NOMBRE DEL ALUMNO: CRISTHIAN GÓMEZ GONZÁLEZ

NOMBRE DEL PROFESOR: ROSARIO GÓMEZ

MATERIA: PRE-CALCULO Y FUNCIONES

TEOREMA DE LOS LIMITES

LIMITE DE UNA CONSTANTE

Se dice que una función f (x) tiene límite L en el punto x = a, si es posible aproximar f (x) a L tanto como se quiera cuando x se acerca indefinidamente a a, siendo distinto de a. En términos matemáticos, se expresa como:

Dado el punto a, y según la anterior definición, existen dos formas de aproximar x a a: desde valores $x > a$ (por la derecha) y desde valores $x < a$ (por la izquierda). En cada caso se obtienen valores denominados límite por la derecha (x®a+) y límite por la izquierda (x®a-). Por definición, para que exista el límite de una función ha de cumplirse que existan los dos límites laterales(por la derecha y por la izquierda) y que ambos sean iguales.

El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de los límites de las funciones por separado para un determinado punto en el cual esté definida dichas funciones.

Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$\text{lím}_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \text{lím}_{x \to x_0} f(x) + \text{lím}_{x \to x_0} g(x)$

donde f y g son dos funciones que están definidas en el punto x_0

El límite del producto o multiplicación de dos funciones es igual al producto de los límites de las dos funciones por separado para un determinado punto en el cual esté definida dichas funciones.

Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$\text{lím}_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \text{lím}_{x \to x_0} f(x) \cdot \text{lím}_{x \to x_0} g(x)$

donde f y g son dos funciones que están definidas en el punto x_0.

La identidad es una función lineal de pendiente $m = 1$ que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Divide el primer y el tercer cuadrante en partes iguales, o sea, es su bisectriz.

La pendiente es la inclinación con respecto al eje X (eje de abscisas). Al ser ésta positiva ($m > 0$), la función es creciente.

Que la pendiente de la función identidad sea $m = 1$ significa que si aumentamos la x en una unidad, la y también aumenta en una unidad.

Formará un ángulo de 45° con cualquiera de los ejes.

El límite de una constante por una función es igual a la misma constante multiplicada por el límite de la función para un determinado punto en el cual esté definida dicha función.

Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$\text{lím}_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \text{lím}_{x \to x_0} f(x)$

donde k es una constante perteneciente a los números reales y f(x) está definida en el punto x_0.

Aplicación de derivadas La derivación es crucial en cuanto al cálculo se refiere,pero,¿para qué nos sirve en cálculo y las derivadas en primer lugar? Bien,tomemos en cuenta esto,el cálculo y todo lo que con llevase considera un paso más adelante de la matemática elemental, vamás allá,por así decir;resumiendo,la matemática elemental es constante,estática,fija,mientras que el cálculo es dinámico se enfoca en momentos,movimientos, aproximaciones,etc. Por ejemplo,aplicando la matemática elemental,si quiero saber en cuanto tiempo se consumirá un cigarrillo encendido,lo podemos hacer obteniendo datos como el tiempo en que se consume 1 cm del cigarro,pero,si queremos saber en cuánto se consume si lo están fumando, la frecuencia aumenta,varía con cada inhalación,en la primera se consumió2cm, en la segunda,½ cm, en la tercera3 cm, en este caso la matemática elemental puede que se quede atrás,para este caso utilizaríamos el cálculo para determinar el tiempo en consumirse;otro ejemplo,si se va en auto del punto A al B, cuya distancia comprende 64Km, con la matemática elemental,utilizaríamos una velocidad constante para determinar valores,como tiempos,o encaso de no tenerla,la distancia… pero cuando se viaja no se mantiene una misma velocidad de principio a fin¿o sí?, no, hay aceleraciones,retrasos,paros,y otras variaciones de velocidad,entonces para determinar los valores empleamos el cálculo. El cálculo y derivadas,además de servir para valores variables,también ayuda para la determinación de áreas irregulares,en el caso de límites,sirve para obtener la pendiente con solo un punto,y muchos usos más.

El concepto de razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas, tendrán una razón de cambio igual a cero. La razón de cambio más frecuente es la velocidad, que se calcula dividiendo un trayecto recorrido por una unidad de tiempo. Esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del vínculo que se establece entre la distancia y el tiempo. De acuerdo a cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un cuerpo, podemos conocer cuál es su velocidad. La razón de cambio instantánea también se denomina *segunda derivada* y hace referencia a la velocidad con la cual cambia la pendiente de una curva en un momento determinado. No olvidemos que la razón de cambio muestra la proporción en la que cambia una variable con respecto a otra o, desde un punto de vista gráfico, la pendiente de una curva.

Derivada de una suma

La derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una. $f(x) = u \pm v$ $\qquad f'(x) = u' \pm v'$

Derivada de una constante por una función

La regla de la derivada de una constante por una función se representa de la siguiente forma:

$f(x) = k \cdot u$ $\qquad f'(x) = k \cdot u'$

Derivada de un producto

“La derivada de un producto de dos funciones es igual a la suma entre el producto, de la primera función sin derivar, y la derivada de la segunda función y el producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar.”

$f(x) = u \cdot v$ $\qquad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

- Derivada de una constante partida por una función

- Derivada de un cociente

“La derivada de un cociente de dos funciones es la función ubicada en el denominador por la derivada del numerador menos la derivada de la función en el denominador por la función del numerador sin derivar, todo sobre la función del denominador al cuadrado”.

$$f(x) = \frac{u}{v} \qquad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

- Derivada de una constante

Esta regla es muy sencilla la derivada de una constante es igual a cero.

$$f(x) = k \qquad f'(x) = 0$$

Ejemplos de limites

Límite de una Constante:
El límite de una constante es la misma constante.
límx→x0 k=k
Ejemplo: límx→1 5=5

Límite de una Constante por una Función:
El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.
límx→x0 k · f(x) = k ·límx→x0 f(x)
Ejemplo: límx→0 10·(x - 1)/(x + 1)=10·límx→0 (x - 1)/(x + 1) = 10·(-1/1) = -10

Límite de la división o cociente de funciones:
El límite de la división de funciones es igual a la división de los límites de las funciones por separado.
límx→x0 f(x) / g(x) = límx→x0 f(x) / límx→x0 g(x)
Ejemplo: límx→ -2(x+2) / (x -1)=límx→ -2 (x+2) / límx→ -2 (x – 1) = 0 / (-3)= 0

Límite de la potencia:
El límite de la potencia es igual a la potencia de los límites de las funciones por separado.
Ejemplo:límx→ 1 5x(1+1/x) = límx→ 1 5x lím (1+1/x) = 52 = 25

Límite de la suma de funciones:
El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones por separado.
límx→x0 [f(x) + g(x)] = límx→x0 f(x) + límx→x0 g(x)
Ejemplo: límx→ -2 (x + 2)+1 / x= límx→ -2 (x +2)+ límx→ -2 1/x = 0 – ½ = -1/2.

Ejemplos de derivada

Derivadas de orden superior.

Dada una función $y = f(x)$, podemos calcular su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a continuación, podemos calcular la derivada de $f'(x)$:

$$(f'(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

a esta derivada se la llama derivada segunda de $f(x)$, y se expresa por $f''(x)$.

Por ejemplo, para la función $y = x^3$, tenemos que su derivada *primera* es:

$$y' = 3x^2$$

y su derivada segunda es:

$$y'' = 6x$$

Derivada de una constante

Tenemos una función constante:

$$y=k$$

La derivada de una función constante es cero:

$$y=k \;\longrightarrow\; y'=0$$

Vamos a demostrarlo calculando su función derivada utilizando la definición:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} \; 0 = 0$$

Por tanto, cada vez que la función sea una constante, la derivada será 0 y lo puedes poner directamente.

Por ejemplo: Calcular la derivada de la siguiente función:

$y=6$

Como es una función constante, escribimos directamente su derivada:

$y'=0$

Derivada de la función potencial

Una función potencial es aquella donde la x está elevada a un exponente. Para calcular su derivada, el exponente pasa a multiplicar a la x y se le resta 1 al exponente:

$y=x^n \;\longrightarrow\; y'=n.x^{n-1}$

En lugar de una x, podemos tener una función elevada a un exponente. En ese caso, la derivada se calcula pasando el exponente a multiplicar a la función, a cuyo exponente se le resta 1 y además todo lo anterior queda multiplicado por la derivada de la función:

$y=[f(x)]^n \;\longrightarrow\; y'=n.[f(x)]^{n-1}.f'(x)$

Por ejemplo, calcular la derivada de:

$y=x^2$

Pasamos el 2 multiplicando a la x y le restamos 1 al exponente:

$y'=2x^{2-1}=2x$

Vamos a ver otro ejemplo con una función elevada a un exponente: Derivar la siguiente función:

$y=(3x^2+x)^4$

Pasamos el exponente a multiplicar la función y al exponente de la función le restamos 1 y todo eso, lo multiplicamos por la derivada de la función, que esta compuesta por dos términos y su derivada será la suma de la derivada de cada uno de los términos:

$y'=4.(3x^2+x)^3.(6x+1)$

Derivada de una constante por una función

Cuando tenemos una constante que está multiplicando a una función, su derivada será esa constante multiplicada por al derivada de la función:

$y=k.f(x) \;\longrightarrow\; y'=k.f'(x)$

Por ejemplo:

$y=27x^3$

El 3 lo pasamos multiplicando y queda multiplicando al 27, que ya estaba. Al exponente de la x le restamos 1:

$$y' = 27.3x^2 = 81x^2$$

Derivada de una raíz

La derivada de una raíz es un caso particular de la función potencial cuando el exponente es fraccionario. La derivada de la raíz cuadrada de x es la siguiente:

$$y = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Si lo que tenemos es una función dentro de la raíz cuadrada, su derivada es:

$$y = \sqrt{f(x)} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} . f'(x)$$

En general, la derivada de una raíz, ya sea de x o de una función es:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}} . f'(x)$$

Por ejemplo:

$$y = \sqrt[7]{x}$$

En el denominador, el índice pasa a multiplicar a la raíz y se le resta 1 al exponente del radicando:

$$y' = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

Vamos a ver otro ejemplo de calcular la derivada de la raíz cuadrada de una función:

$$y = \sqrt{5x^4 + x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5x^4 + x^2}} . (20x^3 + 2x)$$