Sea una función y = f(x) y x0 un punto del eje X. Si se toma un punto x0 + h muy próximo a x0 (h es un número infinitamente pequeño), a medida que se hace tender h a cero, la recta secante (en rojo de la figura) que une los puntos

(x0, f(x0)) y (x0 + h, f(x0 + h)), tiende a confundirse con la tangente (en azul de la figura) a la curva en el punto (x0,f(x0)).

que determina la tangente con ese mismo eje, en el triángulo rectángulo de vértices

Al hacer tender h a cero, y puesto que la secante tiende a confundirse con un segmento

de la tangente, es decir, si miras la figura, al hacer que h tienda a cero la línea roja se acerca a la línea azul por lo que:

tg ah tiende a tg a, es decir,

a la pendiente de la tangente a la curva en el punto (x0,f(x0)).

Esto se expresa matemáticamente así:

Sea una función y = f(x) y x0 un punto del eje X. Si se toma un punto x0 + h muy próximo a x0 (h es un número infinitamente pequeño), a medida que se hace tender h a cero, la recta secante (en rojo de la figura) que une los puntos

(x0, f(x0)) y (x0 + h, f(x0 + h)), tiende a confundirse con la tangente (en azul de la figura) a la curva en el punto (x0,f(x0)).

que determina la tangente con ese mismo eje, en el triángulo rectángulo de vértices

(x0,f(x0)), (x0 + h,f(x0 + h)) y (x0 + h,f(x0)), se verifica:

Al hacer tender h a cero, y puesto que la secante tiende a confundirse con un segmento

de la tangente, es decir, si miras la figura, al hacer que h tienda a cero la línea roja se acerca a la línea azul por lo que:

tg ah   tiende a tg a, es decir,

a la pendiente de la tangente a la curva en el punto (x0,f(x0)).

Esto se expresa matemáticamente así:

NOTA: Es importante que entiendas esto, pues es el núcleo por

el que después entenderás otros conceptos,

si no es así, dímelo

Derivada de una función en un punto

Dada una función y = f(x), se llama derivada de la función f en un punto x0 al

f '(x0) (efe prima de equis sub-cero) o por D(f(x0)):

Cuando este límite existe (y es finito) se dice que la función f(x) es derivable en el punto x0.

Significado de la derivada

Puesto que

la derivada de la función en un punto x0 no es otra cosa que la pendiente de la tangente a la curva (gráfica de la función) en (x0, f(x0)).

Calcular la derivada de la función f(x) = 3x + 5 en el punto de abscisa x = 1.

Resolución:

Se pide el valor de f '(1) (en este caso, x0 = 1).

Por tanto, f '(1) = 3.

Calcular la derivada de la función

f(x) = en el punto 2.

Resolución:

(conjugado del numerador)

Recordando que suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados:

Ejercicio: cálculo de la ecuación de la tangente a una función en un punto

Calcular la ecuación de la tangente a la curva f(x) = x2 en el punto de abscisa 2.

Resolución:

La tangente pasa por el punto (2, f(2)) = (2,4).

La pendiente (m) de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2 es, por definición, f '(2), luego la ecuación de la recta es de la forma

y - y0 = m (x - x0)

y - 4 = f '(2) (x - 2).

La ecuación de la tangente es entonces

$y - 4 = 4(x - 2)$

$y - 4 = 4x - 8$

$4x - y - 4 = 0.$

Ejercicio: estudio de la derivabilidad de una función en un punto

Estudiar la derivabilidad de la función f(x) definida por

Resolución:

a) Derivabilidad en $x1 = 1$.

Se han de considerar dos casos:

1º Lo que pasa a la derecha de este punto, para ello consideraremos $h>0$

Si $h > 0$, lógicamente $(x1 + h) = 1 + h > 1$ y en este caso estamos muy cerca del punto azul del figura pero a la derecha, por lo que la función es la línea recta roja $f(x) = x$. Por tanto:

$f(1) = 1$ y $f(1+h) = 1 + h$

Este límite es el «límite por la derecha» e indica que la tangente a la derecha de 1 tiene por pendiente 1.

2º Lo que pasa a la izquierda de este punto, para ello consideraremos $h<0$

Si $h < 0$, lógicamente $(x1 + h) = < 1$ y en este caso estamos muy cerca del punto azul del figura pero a la izquierda, (por lo que la función es la línea azul $f(x) = x2$. Por tanto:

$f(1) = 1$ y

$f(1+h) = (1 + h)2 = 1 + 2h + h2$

Este límite es el «límite por la izquierda» e indica que la tangente a la izquierda de 1 tiene por pendiente 2.

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 1, no existe tal límite y, por tanto, la función f(x) no es derivable en x = 1.

b) Derivabilidad en x = 0.

En este caso no es necesario considerar h > 0 y h < 0 ya que en las proximidades de cero

(h es muy pequeño) la función es f(x) = x2.

El límite existe y es cero, luego f(x) es derivable en x0 = 0 y la pendiente de la tangente es cero (paralela al eje de abcisas).

Estudiar la derivabilidad de la función

f (x) = |x| (valor absoluto de x) definida por

Resolución:

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 0, la función f (x) = |x| no es derivable en dicho punto.

¿Cuándo hay que considerar límites a derecha e izquierda al calcular la derivada de una función en un punto?

Si al dibujar la curva se observa que en el punto considerado ésta cambia bruscamente de dirección, es necesario considerar límites a derecha e izquierda, puesto que, en este caso, la tangente no se comporta de igual modo y se «quiebra».

Consecuencias de la definición de derivada en un punto

1. Si existe la derivada de una función f(x) en un punto (x0, f(x0)), existen las derivadas a derecha e izquierda de x0 y tienen que ser iguales; de lo contrario no existiría f'(x0).

Puede ocurrir, no obstante, que existiendo las derivadas a derecha e izquierda éstas sean distintas. En este caso no existe la tangente en (x0, f(x0)), sino dos semirrectas, cada una tangente a uno de los arcos en que el citado punto divide a la curva. Los puntos en que esto ocurre se llaman puntos angulosos.

Los puntos x1 de la primera figura y x0 de la segunda que hemos estudiado son puntos angulosos: la curva cambia bruscamente de dirección en ellos. La función correspondiente no es derivable en las abscisas de dichos puntos.

No es difícil, consecuentemente, imaginar la gráfica de una función que no sea derivable en muchos e, incluso, infinitos puntos.

Tangente a una curva en un punto

El concepto de derivada facilita la definición de tangente a una curva en un punto como el límite de una secante que pasa por él y por otro punto cualquiera de la curva cuando éste último, recorriendo la curva, tiende a coincidir con el primero.

Propiedad

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Demostración:

Sea una función y = f(x) derivable en un punto x0. Para probar que la función es continua en él, es preciso demostrar que

o lo que es equivalente, que

Veamos, si la expresión f(x0 + h) - f(x0) la multiplicamos y dividimos por h

aqui vemos que el primer término del producto anterior es precisamente la derivada de f(x) en el punto x0, (recordar que partímos de la tesis que f(x) es derivable) es decir vale f ' (x0) y el segundo término vale 0 pues es el límite de h cuando h tiende a cero.-

Así pues tenemos que:

Esta propiedad evita el trabajo de estudiar la derivabilidad de una función en un punto donde ésta no sea continua.

Por el contrario, puede darse el caso de una función continua en todos los puntos y no ser derivable en alguno, e incluso infinitos puntos. Valga como ejemplo la función $|x|$, que siendo continua en todos los puntos de la recta real, no es derivable, como ya se ha comprobado, en el origen.