeterminados (o indeterminaciones) no indican que el límite no exista, sino que no se puede anticipar el resultado. Se tendrán que hacer operaciones adicionales para eliminar la indeterminación y averiguar entonces el valor del límite (en el caso de que exista)
- **Integrales impropias**
  - En cálculo, una integral impropia de una función es el límite de una integral definida cuando uno o ambos extremos del intervalo de integración se acercan a un número que no está dentro de su dominio, a \infty, o a-\infty.
    - Las integrales impropias son integrales definidas que cubren un área no acotada. Un tipo de integrales impropias son las aquellas en las que al menos uno de los puntos extremos se extiende al infinito
- **Criterios de convergencia y divergencia de series infinitas**
  - Una serie infinita converge si es finito el límite en el infinito positivo de su suma parcial \begin{align*}n\end{align*} -ésima. Una serie infinita diverge si el límite en el infinito positivo de su suma parcial \begin{align*}n\end{align*} -ésima es infinito o no existe
    - En matemáticas, una serie (suma de los términos de una secuencia de números), resulta convergente si la sucesión de sumas parciales tiene un límite en el espacio considerado. De otro modo, constituiría lo que se denomina serie divergente
- **Sucesiones**
  - Una sucesión es un conjunto ordenado de números llamados términos, que se designan con una letra y un subíndice que se corresponde con el lugar que ocupan. Los números a1, a2 , a3 , ... se llaman términos de la sucesión. El subíndice indica el lugar que el término ocupa en la sucesión.
    - una sucesión es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza, también pueden ser figuras geométricas o funciones

Formas indeterminadas

1. $\lim_{x\to\infty} 5x^3+7x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 5x^3+7x = \lim_{x\to\infty} 5x^3 = \lim_{x\to\infty} 5\cdot\infty = \infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\infty} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-1} = -\infty$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$

6. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$

Regla L'hospital

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq\ ]a,b[$ convergente a a. Se tiene que $\{c_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a a al ser $a < c_{x_n} < x_n$. Por tanto,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha. \ \blacksquare$$

Integrales impropias

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 5^{-x^2}(xdx) \quad (\spadesuit)$$

Sea

$u = -x^2$ (1).

$\Rightarrow \quad du = -2xdx, \Rightarrow -\frac{1}{2}du = xdx$ (2)

Cuando: $\begin{cases} x=0, u=0 \\ x=a, u=-a^2 \end{cases}$ (3)

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u\left(-\frac{1}{2}du\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^u du\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u du,$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left[\frac{5^u}{\ln 5}\right]_{-a^2}^{0}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^0}{\ln 5} - \frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right),$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5} - 0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}$$

sucesiones

a) $a_n = 5n-3$

$a_1 = 5\cdot 1 - 3 = 2$

$a_2 = 5\cdot 2 - 3 = 7$

$a_3 = 5\cdot 3 - 3 = 12$

$a_4 = 5\cdot 4 - 3 = 17$

b) $a_n = (n+2)^2$

$a_1 = (1+2)^2 = 3^2 = 9$

$a_2 = (2+2)^2 = 4^2 = 16$

$a_3 = (3+2)^2 = 5^2 = 25$

$a_4 = (4+2)^2 = 6^2 = 36$

c) $a_n = 5\cdot 3^n$

$a_1 = 5\cdot 3^1 = 5\cdot 3 = 15$

$a_2 = 5\cdot 3^2 = 5\cdot 9 = 45$

$a_3 = 5\cdot 3^3 = 5\cdot 27 = 135$

$a_4 = 5\cdot 3^4 = 5\cdot 81 = 405$

d) $a_n = (-3)^n$

$a_1 = (-3)^1 = -3$

$a_2 = (-3)^2 = 3$

$a_3 = (-3)^3 = -9$

$a_4 = (-3)^4 = 81$

e) $a_n = 3^{-n}$

$a_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$a_2 = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$a_3 = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$a_4 = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

f) $a_n = -3n+1$

$a_1 = -3\cdot 1 + 1 = -2$

$a_2 = -3\cdot 2 + 1 = -5$

$a_3 = -3\cdot 3 + 1 = -8$

$a_4 = -3\cdot 4 + 1 = -11$

Series infinitivas

SERIES INFINITAS

Criterios de Convergencia

Ejemplos:

(b)Determine si la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{Ln(n)}}$ es convergente o divergente aplicando criterio de la integral:

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{Ln(x)}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\sqrt{Ln(x)}}dx = \lim_{b\to\infty}2\sqrt{Ln(x)}\Big|_2^b \ (*)$$

$$= \lim_{b\to\infty}2\sqrt{Ln(b)} - 2\sqrt{Ln(2)} = +\infty$$

(*) Esta integral se halla usando método de sustitución, donde u=Ln(x) y du=1/x dx

Prof. Emma Yendis