Nombre de alumnos: Emma Yareni

Nombre del profesor: Roberto Quiroli González

Nombre del trabajo: funciones trigonométricas.

Materia: geometría.

Grado: 2do semestre.

Grupo: “u”

Pichucalco, Chiapas a 23 de junio de 2020

Funciones trigonométricas.

Va a aparecer aquí una nueva familia de funciones reales de variable real: las funciones trigonométricas. Existen varias formas de introducir estas funciones, ninguna de las cuales es del todo fácil. El método que vamos a seguir es laborioso, no es el más efectivo o elegante, pero a cambio es el más elemental e intuitivo, pues la definición de las funciones seno y coseno se basa en las nociones de seno y coseno de un ángulo, que suponemos conocidas aunque sólo las usaremos a título orientativo. Necesitamos trabajar en R 2 , el plano real, que ya apareció al considerar la gráfica de una función real de variable real. Empezamos definiendo la distancia euclídea entre dos puntos del plano y comprobando sus propiedades básicas, entre las que destaca la desigualdad triangular. Acto seguido consideramos curvas en el plano y, cuando ello es posible, definimos la longitud de una curva. Esto permite “medir” la longitud de un arco de circunferencia, lo que equivale a medir un ángulo en radianes, y dar una definición del número π. Usando la longitud de un arco de circunferencia podemos obtener fácilmente la función arco coseno, cuya inversa es la función coseno, definida de momento sólo en el intervalo [0,π]. A partir de ella se define la función seno en el mismo intervalo y ambas se extienden fácilmente para obtener funciones definidas en todo R, cuyas propiedades básicas, como la continuidad, iremos estudiando. Finalmente definimos el resto de las funciones trigonométricas y sus inversas, haciendo un estudio preliminar de las mismas. Habremos completado así la gama de funciones reales de variable real que manejaremos en el estudio del cálculo diferencial e integral, para obtener ejemplos y aplicaciones de los principales resultados.

Distancia euclídea en el plano

Consideremos el conjunto R 2 = R×R = {(x,y) : x,y ∈ R} cuyos elementos se interpretan geométricamente como los puntos de un plano en el que hemos fijado ejes cartesianos, de forma que cada par ordenado (x,y) ∈ R 2 se identifica con el punto de abscisa x y ordenada y. Por ello es costumbre referirse a R 2 como el plano real, o simplemente el plano.

La definición de la distancia euclídea en R 2 resulta obvia si queremos que se verifique el Teorema de Pitágoras. Dados α,β ∈ R 2 , α = (x1,y1) y β = (x2,y2), con x1,y1,x2,y2 ∈ R, la distancia euclídea, o simplemente la distancia, de α a β es, por definición, el número real no negativo d(α,β) dado por

d(α,β) = (x2 −x1) 2 + (y2 −y1) 2 1/

Veamos las tres propiedades básicas de la distancia euclídea que vamos a necesitar:

- Para α,β ∈ R 2 , se tiene: d(α,β) = 0 ⇐⇒ α = β
- d(α,β) = d(β,α) ∀α,β ∈ R 2
- d(α1,α3) 6 d(α1,α2) +d(α2,α3) ∀α1,α2,α3 ∈ R 2

Las dos primeras propiedades son evidentes. La tercera se conoce como desigualdad triangular, por su clara interpretación geométrica: la longitud de un lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Para demostrarla, pongamos αk = (xk,yk), con xk,yk ∈ R para k = 1,2,3 y, para simplificar la notación, pongamos a = x2 −x1, b = y2 −y1, u = x3 −x2 y v = y3 −y2. Se tiene entonces claramente

d(α1,α3) 2 = (a+u) 2 + (b+v) 2 = a 2 +b 2 +u 2 +v 2 +2(au+bv)

6 a 2 +b 2 +u 2 +v 2 +2 (au+bv) 2 + (av−bu) 2 1/

= a 2 +b 2 +u 2 +v 2 +2(a 2 +b 2) 1/2 (u 2 +v 2) 1/2

= d(α1,α2) 2 +d(α2,α3) 2 +2d(α1,α2)d(α2,α3)

= d(α1,α2) +d(α2,α3)

de donde se deduce la desigualdad buscada. Veamos dos estimaciones de la distancia euclídea que resultan útiles con mucha frecuencia. Su comprobación es evidente:

Para cualesquiera α = (x1,y1) ∈ R 2 y β = (x2,y2) ∈ R 2 , se tiene:

max´ {|x2 −x1|,|y2 −y1|} 6 d(α,β) 6 |x2 −x1|+|y2 −y1|

Esta definición tiene una interpretación física bastante obvia: podemos pensar en un móvil que durante el intervalo de tiempo [a,b] realiza un determinado movimiento en el plano, de forma que su posición en cada instante $t \in [a,b]$ es el punto $\gamma(t)$. Por ello, resulta natural decir que el punto $\gamma(a)$ es el origen de la curva γ y que el punto $\gamma(b)$ es el extremo de γ. También se comprende claramente por qué exigimos que las funciones ϕ y ψ sean continuas en [a,b]. En Física suele decirse que la igualdad (1) es la ecuación del movimiento que, también por razones obvias, suele escribirse en la forma

$x = \phi(t), y = \psi(t)$ (a 6 t 6 b)

En Matemáticas, la palabra "curva" puede tener significados diferentes según el contexto. Es frecuente llamar curva plana en forma paramétrica a lo que aquí hemos llamado simplemente curva plana. Es importante distinguir claramente entre la curva γ, una aplicación con valores en R 2 , y la imagen de dicha aplicación, esto es, el conjunto

γ [a,b] = $\gamma(t) : t \in [a,b] \subset$

que es el conjunto que dibujamos para visualizar gráficamente la curva, aunque evidentemente hay muchos aspectos de la curva que no se reflejan adecuadamente en dicho conjunto. En la interpretación física, este conjunto es la trayectoria descrita por el móvil y es evidente que movimientos muy diferentes pueden recorrer la misma trayectoria. Veamos algunos ejemplos sencillos de curvas. Dada una función f : [a,b] → R que sea continua en [a,b], podemos considerar la curva γ : [a,b] → R 2 definida po

$\gamma(t) = t, f(t) \ \forall t \in [a,b$

que evidentemente cumple

γ [a,b] = t, f(t) : $t \in [a,b]$ = Gr

f es decir, la imagen de la curva γ coincide con la gráfica de la función f . Para las curvas de este tipo se dice a veces que vienen dadas en forma explícita, pues toda la información necesaria para definir la curva se resume en la ecuación y = f(x) para

$a \leqslant x \leqslant b$. Para ver otro ejemplo, dados dos puntos $\alpha = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $\beta = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, podemos considerar la curva $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\sigma(t) = \big((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2\big) \quad \forall t \in [0,1]$$

Por razones obvias, pero con un claro abuso de lenguaje, suele decirse que σ es el segmento de origen α y extremo β. Usando la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ podemos escribir simplemente $\sigma(t) = (1-t)\alpha + t\beta$ para todo $t \in [0,1]$. Como motivación para definir la longitud de una curva es natural pensar que la longitud del segmento recién definido debe ser la distancia $d(\alpha,\beta)$, pero también está claro que, en general, la longitud de una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ puede ser mucho mayor que la distancia $d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)$. Dicho de forma intuitiva, lo que haremos para definir la longitud de una curva será intentar aproximarla por "poligonales"

Funciones trigonométricas

Variación y gráficas de las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante)
Las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo son las razones o relaciones entre sus lados. Un triángulo tiene seis elementos: tres lados y tres ángulos.

El seno de un ángulo α de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

coseno. En un triángulo rectángulo, es la longitud del lado adyacente dividida por la longitud de la hipotenusa. La abreviación es cos. Ejemplo: en un triángulo con lados de 3, 4 y 5, el coseno del ángulo donde se encuentran los lados de longitud 4 y 5 es 4/5.

La tangente de un ángulo α de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b). Es una de las razones trigonométricas. Se llaman razones porque se expresan como el cociente de dos de los lados del triángulo rectángulo. Su abreviatura es tan o tg.

La cotangente es la razón trigonométrica recíproca de la tangente. ... La cotangente de un ángulo α de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y el cateto opuesto (a). Su abreviatura es cot, cotg o cotan.

Secante, por su parte, es un concepto que, en la geometría, refiere a la superficie o la línea que interseca otra superficie o línea. Una recta secante, por lo tanto, es aquella que corta otra recta o una curva. Puede decirse que dos rectas son secantes cuando disponen de un punto en común (aquel en el que se cruzan).

Funciones Trigonométricas Cosecante. 2. Page 2 Cosecante La función cosecante (abreviado como csc o cosec) es la razón trigonométrica inversa del seno, o también su inverso multiplicativo. ... mientras que cuando el seno tiende a cero desde valores positivos la cosecante tiende a: infinito positivo.