Ensayo

CALCULO

Ana Xasill Morales Hernandez
GRADO: 4° | GRUPO: BRH

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN:

La derivada de una función se define como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando tiende a cero.

Para encontrar la derivada de una función se utiliza la Regla General para la Derivación que consta de cuatro pasos:

Primer paso.- Se sustituye en la función “X” por ($X + \Delta X$), y “Y” por ($Y + \Delta Y$).

Segundo paso.- Se resta a la nueva función el valor de la función original, obteniendo únicamente Δy (incremento de la función).

Tercer paso.- Se divide la nueva ecuación Δy (incremento de la función) entre Δx (incremento de la variable independiente).

Cuarto paso.- Se calcula el límite cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero.

La regla general se puede representar a través de la siguiente ecuación:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(Y + \Delta Y) - f(Y)}{\Delta X}$$

EJEMPLOS DE RESOLUCION DE LA DERIVADA CON LA REGLA GENERAL

Ejemplo.- Hallar la derivada de la función:

$y = 3x^2 + 5$

(Primer paso) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$

$= 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$

(Segundo paso)

$$\begin{array}{rcl} y + \Delta y & = & 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ -\,y & = & -\,3x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad -5 \\ \hline \Delta y & = & 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{array}$$

(Tercer paso) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

(Cuarto paso) En el segundo miembro hagamos Δx ---->0. Y resulta:

$\frac{dy}{dx} = 6x.$

Reglas de derivación

La derivada de una constante

Según lo que hemos descubierto anteriormente **la derivada de una constante es cero.** Veamos un ejemplo.

$$f(x) = 7$$
$$f'(x) = 0$$

La derivada de una potencia entera positiva

Como ya sabemos, la derivada de x^n es $n\,x^{n-1}$, entonces:

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^4$$

Pero que sucede con funciones como $f(x) = 7x^5$, aún no podemos derivar la función porque no sabemos cual es la regla para derivar ese tipo de expresiones.

La derivada de una constante por una función.

Para derivar una constante por una función, es decir $cf(x)$, su derivada es la constante por la derivada de la función, o $cf'(x)$, por ejemplo:>

$$f(x) = 3x^5$$
$$f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$$

La derivada de una suma

Tampoco podemos diferenciar (o derivar) una suma de funciones. La regla para la derivada de una suma es $(f+g)' = f' + g'$, es decir, la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada uno de los términos por separado. Entonces:

$$f(x) = 2x^3 + x$$
$$f'(x) = 6x^2 + 1$$

La derivada de un producto

Aún no hemos dicho cual es la regla para derivar un producto de funciones, la regla para la derivada de un producto es *(fg)'= fg'+f'g*. En español esto se interpreta como "la derivada de un producto de dos funciones es la primera, por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera".

$$f(x)= (4x + 1)(10x^2 - 5)$$
$$f'(x)= 20x(4x + 1) + 4(10x^2 - 5)$$

La derivada de un cociente

Ahora daremos la regla para la derivada de un cociente.

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Traducción: la derivada de un cociente de dos funciones es (la segunda, por la derivada de la primera, menos la primera por la derivada de la segunda) entre la segunda al cuadrado.

$$f(x) = \frac{4x + 1}{10x^2 - 5}$$

$$f'(x) = \frac{4(10x^2 - 5) - 20x(4x + 1)}{(10x^2 - 5)^2}$$

Las derivadas de las funciones trigonométricas

Ahora daremos las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas.

$$f(x) = sen(x)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{sen(h + x) - sen(x)}{h}$$

$$= \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h) + \cos(h)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h) + \cos(h)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} \right] = \cos(x)$$

Ahora daremos el resto de las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas.

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x) = \operatorname{sen}(x)/\cos(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$
$f(x) = \cot(x) = \cos(x)/\operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -[\cot(x)\csc(x)]$

La regla de la cadena

Las reglas de derivación que hemos definido hasta ahora no permiten encontrar la derivada de una función compuesta como $(3x + 5)^4$, a menos que desarrollemos el binomio y luego se apliquen las reglas ya conocidas. Observa el siguiente ejemplo.

$$f(x) = (3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$
$$f'(x) = 18x + 30 = 6(3x + 5)$$

$$f(x) = (3x + 5)^3 = 27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$$
$$f'(x) = 81x^2 + 270x + 225 = 9(3x + 5)^2$$

$$f(x) = (3x + 5)^4 = 81x^4 + 540x^3 + 1350x^2 + 1500x + 625$$
$$f'(x) = 324x^3 + 1620x^2 + 2700x + 1500 = 12(3x + 5)^3$$

$$f(x) = (3x + 5)^5$$
$$= 243x^5 + 2025x^4 + 6750x^3 + 11250x^2 + 9375x + 3125$$

$$f'(x) = 1215x^4 + 8100x^3 + 20250x^2 + 22500x + 9375$$
$$= 15\,(3x + 5)^4$$

Observa que después de factorizar la derivada, en cada caso se obtiene la misma función pero con el exponente disminuido en 1, multiplicada por un factor que es igual al producto del exponente original por la derivada de la función base.

Teorema 14: La derivada de una potencia entera de una función f.

Sea $y=[f\,(x)]^n$, entonces:

$$y'=n[f(x)]^{(n-1)}\, f\,'(x)$$