GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Subtítulo

SHIRLE KARINA PEREZ VELÁZQUEZ

P= $l+l+l$

P= 9+11+11

9+11+11= 31

P= *31 cm*

A= BXH/2

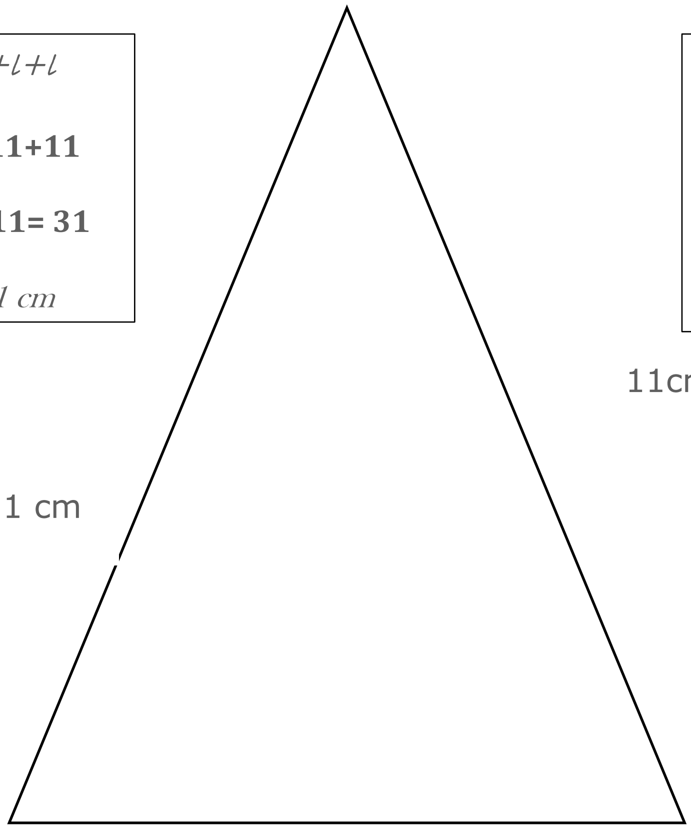
A=9X10/2

A=90/2

A=45cm^2

11cm

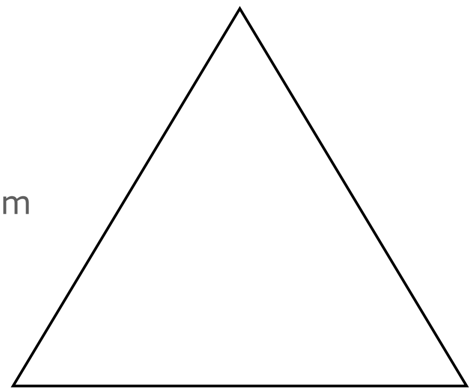
11 cm



9 cm

4 cm

4 cm



4 cm

P= $l+l+l$

P= 4+4+4

P= 12 cm

A=bXh/2

A=4.3X5/2

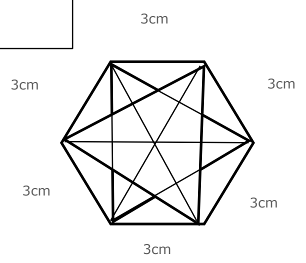
A=21.5/2

A=10.75^2

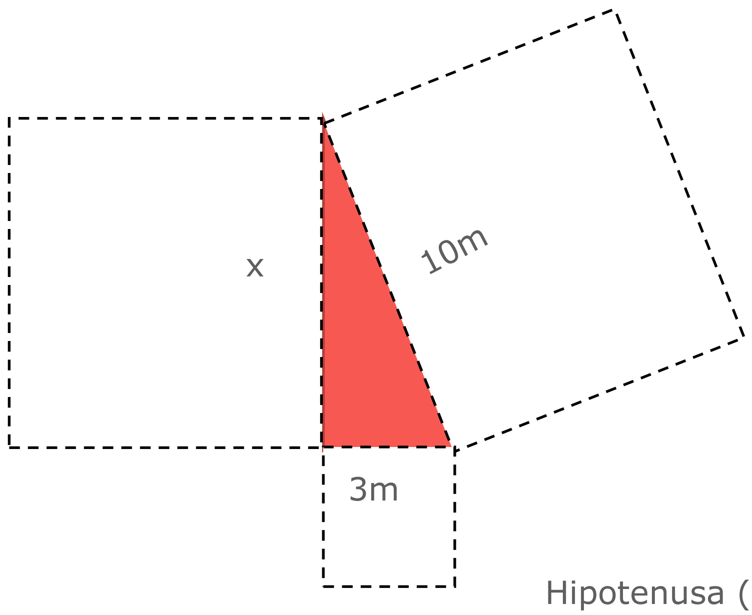
$P = L + L + L + L + L + L$

$P = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

$P = 18cm$



Calcular la altura de un anuncio, si la escalera para llegar a él mide 10 m y el pie de ésta se encuentra apoyado a 3 m del muro donde está el anuncio.



$h^2= a^2+b^2$

$10^2=a^2+3^2$

$100-9$

$A^2=91$

$A^2=\sqrt{91}=9.53$

$A^2= 9.53$

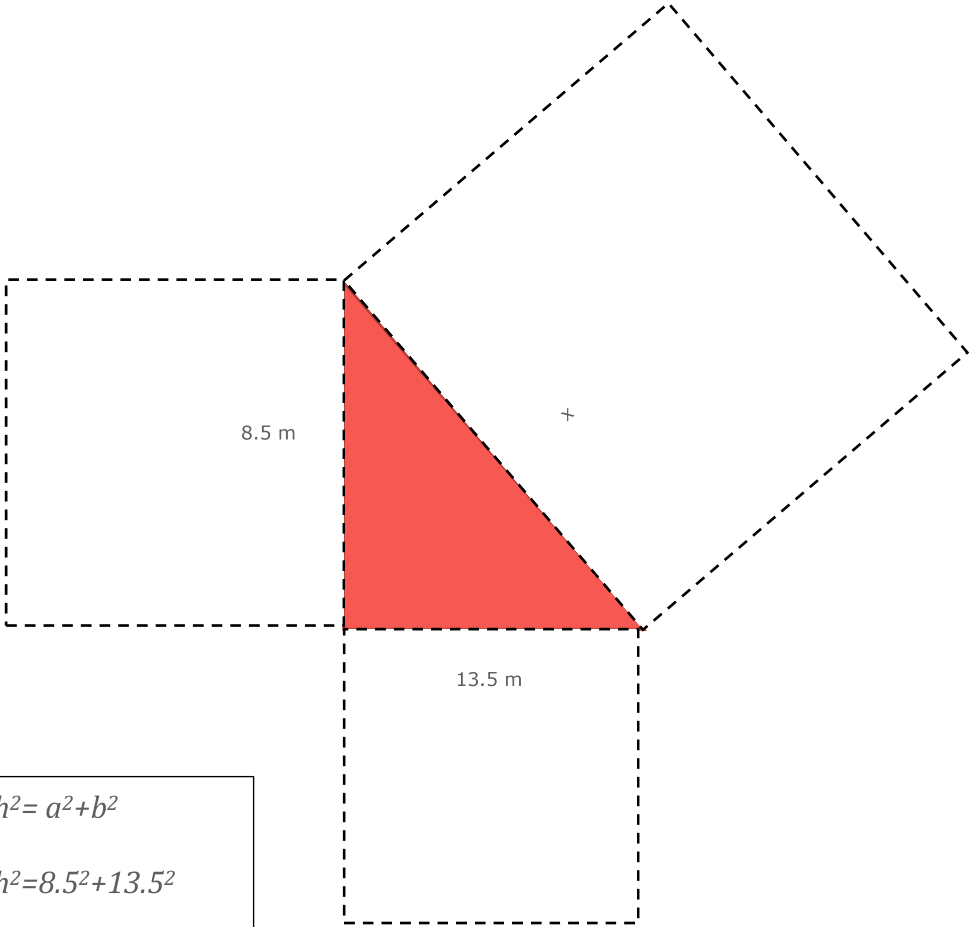
Hipotenusa (h^2)

Cateto mayor (a^2)

Cateto menor (b^2)

Un búho se encuentra en la parte más alta de un árbol que mide 8.5 m, éste observa un ratón fuera de su madriguera a una distancia de 13.5 m del pie del árbol, ¿qué distancia tiene que recorrer el búho para cazar al ratón?

Hipotenusa (h^2) Cateto mayor (a^2) Cateto menor (b^2)



$h^2= a^2+b^2$

$h^2=8.5^2+13.5^2$

$h^2=72.25+182.25$

$h^2= 254.5$

$h^2=\sqrt{254.5}$

$h^2=15.95$

Investigar y realizar un resumen de los siguientes temas: **Ángulos y triángulos, propiedades de los polígonos, clasificación de los polígonos, elementos de los polígonos, teorema de Pitágoras y Thales de Mileto.**

Ángulos y Triángulos: *Se llama triángulo o trígono, en geometría plana, al polígono de tres lados. Los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices del triángulo. 1. Un triángulo tiene tres ángulos interiores, tres pares congruentes de ángulos exteriores,2 tres lados y tres vértices entre otros elementos.*

Cada par de lados con origen común al vértice de un triángulo y que contienen dos de esos lados concurrentes se llama ángulo del triángulo u -ocasionalmente- ángulo interior. La notación general para el ángulo entre dos segmentos OP y OQ prolongados y que concurren en el extremo O es También es posible utilizar una letra minúscula -habitualmente una letra griega- coronada por un acento circunflejo (en rigor, los ángulos deben ser designados por letras mayúsculas y su medida por minúsculas, pero a menudo se utilizan los mismos nombres para los dos con el fin de simplificar la notación). En el caso de un triángulo, el ángulo entre dos lados todavía puede, por tolerancia y en ausencia de ambigüedad, ser designado por el nombre del vértice común, coronado por un acento circunflejo. En resumen, en el ejemplo se pueden observar los ángulos: EL ángulo cuyo vértice coincide con uno de los vértices del triángulo y sus lados: son la prolongación de un lado triangular y el otro lado angular contiene a un lado triangular, se llama ángulo externo. En cada vértice triangular hay dos ángulos externos.

En geometría, el ángulo puede ser definido como la parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice del ángulo.1 La medida de un ángulo es considerada como la longitud del arco de circunferencia centrada en el vértice y delimitada por sus lados. Su medida es un múltiplo de la razón entre la longitud del arco y el radio. Su unidad natural es el radián, pero también se puede utilizar el grado sexagesimal o el grado centesimal. Pueden estar definidos sobre superficies planas (trigonometría plana) o curvas (trigonometría esférica). Se denomina ángulo diedro al espacio comprendido entre dos semiplanos cuyo origen común es una recta. Un ángulo sólido es el que abarca un objeto visto desde un punto dado, midiendo su tamaño aparente.

PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS: En geometría, un **polígono** es una figura geométrica plana y está compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano.[1] Estos segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersecan se llaman vértices. El polígono es el caso bidimensional del politopo.

ETIMOLOGÍA[EDITAR]

La palabra *polígono* deriva del griego antiguo πολύγωνος (*polúgōnos*), a su vez formado por πολύ (*polú*) ‘muchos’ y γωνία (*gōnía*) ‘ángulo’,[234] aunque hoy en día los polígonos son usualmente entendidos por el número de sus lados.

La noción geométrica elemental ha sido adaptada de distintas maneras para servir a propósitos específicos. A los matemáticos a menudo les interesan solo las líneas poligonales cerradas y los polígonos simples (aquellos en los cuales sus lados solo se intersecan en los vértices), y pueden definir un polígono de acuerdo a ello. Es requisito geométrico que dos lados que se intersecan en un vértice formen un ángulo no llano (distinto a 180°), ya que de otra manera los segmentos se considerarían partes de un único lado; sin embargo, esos vértices podrían permitirse algunas veces por cuestiones prácticas. En el ámbito de la computación, la definición de polígono ha sido ligeramente alterada debido a la manera en que las figuras son almacenadas y manipuladas en la computación gráfica para la generación de imágenes.

Definiciones[editar]

La definición del **polígono** depende del uso que se le quiera dar, así por ejemplo para hacer referencia a una región del plano se tiene:

- Llamaremos polígono a la porción del plano delimitada y encerrada por una línea poligonal.[5]

Para hacer referencia al estudio euclidiano de las longitudes de los lados de un polígono, se tiene:

- Llamaremos polígono a una figura geométrica plana definida por una línea poligonal de la cual sus dos extremos coinciden.

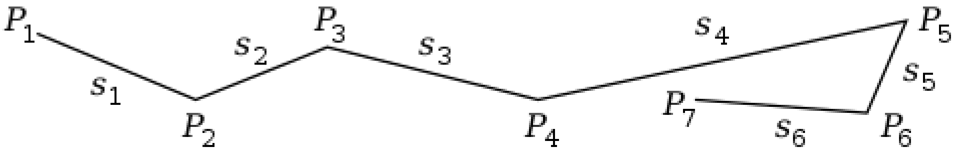
Línea poligonal*[editar]*

Se denomina **línea poligonal** o **línea quebrada** al conjunto de segmentos, , unidos sucesivamente por sus extremos donde el extremo de cada uno es origen del siguiente, tal que dos segmentos sucesivos no están alineados, en tal caso se considera ambos como un único segmento.[56]

Sean y los extremos de , entonces:

- Si los dos extremos libres, y , no coinciden se dice que la línea poligonal es **abierta**.[5]
- Diremos que la línea poligonal es **cerrada** si no es abierta.[5]

Ejemplo de una línea poligonal de seis segmentos:



Véase también

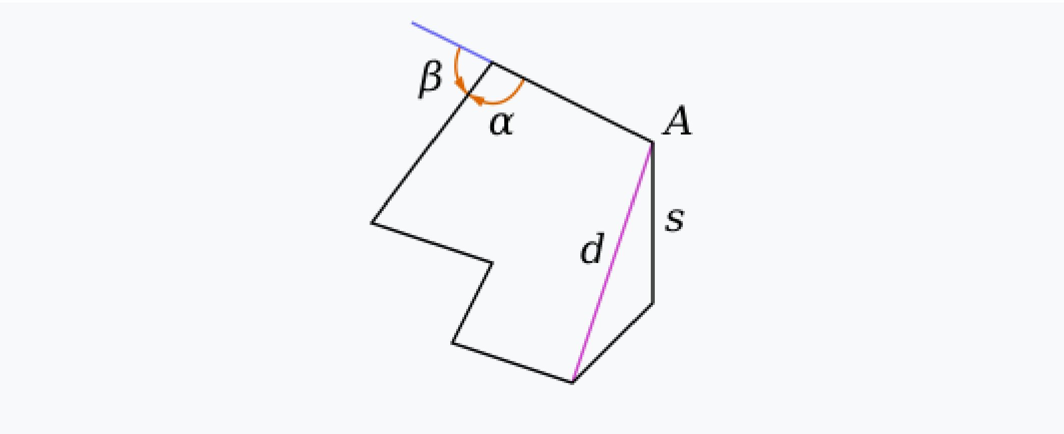
La definición y su aplicación del concepto de Grafo de la teoría de grafos.

La definición de símplex usada en topología algebraica.

Propiedades[editar]

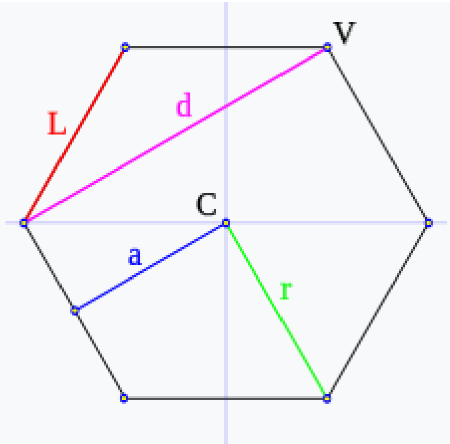
- **Interior** de un polígono es el conjunto de todos los puntos que están en el interior de la región que delimita dicho polígono.
- **Exterior** de un polígono es el conjunto de los puntos que no están en la línea poligonal (frontera) ni en el interior.[7]

ELEMENTOS DE UN POLÍGONO[EDITAR]



En un polígono se distinguen los siguientes elementos geométricos:

- Lados del polígono: son cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- Vértices de un polígono: son los puntos de intersección o puntos de unión entre lados consecutivos.
- Diagonales del polígono: son segmentos que une dos vértices no consecutivos del polígono.
- Ángulo interior del polígono: es el ángulo formado, internamente al polígono, por dos lados consecutivos.
- Ángulo exterior del polígono: es el ángulo formado, externamente al polígono, por uno de sus lados y la prolongación del lado consecutivo.
- Ángulos entrantes del polígono: es el ángulo interior al polígono que miden más de 180º.[8]
- Ángulos salientes del polígono: es el ángulo interior al polígono que miden menos de 180º.[9]



Hexágono regular.

En un polígono regular se puede distinguir, además:

- Centro (C): es el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- Ángulo central (AC): es el ángulo formado por dos segmentos de recta que parten del centro a los extremos de un lado.
- Apotema (a): es el segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.
- Diagonal ( ): son los segmentos que unen los vértices del polígono no consecutivamente.

TEOREMA DE PITÁGORAS: El **teorema de Pitágoras** establece que, en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma del área de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos. Es la proposición más conocida entre las que tienen nombre propio en la matemática.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

HISTORIA[EDITAR]

El teorema de Pitágoras fue comprobado en el siglo VI a.C. por el filósofo y matemático griego Pitágoras, pero se estima que pudo haber sido previo a su existencia, o demostrado bajo otra denominación.

Respecto de los babilonios hay esta nota:

> Desde el punto de vista matemático, las novedades más importantes que registran los textos babilónicos se refieren a la solución algebraica de ecuaciones lineales y cuadráticas, y el conocimiento del llamado "teorema de Pitágoras" y de sus consecuencias numéricas.
>
> 1

El teorema de Pitágoras tiene este nombre porque su demostración, sobre todo, es esfuerzo de la escuela pitagórica. Anteriormente, en Mesopotamia y el Antiguo Egipto se conocían ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los citados triángulos, tal como se indica en algunas tablillas y papiros. Sin embargo, no ha perdurado ningún documento que exponga teóricamente su relación.[2] La pirámide de Kefrén, datada en el siglo XXVI a. C., fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, de proporciones 3-4-5.

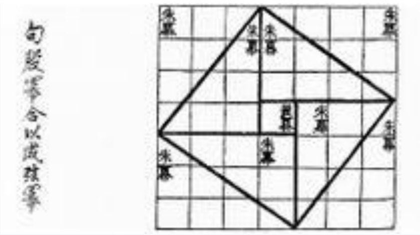
DEMOSTRACIONES[EDITAR]

El teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de "Magíster matheseos".

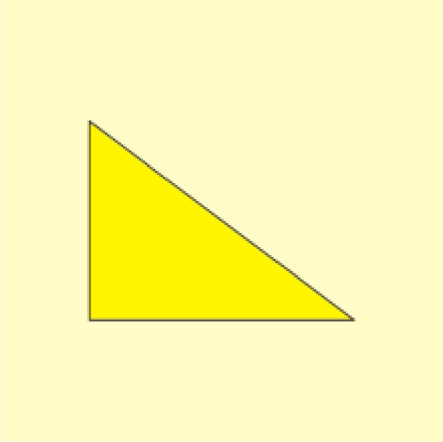
Algunos autores proponen hasta más de mil demostraciones. Otros autores, como el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927 *The Pythogorean Proposition*.

En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores.

China: El *Zhoubi Suanjing* y el *Jiuzhang Suanshu*[editar]



Prueba visual para un triángulo de ***a*** = 3, ***b*** = 4 y ***c*** = 5 como se ve en el Chou Pei Suan Ching, 500-200 a. C.



El *Zhoubi Suanjing* es una obra matemática de datación discutida en algunos lugares, aunque se acepta mayoritariamente que fue escrita entre el 500 y el 300 a. C. Se cree que Pitágoras no conoció esta obra. En cuanto al *Jiuzhang Suanshu* parece que es posterior; está fechado en torno al año 250 a. C.

El *Zhou Bi* demuestra el teorema construyendo un cuadrado de lado ***(a+b)*** que se parte en cuatro triángulos de base ***a*** y altura ***b***, y un cuadrado de lado ***c***.

Demostración

Sea el triángulo rectángulo de catetos ***a*** y ***b*** e hipotenusa ***c***. Se trata de demostrar que el área del cuadrado de lado *c* es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado *a* y lado *b*.

Si añadimos tres triángulos iguales al original dentro del cuadrado de lado ***c*** formando la figura mostrada en la imagen, obtenemos un cuadrado de menor tamaño. Se puede observar que el cuadrado resultante tiene efectivamente un lado de ***b - a***.

Se estima que se demostró el teorema mediante semejanza de triángulos: sus lados homólogos son proporcionales.[3]

Sea el triángulo ABC, rectángulo en C. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, en la que determina los segmentos *a'* y *b'*, proyecciones en ella de los catetos *a* y *b*, respectivamente.

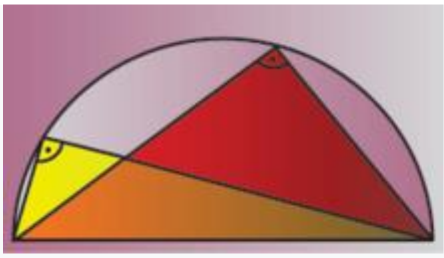
Los triángulos rectángulos ABC, AHC y BHC tienen sus tres bases iguales: todos tienen dos bases en común, y los ángulos agudos son iguales bien por ser comunes, bien por tener sus lados perpendiculares. En consecuencia, dichos triángulos son semejantes.

- De la semejanza entre ABC y AHC:

y dos triángulos son semejantes si hay dos o más ángulos congruentes.

Teorema de Tales de Mileto: Existen dos teoremas relacionados con la geometría clásica que reciben el nombre de **teorema de Tales**, ambos atribuidos al matemático griego Tales de Mileto en el siglo VI a. C.

LOS DOS TEOREMAS DE TALES[EDITAR]



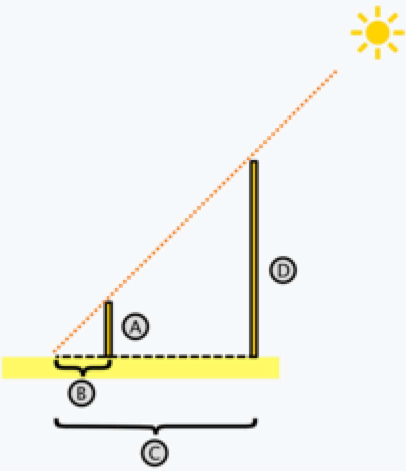
Semicírculo que ilustra el segundo teorema de Tales.

El primero de ellos explica esencialmente una forma de construir un triángulo semejante a partir de uno previamente existente ("los triángulos semejantes son los que tienen ángulos congruentes, esto deriva en que sus lados homólogos sean proporcionales y viceversa").

Mientras que el segundo desentraña una propiedad esencial de los circuncentros de todos los triángulos rectángulos ("encontrándose estos en el punto medio de su hipotenusa"), que a su vez en la construcción geométrica es ampliamente utilizado para imponer condiciones de construcción de ángulos rectos.

Si diversas rectas paralelas son intersecadas por dos transversales, los segmentos determinados por las paralelas y correspondientes entre transversales, son proporcionales.

PRIMER TEOREMA[EDITAR]



Una aplicación del teorema de Tales.

Como definición previa al enunciado del teorema, es necesario establecer que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales o si sus lados son proporcionales entre sí. El primer teorema de Tales recoge uno de los resultados más básicos de la geometría, a saber, que:

Teorema primero

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Según parece, Tales descubrió el teorema mientras investigaba la condición de paralelismo entre dos rectas. De hecho, el primer teorema de Tales puede enunciarse como que la igualdad de los cocientes de los lados de dos triángulos no es condición suficiente de paralelismo. Sin embargo, la principal aplicación del teorema, y la razón de su fama, se deriva del establecimiento de la condición de semejanza de triángulos, a raíz de la cual se obtiene el siguiente corolario.

Aplicación[editar]

Del establecimiento de la existencia de una relación de semejanza entre ambos triángulos se deduce la necesaria proporcionalidad entre sus lados. Ello significa que la razón entre la longitud de dos de ellos en un triángulo se mantiene constante en el otro.

Por ejemplo, en la figura se observan dos triángulos que, en virtud del teorema de Tales, son semejantes. Entonces, del mismo se deduce a modo de corolario que el cociente entre los lados A y B del triángulo pequeño es el mismo que el cociente entre los lados D y C en el triángulo grande.

SEGUNDO TEOREMA[EDITAR]

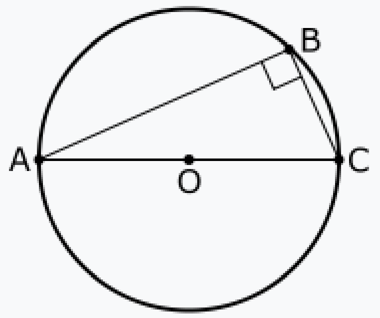


fig 2.1 Ilustración del enunciado del segundo teorema de Tales de Mileto.

El segundo teorema de Tales de Mileto es un teorema de geometría particularmente enfocado a los triángulos rectángulos, las circunferencias y los ángulos inscritos, consiste en el siguiente enunciado:

Teorema segundo

Sea **B** un punto de la circunferencia de diámetro **AC** y centro "O", distinto de **A** y de **C**. Entonces, el triángulo **ABC** es un triángulo rectángulo donde <**ABC** = 90º.

Este teorema (*véase **fig 2.1*** y ***2.2***), es un caso particular de una propiedad de los puntos cocíclicos y de la aplicación de los ángulos inscritos dentro de una circunferencia.

Demostración[editar]

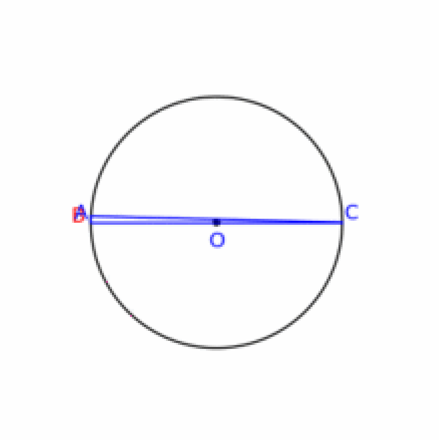


fig 2.2 Siempre que **AC** sea un diámetro, el ángulo **B** será constante y recto.

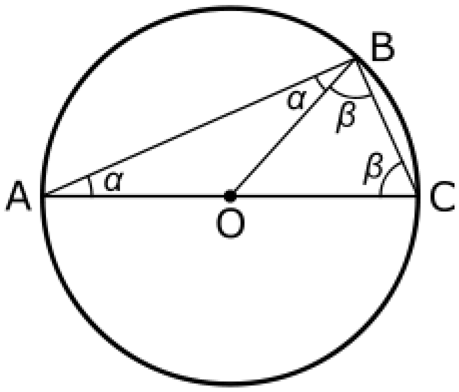


fig 2.3 Los triángulos **AOB** y **BOC** son isósceles.

En la circunferencia de centro **O** y radio **r** (*véase **fig 2.3***), los segmentos

OA , **OB** y **OC**

son iguales por ser todos radios de la misma circunferencia.

Por lo tanto los triángulos **AOB** y **BOC** son isósceles.

La suma de los ángulos del triángulo **ABC** es:

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior entre dos, se obtiene:

Con la expresión anterior el segundo teorema queda demostrado.

Corolarios[editar]

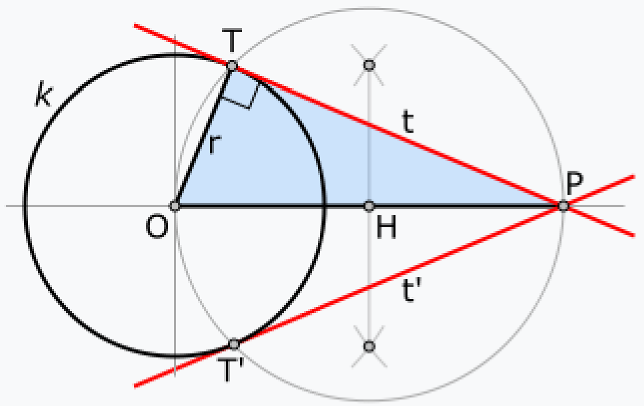
> **(Corolario 1)** *"En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa es siempre la mitad de la misma."*

Ya que aplicando el teorema anterior, se sabe que para cualquier posición que adopte el vértice **B** vale la igualdad, **OA** = **OB** = **OC** = ***r***, donde **OB** es la mediana de la hipotenusa, (véase ***fig 2.3***).

> **(Corolario 2)** *"La circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene radio igual a la mitad de la hipotenusa y su circuncentro se ubicará en el punto medio de la misma."*

El corolario 2 también surge de aplicar el teorema anterior, para una comprensión intuitiva basta observar la ***fig 2.2 '***

APLICACIÓN DEL SEGUNDO TEOREMA[EDITAR]



Construcción de tangentes (*líneas rojas*) a una circunferencia ***k*** desde un punto ***P***, utilizando el «segundo teorema de Tales».

El "segundo teorema" (*de Tales de Mileto*) puede ser aplicado para trazar las tangentes a una circunferencia ***k*** dada, que además pasen por un punto ***P*** conocido y externo a la misma (*véase figura*).

Se supondrá que una tangente cualquiera ***t*** (*por ahora desconocida*) toca a la circunferencia ***k*** en un punto ***T*** (*también desconocido por ahora*). Se sabe por simetría que cualquier radio ***r*** de la circunferencia ***k*** es perpendicular a la tangente del punto ***T*** que dicho radio define en la misma, por lo que concluimos que ángulo ***OTP*** es necesariamente recto.

Lo anterior implica que el triángulo ***OTP*** es rectángulo. Recordando el «corolario 2 del teorema segundo de Tales» podemos deducir que entonces el triángulo ***OTP*** es inscribible en una circunferencia de radio ½ de la hipotenusa ***OP*** del mismo.

Entonces marcando el punto ***H*** como punto medio de la hipotenusa ***OP*** y haciendo centro en el mismo, podemos dibujar una segunda circunferencia auxiliar (*gris en la figura*) que será la que circunscribe al triángulo ***OTP***.

Esta última circunferencia trazada se intersecará con la circunferencia ***k*** en dos puntos ***T*** y ***T'***, estos son justamente los puntos de tangencia de las dos rectas que son simultáneamente tangentes a ***k*** y además pasan por el punto ***P***, ahora ya conocidos los puntos ***T*** y ***T'*** solo basta trazar las rectas ***TP*** y ***T'P*** (rojas en la figura) para tener resuelto el problema.