Nombre del alumno:

Luis Miguel Gómez López

Nombre del profesor:

Yaneth Méndez León

Licenciatura:

Arquitectura

Materia:

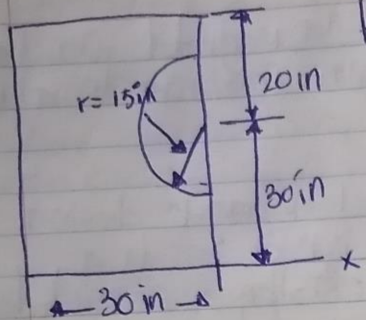
Estática

Nombre del trabajo:

Ejercicios

Comitán de Domínguez, Chiapas a 23 de julio de 2020.

Hallar el Centroide dela Figura



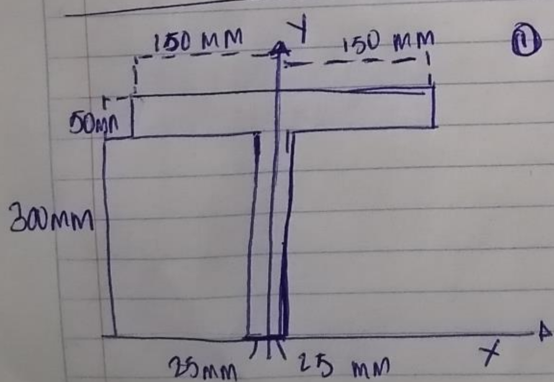
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i A_i}{\Sigma A}$$

Figura	Area (in^2)	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	9500	15 in	25 in	22500	37500
2	353.42	23,63	30 in	-8353	-10602.6
Σ	1146,58				26897.4

14148.69

$$\bar{x} = \frac{14148.69\ in^3}{1146.58\ in^2} = 12,33\ in$$

$$Y = \frac{26897.4\ in^3}{1146.58\ in^2} = 23.45\ in$$



① $300 + 50/2 = 325$

$300/2 = 150$

② $300 \times 50 = 15,000$

$300 \times 50 = 15,000$

③ 4875000

2,250,000

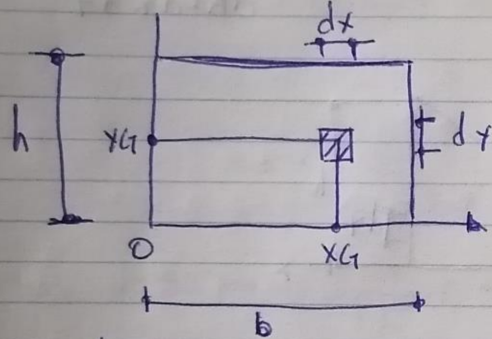
$$Y = \frac{\Sigma(\bar{y} \times A)}{\Sigma A} = \frac{7,125,00}{30,000}$$

$= 237.5$

Productos de inercia

Calculo del producto de Inercia I_{xy}

Para el calculo es conveniente dividir la sección en pequeños rectangulos de lados dx y dy.



El diferencial de área dA es, por lo tanto

$$dA = dx\,dy$$

y el Centroide de diferencial de área se encontrará en la posición.

$$X_G = x$$
$$Y_G = y$$

El producto de Inercia I_{xy} se calcula como

$$I_{xy} = \int_A x_G y_G \, dA = \int_A xy \, dA = \int_0^b \left(x \int_0^h y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^b \left(x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_0^b x \, dx = \frac{h^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b$$

$$= \frac{1}{4} b^2 h^2$$

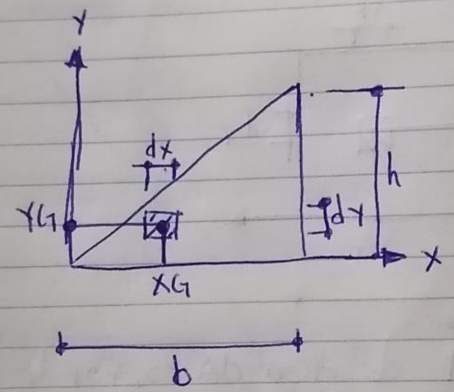
El valor de la Inercia $I_{x_g y_g}$ respecto de los ejes pasan por el Centroíde de la Sección se obtiene como

$$I_{x_g y_g} = I_{xy} - A \frac{h}{2} \frac{b}{2} = 0$$

Cálculo del producto de Inercia I_{xy} de la sección triangular

El diferencial de área se escribe como:

$$dA = dx\,dy$$



El centroide del diferencial de área se sitúa en la posición

$$x_G = x$$
$$y_G = y$$

El producto de la Inercia I_{xy} se calcula integrando con ambas variables:

$$I_{xy} = \int_A x_G y_G\, dA = \int_0^b \left(\int_0^{y(x)=\frac{h}{b}x} y\, dy\right) x\, dx \int_0^b \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{h}{b}x} x\, dy$$

$$= \frac{1h^2}{2b^2}\int_0^b x^3\, dx = \frac{1h^2}{2b^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^b = \frac{1}{8}b^2h^2$$

Y transportando el producto de Inercia hacia los ejes que pasan por el centroide (teorema de los ejes paralelos), obtenemos:

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - A\left(\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}h\right) = \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)b^2h^2 = \frac{1}{72}b^2h^2$$

Rotación de los ejes

Por una rotación de 45° de los ejes cartesianos xy, una cierta ecuación se transforma en $2x'^2+6y'^2=12$. Halle la ecuación original

Resolución

Para una rotación θ se conoce

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

Para: $\theta = 45° \Rightarrow x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \wedge y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \wedge y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

Reamplazamos en la ecuación inicial

$$2\left[\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right]^2 + 6\left[\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right]^2 = 12 \Rightarrow [x+y]^2 + 3[y-x]^2 = 12$$

Desarrollando $x^2 - xy + y^2 = \boxed{3}$

Indique la ecuación de $x^2 - xy + y^2 = 3$ luego de una rotación de ejes

Solución

Para eliminar el termino mixto xy, rotamos los ejes un ángulo θ:

$$tg\,\theta = \frac{B}{A-C} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{-1}{1-1}$$

$$\Rightarrow tg\,2\theta = \infty \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

Luego, aplicando las ecuaciones de Rotación:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Para $\theta = 45$ tenemos: $x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \wedge y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

Reemplazando en la ecuación original, resulta:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3$$

$$\Rightarrow 2x'^2 - 6y'^2 = 12 \Rightarrow \frac{x'^2}{6} - \frac{y'^2}{2} = 1$$