Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

ddxsinh^{-1}u=11+u^{2}−−−−−√dudx u∈R	ddxcsch^{-1} u=−1|u|1+u^{2}−−−−−√dudx u≠0
ddxcosh^{-1}u=1u^{2}−1−−−−−√dudx u>11" />1" />	ddxsech^{-1} u=−1u1−u^{2}−−−−−√dudx 0<u<1< u < 1" />< u < 1" />
ddxtanh^{-1}u=11−u^{2}dudx |u|<1<1" /><1" />	ddxcoth^{-1}u=11−u^{2}dudx |u|>11" />1" />

Ejemplo

Deriva la derivada de sinh^{-1}x :
Solución:

Sabemos que sinh^{-1}x=ln(x+x^{2}+1−−−−−√) . Digamos que u=x+x^{2}+1−−−−−√ ; entonces sinh^{-1}x=ln(u) .
Evaluar la derivada resulta en estos pasos:

ddxsinh^{-1} x=ddxln(u)=1ududx=1x+x^{2}+1−−−−−√⋅(1+12x^{2}+1−−−−−√⋅2x)=1x+x^{2}+1−−−−−√⋅(x+x^{2}+1−−−−−√x^{2}+1−−−−−√)=1x^{2}+1−−−−−√
Por lo tanto, ddxsinh^{-1}x=11+x^{2}−−−−−√

Integrales de funciones hiperbólicas inversas: Forma básica

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sinh^{-1}x+C$ $=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=-\operatorname{csch}^{-1}x+C,\ \ x\neq 0$
$\int \frac{1}{x^2-1}dx=\cosh^{-1}x+C, x>1$ 1" /> 1" />	$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=-\operatorname{sech}^{-1}x+C,\ 0<\lvert x\rvert<1$< |x| < 1" />< |x| < 1" />
$\int \frac{1}{1-x^2}dx=\tanh^{-1}x+C, \lvert x\rvert<1$<1" /><1" />	$\int \frac{1}{1-x^2}dx=\coth^{-1}x+C,\quad \lvert x\rvert>1$1" />1" />

Ejemplo C

Evalúa la $\int_1^6 \frac{3}{\sqrt{9x^2-4}}dx$
Solución:

La integral es de la forma $\int \frac{A\,dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$
La cual tiene la solución general $\frac{A}{b}\cosh^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)+C$.
Por lo tanto $\int_1^6 \frac{3}{\sqrt{9x^2-4}}dx=\frac{3}{3}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}x\right)\right]_1^6$ y al sustituir la forma de logaritmo natural
obtenemos $\int_1^6 \frac{3}{\sqrt{9x^2-4}}dx=\ln\left(\frac{3}{2}6+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 6^2+1}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}1+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 1^2+1}\right)=\ln\left(9+\sqrt{82}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)=\ln\left(\frac{9+\sqrt{82}}{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}}\right)=\ln\left(\frac{18.055}{3.303}\right)=16.986\approx 17.0$