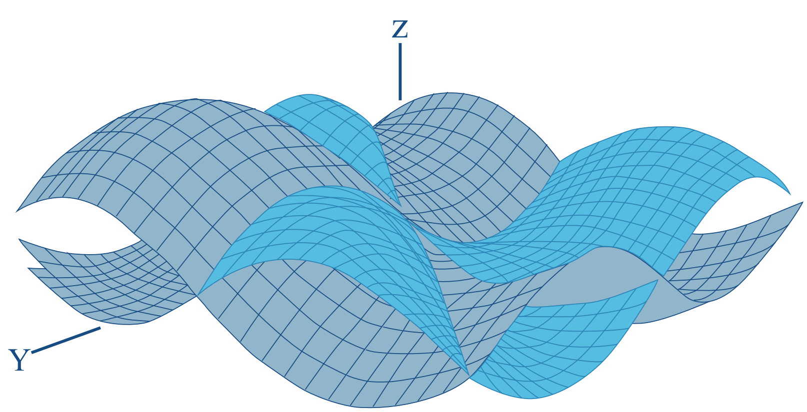
2. Identidades trigonométricas fundamentales

En este tema te hablaremos de las **identidades trigonométricas**, igualdades que involucran funciones trigonométricas y se verifican para cualquier valor permisible de la variable o variables que se consideren, es decir, para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los cuales se aplican las funciones. También comprenderás de dónde provienen y conocerás sus relaciones fundamentales (te presentaremos otras relaciones interesantes en un formulario trigonométrico). Todo ello lo podrás utilizar para resolver diversos problemas que requieren la suma o resta de ángulos de las identidades trigonométricas.

Si la gráfica de dos funciones coincide, entonces es una identidad. En cambio, si solamente se cortan en uno o algunos puntos, entonces se trata de una ecuación trigonométrica cuyas soluciones son las abscisas de los puntos de corte. ¿La siguiente imagen sería una identidad o una ecuación trigonométrica?



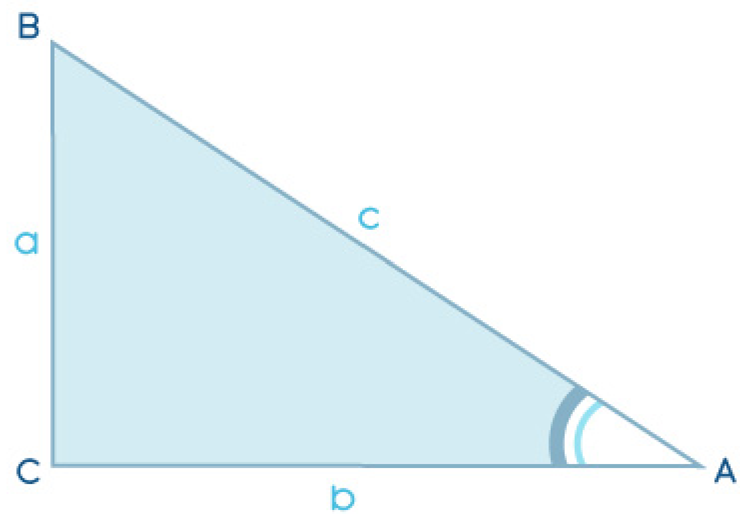
Como las gráficas no coinciden, se trata de la representación de una ecuación trigonométrica.

Según su **forma**, las identidades trigonométricas adquieren distintos nombres: **identidades trigonométricas de cociente** e **identidades trigonométricas pitagóricas**. A continuación definimos cada una de ellas.

2.1 Identidades trigonométricas de cociente

Las identidades trigonométricas de cociente son dos: **tangente y cotangente**, y tienen la propiedad de relacionar, por medio de un cociente, las funciones trigonométricas seno y coseno.

Si consideramos el siguiente triángulo rectángulo ***ABC***:



Función	Cociente	Demostración
Tangente A	La razón de seno *x* entre coseno de *x* se cumple para: $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
Cotangente A	La razón de coseno *x* entre coseno de *x* se cumple para: $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$	$\frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$ $\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}$ $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$

Da clic en la imagen para ampliar o reducir.

Toma en cuenta que **las identidades trigonométricas tangente y cotangente** están definidas por la relación del seno y el coseno por medio de un cociente; en cambio, **la función trigonométrica** se define por la relación, por medio de un cociente, de los catetos de un triángulo rectángulo.

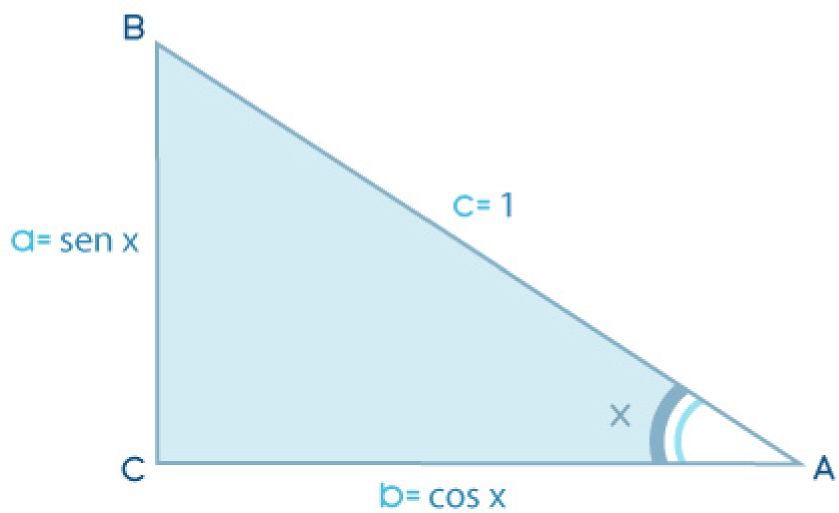
2.2 Identidades trigonométricas pitagóricas

Las identidades trigonométricas pitagóricas se obtienen al aplicar el teorema de Pitágoras a las definiciones de las funciones trigonométricas. Son **tres identidades** y se cumplen para cualquier valor del ángulo ***x***. Enseguida te mencionamos cuáles son y cómo se obtienen.

Para tal fin, nos auxiliaremos de la construcción de diferentes triángulos, que se derivan de otros a partir de los cuales obtuvimos las gráficas de las funciones trigonométricas. ¿Recuerdas en el tema anterior el círculo unitario y la construcción de gráficas?

- ***sen² x + cos² x = 1***

Tenemos un triángulo ***ABC,*** en donde la hipotenusa es igual a **1**, el cateto opuesto es igual a ***sen x*** y el cateto adyacente es igual a ***cos x*** .



$$\operatorname{sen} x = \frac{a}{1} \quad \cos x = \frac{b}{1}$$

Si despejamos:

$$a = (1)\operatorname{sen} x \therefore a = \operatorname{sen} x \qquad b = (1)\cos x \therefore b = \cos x$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

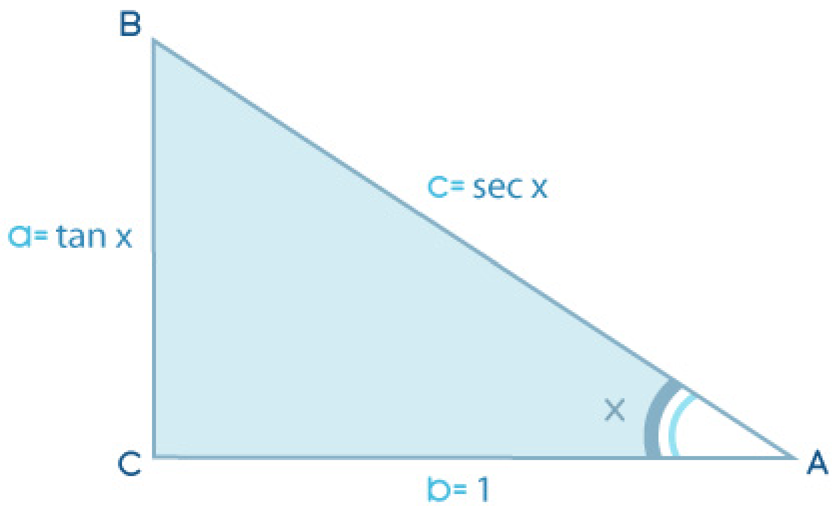
Sustituyendo:

$$(1)^2 = (\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2$$

$$\boldsymbol{1 = sen^2 x + cos^2 x}$$

- ***sec^2 x = tan^2 x + 1***

Supongamos que tenemos un triángulo ***ABC,*** en donde el cateto adyacente es igual a **1** y el cateto opuesto es igual a ***tan x*** , por lo que la hipotenusa debe cumplir con ser igual a la ***sec x***



$$\tan x = \frac{a}{1} \quad \sec x = \frac{c}{1}$$

Si despejamos:

$$a = (1) \tan x \therefore a = \tan x \qquad c = (1) \sec x \therefore c = \sec x$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo:

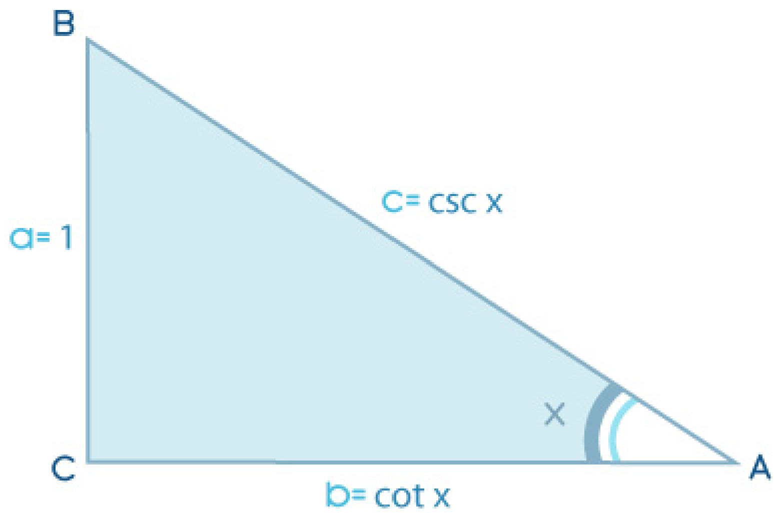
$$\sec^2 x = (\tan x)^2 + (1)^2$$

sec^2 x = tan^2 x + 1

Con lo que queda demostrada esta identidad.

- ***csc^2 x = 1 + cot^2 x***

Supongamos que tenemos un triángulo ***ABC,*** en donde el cateto opuesto es igual a **1** y el cateto adyacente es igual a ***cot x*** , por lo que la hipotenusa cumple con ser igual a la ***csc x*** .



$$\cot x = \frac{b}{1} \qquad \csc x = \frac{c}{1}$$

Si despejamos:

$$b = (1)\cot x \therefore b = \cot x \qquad c = (1)\csc x \therefore c = \csc x$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo:

$$\csc^2 x = (1)^2 + (\cot x)^2$$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

Con lo que queda demostrada esta identidad.

Es importante comprender los procesos para resolver problemas, pero en ocasiones será necesario que memorices algunas definiciones y relaciones, como es el caso de las identidades trigonométricas. Saber las definiciones y las identidades (sin tener que consultar en cada ocasión tus notas), te facilitará la resolución de problemas porque podrás identificar rápidamente los datos y las funciones trigonométricas (o identidades) que los relacionan.

2.3 Demostración de identidades trigonométricas

Como habíamos mencionado, **una identidad es una relación que contiene funciones trigonométricas.** Además de las antes descritas —cociente y pitagóricas—, existen otras identidades que se expresan por medio de una igualdad, y que son válidas para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones, y se denominan *recíprocas*.

No existe un método específico para verificar una identidad, sólo algunas sugerencias. Para comprobar las identidades se puede proceder de la siguiente manera:

1. Se transforma uno de los miembros de la igualdad, cualquiera de los dos en el otro (generalmente se transforma el miembro más complicado). Se escriben las funciones en términos de senos y cosenos.

2. Se simplifica la expresión de un lado de la igualdad; la otra no se altera. Para ello se sugiere que se realicen las operaciones indicadas como factorizar, simplificar, suma de fracciones, etcétera.

3. Para poder realizar las demostraciones deberás tener un completo dominio de las definiciones de las funciones trigonométricas y las ocho relaciones fundamentales y saberlas de memoria.

En la siguiente tabla se resumen las ocho relaciones fundamentales

Recíproca	Cociente	Pitagóricas
$\text{senx} \bullet \csc x = 1$	$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$	$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\text{cosx} \bullet \sec x = 1$	$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\tan x \bullet \cot x = 1$		$\text{esc}^2 x = 1^+ \cos^2 x$

Da clic en la imagen para ampliar o reducir.

Como vimos en la definición, una identidad trigonométrica es cualquier igualdad que involucra funciones trigonométricas y **se verifica para cualquier ángulo.** A continuación te mostramos algunas identidades trigonométricas, comprueba que sean verdaderas.

En los siguientes ejemplos, verás cómo se pueden demostrar algunas identidades trigonométricas de acuerdo con el procedimiento antes sugerido.

Ejemplo 1. Demostrar la siguiente identidad:

$$\text{sen } x \bullet \sec x \bullet \cot x = 1$$

Demostración:

Reescribimos el primer miembro de la igualdad, expresándolo en función de senos y cosenos; para hacerlo utilizamos las relaciones fundamentales.

$$\text{sen}x.\,\frac{1}{\cos x}.\,\frac{\cos x}{\text{sen}x}=1$$

Reducimos términos semejantes (simplificamos la expresión).

$$\frac{\text{sen}x\cos x}{\cos x\,\text{sen}x}=1$$

Por lo tanto:

$\boxed{1=1}$ q. e. d.

Ejemplo 2. Demostrar si la siguiente identidad es verdadera.

$$\frac{\text{sen}x}{\csc x}+\frac{\cos x}{\sec x}=1$$

Demostración:

Escribimos en términos de senos y cosenos utilizando las identidades recíprocas.

$$\frac{\text{sen}x}{\frac{1}{\text{sen}x}}+\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}}=1$$

Podemos escribir la operación de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{\text{sen}x}{1}}{\frac{1}{\text{sen}x}}+\frac{\frac{\cos x}{1}}{\frac{1}{\cos x}}=1$$

Efectuando la operación de extremos por extremos y medios por medios tenemos:

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1$$

Por la identidad pitagórica el miembro de la izquierda es igual a 1, por lo tanto:

***1* = *1* q. e. d.**

2.4 Otras identidades trigonométricas (formulario trigonométrico)

Existen otras identidades trigonométricas que, junto con las ocho identidades fundamentales, forman parte del formulario trigonométrico que te mostramos a continuación.

Formulario trigonométrico.pdf

El formulario trigonométrico es un compendio de identidades trigonométricas que **siempre se cumplen** (están demostradas) y sirve para resolver diversos problemas, como el que te mostramos a continuación.

Dadas las siguientes funciones:

$$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5} \text{ y } \operatorname{sen} B = \frac{12}{13}$$

Problema:

Calcula las seis funciones trigonométricas de la suma de los ángulos, es decir, *sen (A + B)* , *cos (A + B)* , *tan (A + B)*, etc.

Solución:

Para encontrar las seis funciones trigonométricas del ángulo *(A + B)*, recurrimos a las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \ \tan B}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A . \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\sec(A+B) = \frac{1}{\cos(A+B)}$$

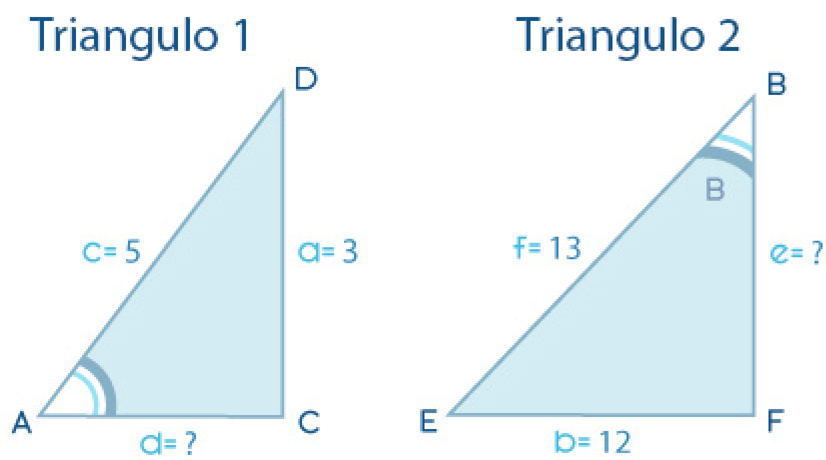
$$\csc(A+B) = \frac{1}{\operatorname{sen}(A+B)}$$

Las fórmulas nos muestran que para encontrar las funciones de los ángulos *(A + B)*, primero necesitamos calcular todas las funciones trigonométricas para cada ángulo por separado, es decir, las funciones trigonométricas de *A* y las de *B*.

¿Cómo podrías calcular, a partir de la información de la función seno, las demás funciones trigonométricas de un triángulo? Aunque suena complicado, es un problema que puedes resolver con lo que has aprendido hasta el momento.

Lo primero que debes hacer es construir los triángulos rectángulos que representen adecuadamente a $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$ y $\operatorname{sen} B = \frac{12}{13}$

Por ejemplo, conocemos que el $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$, podemos determinar que el cateto opuesto al ángulo *A* es igual a 3 y la hipotenusa es igual a 5 (por la definición). Falta encontrar el valor del cateto adyacente. Se sigue un razonamiento similar para $\operatorname{sen} B = \frac{12}{13}$. Observa los siguientes triángulos:



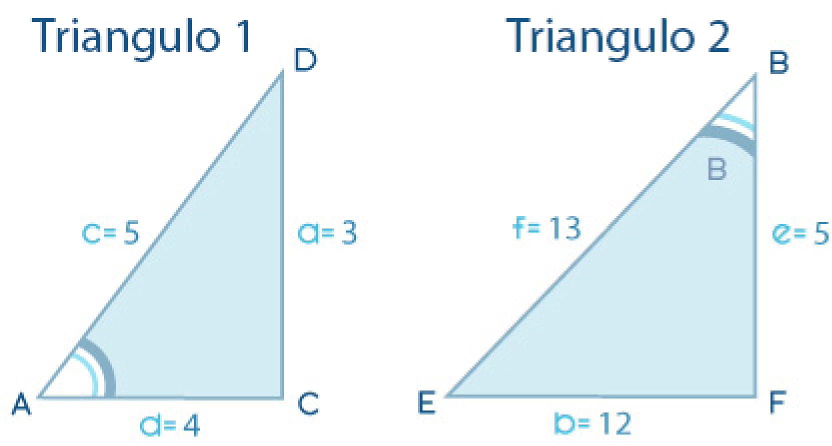
De acuerdo con los triángulos 1 y 2 es necesario calcular el valor de los lados *d* y *e*, respectivamente.

Aplicando el teorema de Pitágoras para cada triángulo tenemos:

Triángulo 1	Triángulo 2
Sustituyendo los valores de a y c	Sustituyendo los valores de b y f
$5^2 = 3^2 + d^2$	$13^2 = e^2 + 12^2$
Despejando d	Despejando e
$d^2 = 5^2 - 3^2$	$e^2 = 13^2 - 12^2$
$d = \sqrt{25 - 9}$	$e = \sqrt{169} - 144$
$d = \sqrt{16} \quad \therefore \quad d = 4$	$e = \sqrt{25} \quad \therefore \quad e = 5$

Da clic en la imagen para ampliar o reducir.

Sustituimos los valores encontrados en los triángulos respectivos:



Con esta información ya es posible calcular el *sen(A+B)* y *cos(A+B)*, porque tenemos todos los valores para sustituirlos en las fórmulas, como se muestra a continuación.

sen(A+B) = senAcosB + sen B cosA	cos(A+B) = cosA cosB - sen A sen B
sen (A+B) = $\frac{3}{5}\bullet\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\bullet\frac{4}{5}$	cos (A+B) = $\frac{4}{5}\bullet\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\bullet\frac{12}{13}$
sen (A+B) = $\frac{3}{13}+\frac{48}{65}$	cos (A+B) = $\frac{4}{13}+\frac{36}{65}$
sen (A+B) = $\frac{3(5)+48(1)}{65}$	cos (A+B) = $\frac{4(5)+36(1)}{65}$
sen (A+B) = $\frac{15+48}{65}$	cos (A+B) = $\frac{20+36}{65}$
sen (A+B) = $\frac{63}{65}$	cos (A+B) = $\frac{16}{65}$

Da clic en la imagen para ampliar o reducir.

Pero el problema no está totalmente resuelto, aún falta obtener las demás funciones, *tan (A+B)* y *cot (A+B)*.

Ahora, como reto personal, calcula la ***sec (A+B)*** y la ***csc (A+B)*** en tu cuaderno.

Con esto ya tienes las seis funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Podemos concluir que las identidades son útiles cuando se precise simplificar expresiones que incluyen funciones trigonométricas. Otra aplicación importante de éstas es el cálculo de integrales indefinidas de dichas funciones.

Las identidades se emplean en el cálculo de ecuaciones trigonométricas porque nos ayudan a simplificar las expresiones y dejar todo expresado en función de un único ángulo, que generalmente es la incógnita a resolver.

En el siguiente tema aplicarás la trigonometría en la solución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.