UNIVERCIDAD DEL SURESTE

TEMA:

Mapa conceptual de parabola

MATERIA:

Geometría analitica

FECHA DE ENTRGA:

PMartes, 16 de jun de 2020 A

jueves, 18 de jun de 2020

MAESTRO:

Jose Roberto quiroli gonzalez

ALUMNO:

Lavith fernando stivalet angulo

parabola

es la sección cónica de excentricidad igual a 1,[1] resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz

Historia

La tradición indica que las secciones cónicas fueron descubiertas por Menecmo en su estudio del problema de la duplicación del cubo, donde demuestra la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola, lo cual es confirmado posteriormente por Proclo y Eratóstenes.

Se denomina **parábola** al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que equidista de una recta fija, llamada directriz y de un punto fijo en el plano, que no pertenece a la parábola ni a la directriz, llamado foco.

Propiedades geométricas

Aunque la identificación de parábola con la intersección entre un cono recto y un plano que forme un ángulo con el eje de revolución del cono igual al que presenta su generatriz, es exacta, es común definirla también como un lugar geométrico

Lado recto

Al segmento de recta comprendido por la parábola, que pasa por el foco y es paralelo a la directriz, se le conoce como *lado recto*. Debido a la ecuación que representa a esta curva, surge el siguiente teorema

La longitud del lado recto es siempre 4 veces la distancia focal.

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Una parábola cuyo vértice está en el origen y su eje coincide con el eje de las ordenadas, tiene una ecuación de la forma y=ax2 donde el parámetro especifica la escala de la parábola, incorrectamente descrita como la forma de la parábola, ya que como se dijo antes, todas las parábolas tienen la misma forma. Cuando el parámetro es positivo, la parábola se abre «hacia arriba» y cuando es negativo se abre «hacia abajo».

Pueden haber muchas parábolas que tengan un mismo vértice (variando el parámetro a) en la primera ecuación. Sin embargo, dados dos puntos fijos, existe sólo una parábola que los tiene por vértice y foco ya que la directriz queda automáticamente fija como la perpendicular a la línea que une el foco con el vértice y a esa misma distancia del último.

Consideremos el caso especial en que el vértice es (0,0) y el foco es (0,p). La directriz es por tanto, la recta horizontal que pasa por (0,-p). A la distancia entre el vértice y el foco se le llama distancia focal, de modo que en este caso la distancia focal es igual a p. Con esta configuración se tiene:

Horizontal.	y^2= 4px	(P,0)	X= -P
	Ecuación	**Foco**	**Directriz**
Vertical.	x^2= 4py	(0,P)	Y= -P
	Ecuación	**Foco**	**Directriz**

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

Una parábola cuyo vértice está en el origen y su eje coincide con el eje de las ordenadas, tiene una ecuación de la forma $y=ax^2$ donde el parámetro *a* especifica la escala de la parábola, incorrectamente descrita como la *forma* de la parábola, ya que como se dijo antes, todas las parábolas tienen la misma forma. Cuando el parámetro es positivo, la parábola se abre «hacia arriba» y cuando es negativo se abre «hacia abajo».

Si bien, la expresión en forma de ecuación no fue posible hasta el desarrollo de la geometría analítica, la relación geométrica expresada en la ecuación anterior ya estaba presente en los trabajos de Apolonio.

Consideremos el caso especial en que el vértice es (0,0) y el foco es (*P,0*). La directriz es por tanto, la recta vertical que pasa por (-P,0). A la distancia entre el vértice y el foco se le llama *distancia focal*, de modo que en este caso la distancia focal es igual a *p*. Con esta configuración se tiene:

La ecuación de una parábola con vértice en (0,0). A continuación se muestran las fórmulas que se utilizan para el cálculo de ecuaciones, coordenadas del foco y la directriz.

Tipo	Ecuación	Foco	Directriz
Vertical	X^2=4PY	F(0,P)	D=Y= -P
Horizontal	Y^2=4PX	F(P,0)	D=X= -P

Ecuación de la parábola con vértice en punto (h,k)

las parábolas no siempre tienen el vértice en(0 , 0). En esta sección, trabajaremos con parábolas cuyo vértice es(h , k) , y aprenderemos cómo encontrar el foco, la dirección y el gráfico.

Recuerda que de la sección anterior aprendimos que la ecuación de una parábola es X2= 4 p y\ begin {align *} y ^ 2 = 4px \ end {align *} \ begin {align *} y = a (xh) ^ 2 + k \ end {align *} o y2= 4 p xy el vértice se encuentra en el origen. En el capítulo de *Funciones Cuadráticas* , aprendimos que la forma de vértice de una parábola esy= a (x - h)2+ k. Combinyo ambos, podemos encontrar la forma de vértice para las cónicas.

y(x - h)2(x - h)2= a (x - h)2+ k y X2= 4 p y=1una(y- k)= 4 p (y- k)Resuelve el primero para (x - h)2.Del # 13 en el concepto anterior, encontramos que 4 p =   1una.

Si la parábola es horizontal, entonces la ecuación será (y- k)2= 4 p (x - h)\ begin {align *} h \ end {align *} \ begin {align *} k \ end {align *} \ begin {align *} x \ end {align *} \ begin {align *} y \ end {align *}. Observar que aunque la orientación ha cambiado, los valoresh y k permanecen con los valores X mi y respectivamente.

Encontrar el foco y la dirección es un poco más complicado. Recurre a la tabla (de la sección anterior) para ayudarte a encontrar estos valores.

Observar la manera mediante la cual encontramos el foco y la dirección no cambia, mar pags positivo o negativo.

Ejemplo A

Analiza la ecuación (y- 1)2= 8 (x + 3). Encuentra el vértice, el eje de simetría, el foco y la dirección. Luego, determina si la función se abre hacia arriba, hacia abajo, o hacia los lados.

Solución: Primero, ya queyestá al cuadrado, sabemos que la parábola se abre hacia uno de los lados. Podemos concluir que la parábola se abrirá hacia la *derecha* ya que 8 es positivo, lo que significa quepagses positivo. Luego, encuentra el vértice. Usyo la ecuación general,(y- k)2= 4 p (x - h) , obtenemos que el vértice es (- 3 , 1) y el eje de simetría es y= 1. Al poner4 p = 8 obtenemos que p = 2. Al sumarpags al valor X -del vértice, obtenemos el foco, (- 1 , 1). Al restarlepags al valor X -del vértice, obtenemos la directriz, x = - 5 .

Ejemplo B

Gráfica la parábola del Ejemplo A. Traza el vértice, el eje de simetría, el foco y la directriz.

Solución: Primero, marca todos los valores fundamentales que encontramos en el Ejemplo 1. Luego, determina un conjunto de puntos simétricos que están en la parábola para asegurar de la curva es correcta. Six = 5 entonces y puede ser -7 o 9. Esto significa que ambos puntos (5 , - 7) y (5 , 9) están en la parábola.

Es importante resaltar las parábolas con una orientación horizontal sin son funciones, ya que no pasan por la prueba de las rectas verticales.

Ejemplo C

El vértice de una parábola es (- 2 , 4) y la directriz y= 7. Encuentra la ecuación de la parábola.

Solución: Primero, determinemos la orientación de esta parábola. Ya que la dirección es horizontal, conocemos la parábola se abrirá hacia arriba o hacia abajo (ver la tabla / imágenes anteriores). Sabemos también que la dirección está *sobre* el vértice, haciendo que la parábola se abra hacia abajo ypags será negativo (traza esto en un plano x - y si tienes dudas).

Para encontrar pags , podemos usar el vértice, el punto (h , k) y la ecuación de una directriz horizontal, y= k - p .

7 73- 3= 4 - p= - p= pRecuerde , p es negativo debido a la orientación hacia abajo de la parábola .

Ahora, usyo la forma general (x - h)2= 4 p (y- k) , podemos encontrar la ecuación de esta parábola.

(x - (- 2))2(x + 2)2= 4 (- 3) (y- 4)= - 12 (y- 4)

Revisión del Problema Introductorio Esta parábola es de forma(x - h)2= 4 p (y- k). En la tabla vista previamente en esta misma sección, podemos observar que el foco de una parábola de esta forma es(h , k + p). Por lo tanto, ahora debemos encontrar *h* , *k* , y *p* .

Si comparamos (x + 4)2= - 12 (y- 5) estafa (x - h)2= 4 p (y- k) , observamos que:

1) 4 = - h o h = - 4

2) - 12 = 4 p o p = - 3

3) 5 = k

De esto podemos concluir que k + p = 5 + (- 3) = 2 .

Por lo tanto, el foco de la parábola es (- 4 , 2) y Carlos estaría en lo cierto.

Elementos y ecuación de una parábola con vértice (h,k)

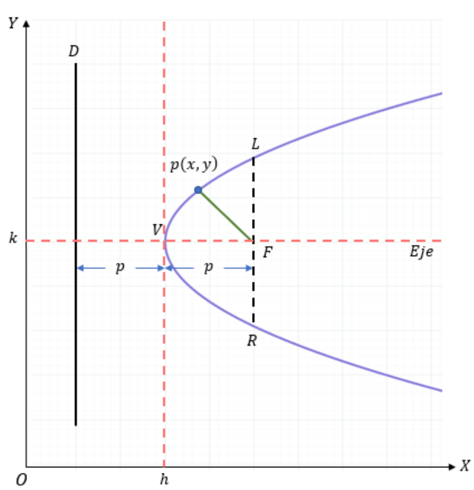
Después de analizar el caso de la parábola con vértice en el origen, ahora toca el estudio de la **ecuación de la parábola con vértice fuera del origen,** que es prácticamente muy sencillo si le entendemos desde el comienzo. Así que veamos como resolver este tipo de problemas, pero primero comprendamos como está estructurado los elementos de la parábola.

Elementos y Ecuación de la Parábola con Vértice fuera del Origen

Las parábolas se caracterizan por tener un vértice, un foco, una directriz, una ecuación del eje, el lado recto, la concavidad (hacía donde abre), y finalmente la **ecuación ordinaria,** todo varía dependiendo del tipo de parábola que tengamos, puede ser una parábola horizontal o una parábola vertical.

- **Parábola Horizontal con Vértice (h, k)**

Veamos la gráfica



Vemos que se trata de una parábola horizontal, y que su vértice está fuera del origen. Su eje es paralelo al eje “X” y es cóncava hacia la derecha o izquierda, según sea el caso.

Ecuación Ordinaria

La ecuación ordinaria para este tipo de parábola horizontal es la siguiente:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Ecuación General

La ecuación general de la parábola es la siguiente:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Elementos de la parábola

Se considera que la parábola posee su vértice “V” justamente en el punto (h,k) “Note las líneas punteadas color naranja en la gráfica”.

1 **Vértice:**

$V(h,k)$

2 **Foco:**

$F(h+p,k)$

3 **Directriz:**

$\overline{DD'}: x = h - p$

4 **Lado Recto:**

$\overline{LR} = |4p|$

5 **Ecuación del eje:**

$y = k$

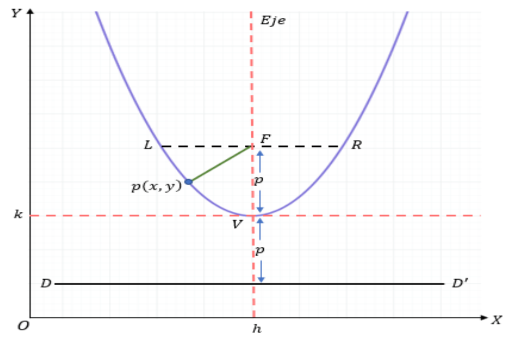
Concavidad

🔶 Si p > 0 entonces se dice que la parábola será cóncava hacia la derecha.

🔶 Si p < 0 entonces se dice que la parábola será cóncava hacia la izquierda.

🔷 **Parábola Vertical con Vértice (h, k)**

Veamos la gráfica:



Ecuación Ordinaria

La ecuación ordinaria para este tipo de parábola horizontal es la siguiente:

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Ecuación General

La ecuación general de la parábola es la siguiente:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Elementos de la parábola

Se considera que la parábola posee su vértice "V" justamente en el punto (h,k) "Note las líneas punteadas color naranja en la gráfica".

1 **Vértice:**

$$V(h, k)$$

2 **Foco:**

$$F(h, k+p)$$

3 **Directriz:**

$$\overline{DD'} : y = k - p$$

4 **Lado Recto:**

$$\overline{LR} = |4p|$$

5 **Ecuación del eje:**

$$x = h$$

Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos

Tal como vimos, la expresión de una función cuadrática requiere de tres parámetros, que obtenemos a partir de los coeficientes, las coordenadas del vértice y/o las raíces reales, si es que existen.

Obtengamos ahora la expresión de una función cuadrática conociendo tres puntos cualesquiera que pertenecen a su gráfico.

Ejemplo: Halla la expresión polinómica de la función cuadrática cuyo gráfico contiene los puntos P1= (-1; 6), P2=(2; 3), P3=(3; 10)

Trabajaremos con la fórmula: $y = ax^2 + bx + c$

Como los tres puntos pertenecen al gráfico de f(x), reemplazamos las coordenadas de cada uno en su expresión:

P1= (-1; 6) => x = -1; y = 6 => a(-1)2+ b(-1)+c = 6 => 1.a - 1 b + c = 6

P2= (2; 3) => x = ... ; y = … => $a(2)^2$+ b(2)+ c = 3 => 4 a + 2 b + c = 3

P3= (3; 10) => x = ...; y = … => $a(\ldots)^2$+ b(…)+c = …. => 9 a + 3 b + c = 10

Observen que nos quedo planteado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, para resolverlo utilizaremos el método de Igualación:

1.a - 1 b + c = 6 (1)

4 a + 2 b + c = 3 (2)

9 a + 3 b + c = 10 (3)

Despejamos c en (1) y (2) e igualamos

(1) 1.a - 1 b + c = 6 => c = 6-a + b

(2) 4 a + 2 b + c = 3 => c= 3- 4a - 2 b => 6-a + b = 3 - 4a - 2b

6- a + b - 3 + 4a + 2b = 0

3 + 3a + 3b = 0 (*)

Haciendo lo mismo con (2) y (3) nos queda

(2) 4 a + 2 b + c = 3 => c= 3 - 4a - 2b

(3) 9 a + 3 b + c = 10 => c= 10- 9a - 3b => 3 - 4a - 2b = 10- 9a - 3b

=> 3 - 4a - 2b -10+ 9a + 3b=0

-7 + 5a +b = 0 (*)

Igualando las ecuaciones marcadas con (*)

$$3 + 3a + 3b = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 - 3b}{3}$$

$$-7 + 5a + b = 0 \Rightarrow a = \frac{-b + 7}{5}$$

Luego (-3- 3b) 5 = (-b + 7) 3 => -15 - 15 b = -3b + 21 => -15 - 21 = -3b + 15 b=> -36 = 12 b=> b= -3

$$\text{Como } b= -3 \Rightarrow a = \frac{-3 - 3 \cdot (-3)}{3} \Rightarrow a = 2$$

Reemplazamos b por -3 y a por 2 en , por ejemplo c= 3 - 4a - 2b => c= 3 - 4 . 2 - 2 . (-3) => c= 1

Luego la fórmula pedida es: $f(x)= 2 x^2 - 3 x + 1$

Ecuación de una recta tangente a una parábola

En una recta tangente a una curva en un punto, su pendiente es la derivada de la función en dicho punto y se expresa de la siguiente manera:

$$tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

La recta tangente a una curva en un punto

Así mismo, la recta tangente a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto $(a, f(a))$ y cuya pendiente es igual a $f'(a)$, una vez que se conoce la pendiente de la recta y los puntos por los que pasa, su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$, que es paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.

Primero: De la ecuación de la recta despejamos y de la siguiente manera:

$$y = -3x + 2$$

Segundo: Con la información antes descrita, sabemos que la pendiente de la recta es la derivada de la función anterior, que corresponde al coeficiente de la misma:

$$f^{'}(a) = -3$$

Tercero: Con base en lo anterior, las dos rectas paralelas deberán tener la misma pendiente, por lo tanto si derivamos la ecuación de la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ tenemos que:

$$f^{'}(a) = 2a - 5$$

Siendo la misma pendiente para las dos rectas:

$$2a - 5 = -3$$

$$a = 1$$

Cuarto: Una vez que se tiene el valor de la coordenada x, este se sustituye en la ecuación de la parábola para hallar la segunda coordenada de la función:

$$y = 1^2 - 5(1) + 6$$

$$P\,(1, 2)$$

Quinto: Finalmente, aplicamos la ecuación de la recta punto-pendiente:

$$y - 2 = -3(x - 1) \qquad y = -3x + 5$$

Note que, como la recta es paralela a la curva dada, tienen la misma pendiente.