NOMBRE DEL ALUMNO: Mauricio Castillo Ozuna

NOMBRE DEL MAESTRO: Juan José Ojeda Trujillo

NOMBRE DEL TRABAJO: Investigación punto 4.3 y 4.4

MATERIA: Matemática Aplicada

GRADO: Sexto Cuatrimestre

GRUPO: Único

Integrales impropias

Las denominadas *integrales impropias* son una clase especial de *integrales definidas* (integrales de Riemann) en las que el intervalo de integración o la función en el integrando o ambos presentan ciertas particularidades.

$\int_a^b f(x)dx$ es impropia si se presenta uno de los siguientes casos:

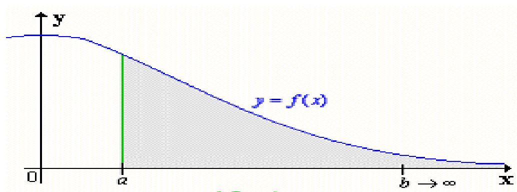
- $a=-\infty$ o $b=\infty$, o, $a=-\infty$ y $b=\infty$
- $f(x)$ no es acotada en alguno de los puntos de $[a,\ b]$, dichos puntos se llaman *singularidades* de $f(x)$.

Definición 1:

(i) Si f es continua $\forall x \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.
Observe la fig. 1.

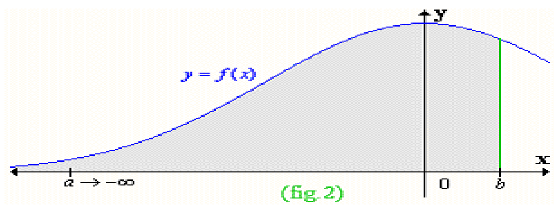


(fig. 1)

(ii) Si f es continua $\forall x \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.
Observe la fig. 2.



(fig. 2)

Definición 2:

Si f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$; entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Definición 3:

(i) Si f es continua $\forall x \in (a,\ b]$, y $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

si el limite existe.

(ii) Si f es continua $\forall x \in [a,\ b)$, y $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

si el limite existe.

Definición 4:

Si f es continua en todo número de $[a,\ b]$, excepto en c y $a < c < b$, y si además $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)dx$$

si los límites del miembro derecho existen.

Cuando los límites, en las definiciones anteriores, existen, se dice que la integral es *convergente*, en caso contrario, se dice que la integral es *divergente*.

Ejemplo:

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx$

Solución:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+\frac{1}{e^0}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right) = (0+1);$$

$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$

2. $\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx$

Solución:

$$\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b 5^{-x^2}(xdx) \qquad (\clubsuit)$$

Sea

$u = -x^2 \qquad (1),$

$\Rightarrow \quad du = -2xdx, \ \Rightarrow \ -\frac{1}{2}du = xdx \qquad (2)$

Cuando: $\begin{cases} x = 0,\ u = 0 \\ x = a,\ u = -a^2 \end{cases} \qquad (3)$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^0 5^u\left(-\frac{1}{2}du\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^0 5^u du\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^0 5^u du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left[\frac{5^u}{\ln 5}\right]_{-a^2}^0\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^0}{\ln 5}-\frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5}-\frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5}-0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}.$$

SUCESIÓNES

Una **sucesión** es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza, también pueden ser figuras geométricas o funciones.

Se llama término de una sucesión a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión. Para representar los diferentes términos de una sucesión se usa una misma letra con distintos subíndices, los cuales indican el lugar que ocupa ese término en la sucesión.

Por ejemplo:

En la sucesión: a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,… tenemos que: a5 = 5, ya que es el término de la sucesión que ocupa el quinto lugar.

En la sucesión: b) 2, 4, 6, 8 , 10,… el tercer término se denotaría b3 y correspondería al valor 6.

Dando su término general: Una sucesión tiene infinitos términos y se expresa frecuentemente por su término general an, que dado que an es una función que depende de n, basta con dar valores naturales a la indeterminada n para obtener cualquier término de la sucesión.

Ej: la sucesión tiene por término general:

$$a_n = \frac{3n+2}{n}$$

Podemos formar los términos de la sucesión dando sucesivamente a “n” los valores 1, 2, 3…, teniendo así por tanto:

- Para n=1: $a_n = \frac{3x1+2}{1} = 5$
- Para n=2: $a_n = \frac{3x2+2}{2} = 4$
- Para n=3: $a_n = \frac{3x3+2}{3} = \frac{11}{3}$

Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión: Si aseguramos una propiedad que cumple la sucesión, es más fácil saber el valor de an.

– Ej: gracias a las siguientes propiedades, obtén las sucesiones:

Sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, …

Sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11,…

Sucesión de los números naturales acabados en 9: 9, 19, 29, 39, …

Por una ley de recurrencia: se puede obtener un término a partir de otros anteriores. – Ej: Sabiendo que el primer término de una sucesión es 2, y cada término, salvo el primero, es triple del anterior, escribe los primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = 2 \text{ y } a_n = 3a_{n-1}$$

$$a_2 = 3a_1 = 3x2 = 6$$

$$a_3 = 3a_2 = 3x6 = 18$$

$$a_4 = 3a_3 = 3x18 = 54$$

Se dice que una sucesión de números reales es creciente cuando se verifica que cada término es menor o igual que el siguiente, es decir:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \ldots \leq a_n$$

Por el contrario, se dice que una sucesión es decreciente si cada término es mayor o igual que el siguiente:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_n$$