Regla de L´Hopital.

1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ x}$

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ x}$$

Se tiene la indeterminación $\frac{0}{0}$

aplicamos la regla de L'Hôspital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos\ x} = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(ln\ x)^3 + 2x}$$

Solución

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(ln\ x)^3 + 2x}$$

Se tiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Aplicamos la regla de L'Hôspital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(ln\ x)^3 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{3(ln\ x)^2}{x} + 2}$$

Formas indeterminadas.

Vamos con el primer ejemplo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} =$$

En primer lugar, sustituimos la x por el 3 para resolver el límite y nos da como resultado la indeterminación cero entre cero:

$$= \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} = Indeterminación$$

Por tanto, voy a descomponer en factores los polinomios del numerador y del denominador. El polinomio del numerador se trata de un producto notable, por lo que su descomposición es:

$$x^2-9=(x+3).(x-3)$$

El polinomio del denominador no se puede descomponer, ya que ya es de grado 1 y por tanto, ya está reducido al máximo, por lo que se queda igual.

Sustituyo el polinomio del numerador por su descomposición en factores y queda:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3).(x-3)}{x-3} =$$

El factor (x-3) está repetido en el numerador y en el denominador por lo que lo puedo eliminar:

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3).\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=$$

Quedando de la siguiente forma:

$$=\lim_{x\to 3}\ x+3=$$

Una vez hemos eliminado los factores repetidos, la indeterminación también se ha eliminado, por lo que podemos volver a sustituir la x por el 3 y llegar a la solución de límite:

$$=3+3=6$$

Integrales impropias.

1. $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

<u>Solución</u>:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\left.-\frac{1}{e^{x}}\right]_0^{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+\frac{1}{e^{0}}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+1\right)=(0+1);$$

$\therefore$ $\int_0^{\infty} e^{-x}dx=1.$

2. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b 5^{-x^2}(xdx) \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = -x^2 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad du = -2xdx, \ \Rightarrow \ -\frac{1}{2}du = xdx \quad (2)$$

Cuando: $\begin{cases} x = 0,\ u = 0 \\ x = a,\ u = -a^2 \end{cases} \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u\left(-\frac{1}{2}du\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^u\,du\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u\,du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left.\frac{5^u}{\ln 5}\right]_{-a^2}^{0}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^0}{\ln 5} - \frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5} - 0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}.$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\cosh x\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cosh x\,dx \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = x, \ \Rightarrow \ du = dx$$

$$\Rightarrow \quad dv = \cosh x\,dx, \ \Rightarrow \ v = \sinh x$$

De tal modo que, aplicando el método de integración por partes, se obtiene:

$$\int x\cosh x\,dx = x\sinh x - \int \sinh x\,dx = x\sinh x - \cosh x$$

Por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\left(x\sinh x - \cosh x\right]_a^0\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\left(x\sinh x - \cosh x\right]_0^b\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0\cdot\sinh 0 - \cosh 0 - (a\sinh a - \cosh a)\right) +$$
$$\lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0\cdot\sinh 0 - \cosh 0)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - 1 - a\sinh a + \cosh a\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0-1)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - 1 - a\sinh a + \cosh a\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0-1)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\cosh a - a\sinh a - 1\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b + 1\right)$$

La integral es divergente.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{x}\Big]_{a}^{0}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{x}}\Big]_{0}^{b}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{0}-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+\frac{1}{e^{0}}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+1\right) = (1-0)+(0+1);$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2.$$

Sucesiones.

• La sucesión -1, -2, 3, -4, -5, 6, -7, -8, 9 ... no es monótona. • La sucesión de término general (1)n n a n − = tampoco es monótona. • La sucesión de término general n a n = es monótona creciente y también estrictamente creciente. • La sucesión –1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2 ... es monótona creciente, pero no es estrictamente creciente. • La sucesión de término general 2 n a n = − es monótona decreciente y es también estrictamente decreciente. • La sucesión 1 1 1 1 1 1 1 1 1 , , , , , , , , , 2 2 3 4 4 5 6 6 7 … es monótona decreciente, sin embargo no es estrictamente decreciente.