ANTOLOGÍA

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

Licenciatura en Administración y Estrategia de Negocios.

Segundo Cuatrimestre

Cuatrimestre: Enero-Abril 2023

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

—Mi Universidad‖

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Objetivo de la materia:

Adquirir la disciplina y el rigor precisos para el trabajo intelectual. - Fomentar y desarrollar la capacidad para el razonamiento abstracto. - Adquirir los conocimientos matemáticos imprescindibles para un universitario. - Potenciar las habilidades de cálculo más allá de las reglas elementales. - Iniciar el estudio de los temas matemáticos con mayor aplicación en el campo de las humanidades y las ciencias sociales

Criterios de evaluación:

No	Concepto		Porcentaje
1	**Actividades web escolar**		50%
a)	Primera actividad	25%	
b)	Segunda Actividad	25%	
2	**Examen**		50%
Total de Criterios de evaluación			100%

INDICE

UNIDAD I **Pag:**

DISPOSICIONES GENERALES DE LAS PERSONAS FÍSICAS

UNIDAD II

Rectas de ´Planos y Sistemas Lineales

UNIDAD III

Ecuaciones Cuadráticas, Lineales y Polinomios

UNIDAD IV

Funciones Radicales, cuadráticas , interés simple y compuesto

UNIDAD I

DISPOSICIONES

1.1 Lógica: Lenguaje

Álgebra, rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. La aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que 32 + 42 = 52).

El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: a2 + b2 = c2. Un número multiplicado por sí mismo se denomina cuadrado, y se representa con el superíndice 2. Por ejemplo, la notación de 3 × 3 es 32; de la misma manera, a × a es igual que a2.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos.

El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos Símbolos y lenguaje Entre los símbolos algebraicos se encuentran números, letras y signos que representan las diversas operaciones aritméticas. Los números son, por supuesto, constantes, pero las letras pueden representar tanto constantes como variables. Las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables. Operaciones y agrupación de símbolos La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basa en los símbolos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales —también llamadas vínculos— que suelen usarse para representar la división y las raíces, como en el siguiente ejemplo: (Ax + B) / (C – DX

Lenguaje común expresado en lenguaje algebraico Los enunciados de un problema de planteo conllevan un lenguaje simbólico entregado por la Lógica y Matemática, este lenguaje nos permite plantear y resolver los problemas siguiendo los pasos que nos permite el Algebra en la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones simultáneas. Algunas expresiones más comunes son: Un número aumentado en n unidades: x + n El doble de un número: 2x El triple de un número disminuido en k unidades: 3x – k El doble de un número aumentado en 5: 2x + 5 La tercera parte de un número: 3/ x La cuarta parte de un número aumentado en p : p /x + 4 La quinta parte de diferencia entre un número y 8 : (x –8)/5 El doble de la suma entre un número y 7 : 2(x + 7) Un número multiplicado por sí mismo: x 2 Un número aumentado en 7 y multiplicado por el mismo número disminuido en 6 : (x + 7)(x –6) La diferencia de dos números es 6 : (x – y) = 6 La suma de 2 números es 15 : (x + y) =15 El recíproco de un número: 1/X

1.2 Calculo Proporcional

El desarrollo de la Lógica proposicional (tipo de lógica simbólica) se da por insuficiencias o limitaciones de la lógica clásica. Recordemos que la Lógica clásica (lógica aristotélica) toma a las proposiciones universales como proposiciones que no implican un compromiso existencial. Por lo tanto, cuando decimos "Los monos son ratones gordos", que puede ser expresado bajo la forma S es P no me comprometo con que existan ni los monos ni los ratones gordos. En cambio, cuando digo que Algún mono es un ratón gordo, me comprometo con la creencia en la existencia de al menos un individuo que sea mono y que también sea un ratón gordo.

Este abordaje se preocupa por la relación entre las clases que integran los enunciados, independiente de la verdad o falses de sus componentes. La lógica proposicional, por su parte, se concentra en el análisis de las proposiciones de los argumentos y las relaciones que existen entre ellas. Este análisis se conoce como veritativo funcional pues el valor de verdad de los argumentos depende ahora del valor de verdad de sus enunciados y de la forma en que estos se conectan, que ya no es de la forma dada por la tercera persona del indicativo del verbo ser, como usaba el esquema aristotélico. Dicho de otra manera, la lógica proposicional estudia las relaciones entre las proposiciones sin analizar, sin tener en cuenta la estructura interna de las mismas. Es en el siglo XX, recién, cuando la lógica conoce un desarrollo enorme a partir del cálculo proposicional. En verdad, si bien el interés inicial de la lógica fue el análisis de los argumentos concretos el desarrollo enorme que tuvo esa disciplina hizo que se fuera alejando de ese interés primero y se centrara luego en las propias estructuras, independientemente de si servían al análisis argumental o no. Algo parecido puede pensarse en el desarrollo de la matemática que comenzara como matemática aplicada y, sin dejar ese costado, desarrollara fuertemente lo que se conoce como matemática pura, es decir, una matemática cuyo valor de estudio y desarrollo no es directamente su aplicación, sino el estudio de las verdades matemáticas. Algo similar pasó con la lógica que empezó como lógica aplicada y desarrolló enormemente lo que podemos llamar lógica pura. El cálculo proposicional (la lógica proposicional) forma sólo una parte de la lógica simbólica. Pero su funcionamiento es lo suficientemente importante y fundamental como para centrarnos en ella afín de comprender algunos procedimientos básicos de la lógica simbólica. Lenguaje del Cálculo Proposicional: Como ya dijimos anteriormente la lógica es un lenguaje formal, y como tal está constituido por un conjunto de signos y reglas característico: signos del lenguaje (tabla de símbolos), reglas sintácticas (reglas para la construcción de expresiones del lenguaje) y reglas semánticas(reglas que nos permiten encontrar un valor de verdad para las expresiones del lenguaje a partir de los valores de verdad de sus componentes) La lógica proposicional permite la realización de cálculos, para lo cual traduce el lenguaje ordinario a fórmulas lógicas, transforma tales fórmulas en otras, es decir deduce unas de otras.

Los valores de verdad que usará el cálculo proposicional serán solamente el de verdad (o verdadero) simbolizado por una "v" y el de falsedad (o falso) simbolizado por una "f". Cuando hablamos de cálculo nos estamos refiriendo a un sistema de relaciones entre símbolos no interpretados que permite realizar operaciones con ellos. El lenguaje del cálculo proposicional recibirá el nombre de Lenguaje L.

Signos del lenguaje:

Cuando hablamos de símbolos formales en el contexto del cálculo proposicional (a veces llamados signos elementales) nos referimos a tres tipos de signos: 1. Variables proposicionales o letras enunciativas: son letras que simbolizan proposiciones atómicas (proposiciones que no contienen conectivos binarios, las que los contienen reciben el nombre de proposiciones moleculares). Se llaman variables porque cada una de ellas puede representar de forma indistinta cualquier proposición. Dichas 3 letras se utilizan en minúscula y en orden alfabético, vale recordar que por una convención en la literatura lógica se utiliza a partir de la p. (p, q, r, s, t...

2. Operadores o constantes lógicas:

son símbolos que sirven para relacionar las proposiciones entre sí. Se los conoce con el nombre de conectivas. El conjunto de los conectivos es un conjunto finito. Se considerarán conectivos del cálculo proposicional a los siguientes símbolos: → (Condicional) ↔ (Bicondicional) Conectivos ∧ (Conjunción) Binarios v (Disyunción) ¬ (Negación) Conectivo unario 3. Símbolos auxiliares: son símbolos que sirven para indicar como se agrupan los componentes de una fórmula y cuál es la conectiva principal o dominante. Estos signos auxiliares serán los paréntesis (,). Podría usarse una gama más amplia de signos (corchetes, etc.), pero no resulta imprescindible.

Reglas sintácticas: La misión del conjunto de estas reglas de formación es establecer la combinación correcta de signos elementales brindando una adecuada noción de expresión bien formada o formula bien formada del cálculo proposicional. De esta manera tenemos un test que nos permite decidir ante una cadena dada de signos del lenguaje L bajo qué condiciones esa cadena puede ser considerada correcta y por lo tanto ser tenida como una expresión del lenguaje en cuestión. Mientras que no siempre los hablantes de los lenguajes naturales formulan explícitamente las reglas que rigen esos lenguajes, necesariamente deben formularse en los lenguajes formales. Las reglas que indican qué cosas serán tenidas por fórmulas bien formadas o fórmulas, serán tres

La primera regla es que toda letra proposicional será considerada una fórmula. La segunda indica que, si algo es considerado fórmula, entonces la negación de ese algo también será una fórmula del lenguaje L. La tercera regla señala que, si dos cosas son fórmulas entonces la unión de ellas encerradas entre paréntesis y unidas a través de un conectivo binario, también será considerado una fórmula. Digámoslo ahora de manera un poco más formalizada: Sea For el conjunto de las fórmulas del lenguaje L 1°) Toda letra proposicional ⊂ For. 2°) Si α ∈ For entonces ¬α ∈ For. 3°) Si α, β ∈ For entonces (α* β) ∈ For, donde * ∈ CB, siendo CB el conjunto de los conectivos binarios. Por lo tanto, para formar correctamente las fórmulas en este cálculo, es preciso tener en cuenta los siguientes requisitos:

- El negador (en tanto que conectivo unario) se antepone tanto a fórmulas atómicas (una variable), como a fórmulas moleculares. Por ejemplo: ¬ p, ¬ (p v q) ¬ ((p v q) ∧ (p ∧ q)) •
- Las restantes conectivas unen dos fórmulas cualesquiera (esto es, dos variables proposicionales, dos fórmulas, una formula y una variable proposicional). Por ejemplo: (p v q), (p v q) ∧ (p ∧ q) ((p ↔ q) → q)

Si bien una de las reglas de formación de expresiones obliga a la utilización de los paréntesis para toda fórmula molecular, en el curso evitaremos aquellos paréntesis cuya omisión no genere problema de ambigüedad en la fórmula.

1.3 Teoría Deductiva

Este curso se ocupa de las cadenas deductivas, dentro y fuera de las matemáticas, como un arte a practicar, no como una teoría. Es la ´única manera conocida de embarcar en el pensamiento deductivo a la mayoría de la clase. En el primer capítulo se aprende a pensar matemáticamente sin pensar en matemáticas, gracias a las afirmaciones sobre veraces y mitómanos, y a los silogismos categóricos, que son los primeros teoremas que hay que saber demostrar, antes de demostrar en matemáticas. El arte de demostrar no se aprende fácilmente dentro de las matemáticas, ya que toda demostración matemática es una disertación conducida por el autor, según cierta línea de pensamiento que suele no corresponder al esquema mental del lector, quien al sentirse marginado del tema se desconecta. Eso no ocurrirá en las demostraciones de este curso ya que, desde la primera lección, sobre demostración indirecta, las inferencias se hacen según patrones establecidos, al alcance de todos los participantes, sin obligarlos a adoptar estilos ajenos. Su ensayo paciente y repetido hará que cada alumno capte la idea de demostración. Para garantizar el

´éxito correspondiente, hay que concederle a cada tema el tiempo requerido para su maduración, según la tabla siguiente:

1. Demostración Indirecta (2 semanas)

2. Esquema Deductivo (Una clase)

3. Demostración Directa (3 semanas)

4. Otros Ejemplos (2 semanas)

Este intento debe desarrollarse en forma de taller, donde los alumnos participen activamente y el profesor se concrete a hacer preguntas como las siguientes:

¿Qué significa eso?

– ¿Adónde queremos llegar?

– ¿Que sabemos al respecto?

– ¿Por qué ya está demostrada esa afirmación?

Para esta ´última pregunta, la respuesta obligada es:

– Porque hemos partido de la hipótesis, que es el paso tal, y hemos llegado a la tesis, que es el paso tal. O bien:

– Porque hemos partido de su negación, que es el paso tal, y hemos llegado a una contradicción, que está en los pasos tal y tal.

Para imprimir dinamismo y gracia a las demostraciones hay que valerse de ciertas palancas, como definir sobre la marcha cuando se llegue a una existencial, proceder por casos, o por exclusión, cuando se llegue a una disyunción, y demostrar sobre la marcha cuando el paso considerado no se desprenda fácilmente de los pasos anteriores.

En los apartados 1, 2, 3, 4 se adquieren los hábitos y la disciplina que permiten avanzar en materia de demostraciones. De ahí se puede saltar al apartado 13, si se quiere, regresando a 8, 10 y 12, según se vayan necesitando. Los tiempos recomendados para estos temas son:

8. Negaciones (1 semana)

10. Demostración por Casos (2 semanas)

12. Definición de igualdad (2 clases)

13. Conjuntos (2 clases)

14. Unión e Intersección (2 semanas)

Aunque este libro contiene material suficiente para un curso anual de licenciatura, en el caso de un curso semestral debe optarse por alguna selección de temas. He aquí algunas recomendaciones:

Licenciatura en humanidades: capítulo I, completo.

Licenciatura en matemáticas: secciones marcadas con asterisco.

Licenciatura en ciencias: capítulo II, precedido de los asteriscos de I.

No importa tanto la cantidad de temas que se cubran, como la intensidad de las vivencias adquiridas. Hay que vivir las demostraciones, tal como se vive un relato agradable.

Los frutos de este curso no surgen tanto de la simple lectura de sus páginas, como de su mejor laboratorio, que es la participación de un grupo frente al pizarrón, en presencia del profesor. Esto aporta experiencias inéditas acerca del quehacer deductivo, y de sus múltiples tropiezos con el credo común.

1.4 Simbolización de proposiciones

Proposiciones Con el estudio de la Lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso.

La Lógica tiene un lenguaje exacto. Pero, aunque así sea, vamos a intentar construir un vocabulario para este lenguaje preciso utilizando el lenguaje cuotidiano algunas veces un tanto confuso. Es necesario redactar un conjunto de reglas que sean perfectamente claras definidas y que estén libres de las vaguedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente. Para realizar este trabajo se utilizarán proposiciones en lengua castellana, de la misma manera que se usa la lengua castellana para explicar las reglas precisas de un juego a alguien que no ha jugado a ese juego. Por supuesto, la lógica es algo más que un juego. Puede ayudarnos a aprender una forma de razonar que es exacta y a la vez muy útil.

Para empezar, consideremos las proposiciones en lengua castellana. Cada proposición tiene una forma lógica a la que se le dará un nombre. En primer lugar, se consideran y simbolizan dos clases de proposiciones en Lógica; unas se denominan proposiciones atómicas y otras proposiciones moleculares. En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra atómico muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, atómicas son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición molecular.

En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra atómico muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, atómicas son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición molecular. Una proposición atómica es una proposición completa sin términos de enlace. Se utilizan términos de enlace para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Por ejemplo, considérense dos proposiciones atómicas, Hoy es sábado. No hay clases Ambas proposiciones son atómicas. Mediante un término de enlace se pueden unir y se tendrá una proposición molecular. Por ejemplo, se puede decir:

Hoy es sábado y no hay clase. Esta proposición molecular se ha construido con dos proposiciones atómicas y el término de enlace «y». Cuando analizamos una proposición molecular la descomponemos en las más pequeñas proposiciones atómicas completas. En el ejemplo anterior se puede descomponer la proposición molecular en dos proposiciones atómicas. El término de enlace «y» no forma parte de ninguna de las proposiciones atómicas. Se ha añadido a las proposiciones atómicas para construir una proposición molecular.

Términos de enlace Las palabras de enlace, por cortas que sean, no deben subestimarse, pues son de gran importancia. Tanto es así, que se estudiarán algunas reglas muy precisas para el uso de esta clase de términos. Gran parte de lo que se tratará en el estudio de la Lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace. El término de enlace en la proposición del ejemplo «Hoy es sábado y no hay clase» es la palabra «y».

Hay otros, pero antes de considerar cada uno de ellos separadamente, les daremos el nombre lógico correcto. Se les denominará términos de enlace de proposiciones. Este nombre será fácil de recordar, porque indica efectivamente cuál es el papel que desempeñan.

Enlazan proposiciones. Forman proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas. Los términos de enlace que se utilizarán en este capítulo son las palabras «y», «o», «no», y «si..., entonces». En la gramática castellana se les da a veces otros nombres, pero en Lógica los denominaremos, como ya hemos indicado, términos de enlace de proposiciones o simplemente términos de enlace. Recuérdese que al añadir un término de enlace a una o dos proposiciones atómicas se ha formado una proposición molecular. Los tres términos de enlace considerados, «y», «o», «si..., entonces», se usan para enlazar dos proposiciones atómicas, pero el otro se agrega a una sola proposición atómica para formar una molecular.

Este término de enlace es la palabra «no». Se puede decir que el término de enlace «no» cada vez actúa sobre una sola proposición atómica y que los otros términos de enlace actúan sobre dos proposiciones atómicas a la vez. Recuérdese que el término de enlace «no», es el único que no conecta realmente dos proposiciones. Cuando a una sola proposición se le agrega «no» se forma una proposición molecular.

Se dan a continuación algunos ejemplos de proposiciones moleculares que utilizan los términos de enlace considerados. La proposición: La luna no está hecha de queso verde Es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». En este caso, el término de enlace actúa sólo sobre una proposición atómica: «La luna está hecha de queso verde».

Un ejemplo de una proposición en la que se utiliza el término de enlace «o» es: El viento arrastrará las nubes o lloverá hoy con seguridad.

El término de enlace «o» actúa sobre dos proposiciones atómicas. Son «El viento arrastrará las nubes» y «Lloverá hoy con seguridad». La proposición molecular:

Si estamos en diciembre entonces llegará pronto Navidad Ilustra sobre el uso del término de enlace «si..., entonces», que también actúa sobre dos proposiciones atómicas. ¿Cuáles son? Ya se ha dado un ejemplo de proposición que utiliza el término de enlace «y». Otra es el terreno es muy rico y hay suficiente lluvia.

¿Cuáles son las dos proposiciones atómicas contenidas en esta proposición molecular?? Los ejercicios que se ponen a continuación ofrecen una oportunidad para comprobar la habilidad del lector para reconocer proposiciones atómicas, proposiciones moleculares y términos de enlace. Recuérdese que cada proposición que contiene un término de enlace es molecular.

Ejercicio I

A. Señalar cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M.

Escribir junto a cada proposición molecular e) término de enlace utilizado.

1. La comida será hoy a las tres en punto.

2. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.

3. La música es muy suave o la puerta está cerrada.

4. A este perro grande le gusta cazar gatos.

5. Él pregunta por su pipa y pregunta por su escudilla.

6. Luis es un buen jugador o es muy afortunado.

7. Si Luis es un buen jugador, entonces participará en el partido del colegio.

8. California está al oeste de Nevada y Nevada al oeste de Utah.

9. Muchos estudiantes estudian Lógica en el primer año de carrera.

10. Los gatitos no acostumbran a llevar mitones.

11. Si los gatitos llevan mitones, entonces los gatos pueden llevar sombreros.

12. Se puede encontrar a Juana en casa de Susana.

13. A las focas no les crece el pelo.

14. Si María canta, entonces es feliz.

15. Los alumnos mayores no están en la lista antes que los jóvenes.

16. La asignatura preferida de Jaime es Matemáticas.

17. Si aquellas nubes se mueven en esa dirección, entonces tendremos lluvia.

18. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.

19. Esta proposición es atómica o es molecular.

20. El sol calentaba y el agua estaba muy agradable.

21. Si * = 0 entonces *+>>=l.

22. x+y>2.

23. x=\ o y + z = 2.

24. y = 2 y 2 = 10.

B. Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando una o dos de las proposiciones escritas a continuación junto con un término de enlace. Por ejemplo, se puede poner el término de enlace «y» entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición

atómica más de una vez. Utilícese cada uno de los cuatro términos de enlace una sola vez, de manera que cada una de las proposiciones moleculares tenga distinto término de enlace.

1. El viento sopla muy fuerte.

2. Pablo podría ganar fácilmente.

3. La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.

4. Veremos qué planes hay para mañana.

5. Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.

6. El amigo de Juan tiene razón.

7. Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta

1.5. Números racionales y números irracionales

Recuerda que:

Ya conoces los distintos tipos de conjuntos numéricos:

Naturales □ N = {0, 1, 2, 3, …}

-Enteros □ Z = {…, □3, □2, □1, 0, 1, 2, 3, …}

Racionales ➔ $Q = \left\{ \frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$

Los números racionales también contienen a los números que tienen expresión decimal e xacta (0.12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7.01252525…). Si el d enominador (de la fracción irreducible) únicamente tiene como factores primos potencias de 2 o 5 la expresión decimal es exacta. Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea ni 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal pe riódica.

Pero ya sabes que existen números que no son racionales. Por ejemplo: 2 no puede escribirse en forma de fracción. Todos estos números como por Ejemplo: 2 , 7 , π …junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. A los números reales que no son números racionales se les llama números irracionales.

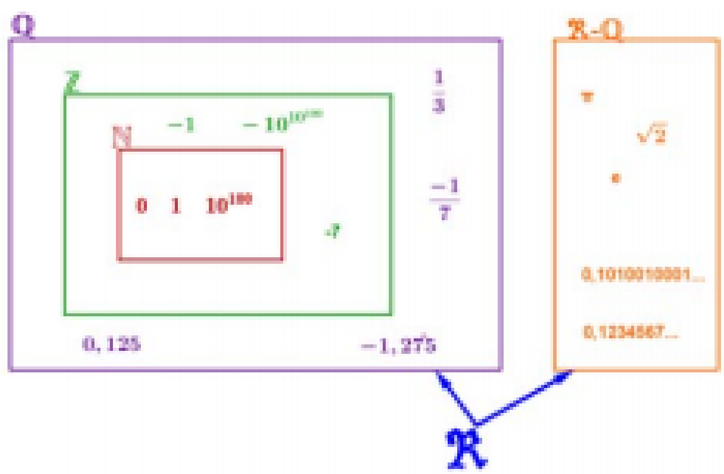
Irracionales ➔ $I = \Re - Q.$

El conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales y de los números irracionales.

Reales ➔ $\Re = Q \cup I$.

Tenemos por tanto que: $N \subset Z \subset Q \subset \Re$.

$I \subset \Re$



1.6 La recta real

Densidad de los números reales

Los números reales son densos, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos núm eros.

a<b

Esto es fácil de deducir, si a, b son dos números con a < b sabemos que a:

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

está entre los dos números. Como ese proceso lo podemos hacer todas las veces que qu eramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los números racionales son también densos, así como los irracionales.

Representación en la recta real de los números reales.

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

1.7. Valor absoluto. Distancia en la recta real

El valor absoluto o módulo de un número es igual al valor de ese número ignoran do el signo. Por ejemplo, el valor absoluto de □1 es 1, y el valor absoluto de +1, tambié n es 1.

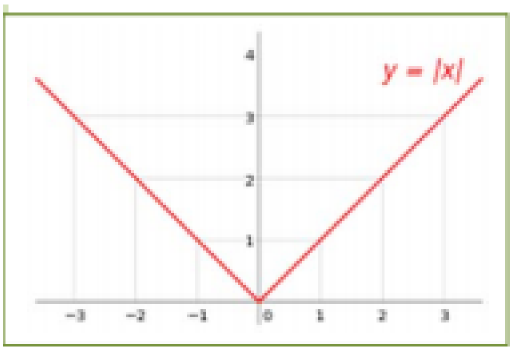
En lenguaje formal, el valor absoluto se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Si representamos esta función en un eje de coordenadas, resulta una gráfica como la del m argen.

Como el valor absoluto es una función muy importante en matemáticas, tiene su pr opio símbolo. Para escribir el valor absoluto de un número x, basta con encerrar el número entre dos barras verticales: |x|.

El valor absoluto de un número x se consigue suprimiendo el signo, y se anota mediante el símbolo |x|



¿Para qué sirve?

El valor absoluto se utiliza principalmente para definir cantidades y distancias en el mundo real. Los números negativos son una construcción matemática que se utiliza en el cálculo, pero en la realidad no existen cantidades negativas. No podemos viajar una distancia de -100 kilómetros, o comer -3 caramelos. Esto se debe a que el tiempo solo discurre en una dirección (positiva por conv ención), pero eso no entra en el ámbito de las Matemáticas, sino en el de la Física.

El valor absoluto se usa para expresar cantidades o longitudes válidas en el mundo real, como la distancia.

Hago un viaje de ida y vuelta hasta una ciudad que se encuentra a 40 km de mi casa. Desp ués de hacer el viaje, estoy en el mismo punto, así que mi posición no habrá cambiado, est o es:

Posición = 40 km - 40 km = 0

Esto no quiere decir que no haya recorrido una distancia. Hay dos cantidades a tener en cuenta, una distancia de ida y otra de vuelta, en total será:

L = |40| km + |-40| km = 80 km

Las propiedades del valor absoluto son:

- No negatividad: $|a| \geq 0$.
- Simetría: $|a| = |-a|$
- Definición positiva: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$.
- Valor absoluto y producto: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Demuestra que el valor absoluto nunca puede ser negativo.

1 – No negatividad

Por definición, la función valor absoluto solo cambia el signo cuando el operando es negativo, así que no puede existir un valor absoluto negativo. Demuestra que el valor absoluto de un número y su negativo coinciden.

2. simetría

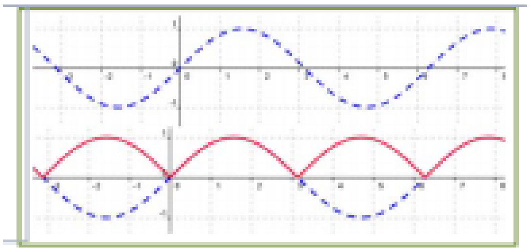
Si a > 0 |a| = a

Si a < 0 |a| = (a) = a

Entonces a = |a| = |a|

Representa la función f(x) = |sen(x)|

Con trazos de puntos está dibujada la función seno. Debajo, en rojo, aparece f(x) = |sen(x)| que es igual en su parte positiva y hace positiva su parte negativa.



Distancia en la recta real

Una distancia es una medida que tiene unas determinadas propiedades:

1) No negatividad.

2) Simetría.

3) Propiedad triangular.

La distancia entre dos números reales x e y se define como:

$\text{Dist}(x, y) = |x - y|$

Verifica las propiedades antes indicadas pues:

1)Al estar definida con el valor absoluto es siempre un número no negativo. La distancia e ntre dos puntos tiene valor cero, únicamente si los dos puntos son coincidentes:

$0 = \text{Dist}(x, y) = |x - y| - x - y = 0 < x = y.$

2) Simetría: $\text{Dist}(x, y) = |x - y| = |y - x| = \text{Dist}(y, x).$

3) Propiedad triangular: $\text{Dist}(x, y)\ \ \text{Dist}(x, z) + \text{Dist}(z, y).$

Ejemplo:

$\text{Dist}(3, 8) = |8 -3| = 5$

$\text{Dist}(-2, ´-9) = |-9 - (-2)| = |-9 + 2)| = |-7| = 7$

$\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6$

$\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14$

Ejemplo:

Si estamos en el sótano 9° y subimos al piso 5°, ¿cuántos pisos hemos subido? Como hemos visto en el ejemplo anterior, hemos subido en total 14 pisos.

Dist(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14.

Si el termómetro marca ´_1 ºC y luego marca 5 ºC, ¿cuántos grados ha subido la temperatura? Como hemos visto en el ejemplo anterior, la temperatura ha subido 6 ºC. Fíjate que la escala termométrica que hemos usado es la Celsius, hay otras, pero esto lo estudiarás en Física.

Dist(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6.

1.8. Intervalos y entornos

Recuerda que:

Un intervalo de números reales es un conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un suconjunto del conjunto de los números reales.

Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

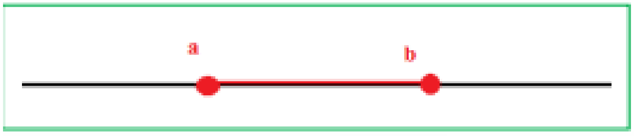
En otras palabras, I=(a,b) = {x€Ř a<x<b }, observa que se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:

Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

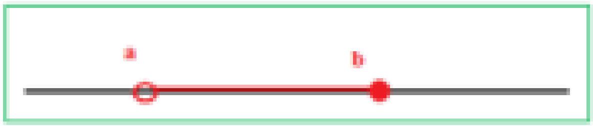
En otras palabras, I=[a,b]

={x€Ř a<x<b }, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.



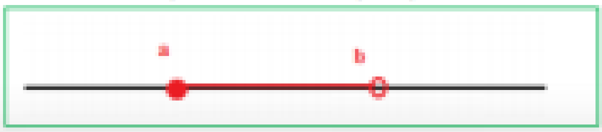
Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo , es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de estos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto: por La izquierda el Extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior sí, en otras palabras, observa que elextremo qu e queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.



Intervalo semiabierto por la derecha,
el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior sí, en otras palabras,

I=[a,b)={x€Ř a<x<b}, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta. Gráficamente



Semirrectas reales

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

Semirrecta de los números positivos S+ = (0, ∞), es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos S- = (∞, 0), es decir, desde el menos infinito, el infini to negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es Ř = (-∞.∞) = (S+) Ú (S-) Ú {0}.

Entornos

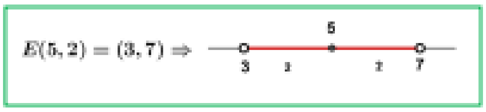
Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro a y radio r y se denota E(a,r) (otra forma usual es conjunto de números que están a una distancia de a menor que r.

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Ejemplo: r) como el E (a)

El entorno de centro5 y radio 2 son los números que están de 5 una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5=2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marc ar con abertura 2.



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

$$E(a, r) = (a - r, a + r)$$

Ejemplo:

E(2, 4) = (2 = 4, 2 + 4) = (=2, 6)

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

Si tengo el intervalo abierto (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2} =$ =6.5

que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10 - 3) : 2 = 3.5 es el radio (la mitad del ancho). Por tanto (3, 10) = E(6.5, 3.5)

En general:

El intervalo (b, c) es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

- *El intervalo* $(-8, 1) = E\left(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}\right) = E(-3.5,\ 4.5)$

También existen los entornos cerrados, pero son de uso menos frecuente.

1.9. Aproximación de un número decimal. Estimación, redondeo y errores

En la vida cotidiana y también en las ciencias aplicadas es necesario trabajar con números a proximados.

Unos ejemplos:

Queremos comprar un tercio de metro de cinta, tenemos que decirle al dependien te cuanto queremos y no vamos a ser tan idiotas como para decirle que nos dé 0.333… metros o 33.333… cm que es lo exacto. Lo normal es pedir 33 cm o 34 cm.

Medimos un folio A4 con la regla y nos da 29.7 cm, la regla llega a los mm. Queremos divi dirlo en 8 partes iguales, ¿cuánto medirá cada parte? Si hacemos 29.7 : 8 nos da 3.7125 c m, pero la regla no llega a tanto, será mejor aproximar a 3.7 cm.

Hacemos un examen con 9 preguntas que valen todas igual. Tenemos 5 bien y las demás e n blanco. ¿Qué nota tenemos?, $10 \cdot 5 / 9 = 5.555555556$ según la calculadora, ¿las ponemos todas?, si lo hacemos estamos suponiendo que somos capaces de disting uir 1 parte de entre 10000 millones de partes iguales del examen. Lo razonable es 5.6 o 5.56 si somos muy pero que muy precisos.

Resulta curioso y debería ser delito que en las gasolineras se anuncie: Precio del gasoil 1.3 99 €/litro. Si alguien va y pide un litro exacto, o 2 o 15 no se lo pueden cobrar exactamente puesto que¡no existen las milésimas de €!, deberían escribir 1.40 €/litro. Es cierto que de esa manera te ahorras 5 céntimo si echas 50 litros, pero a ellos les compensa el tema psicológico la gente poco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.

Exactamente lo mismo pasa en los supermercados: merluza 7.99 €/Kg. Son trucos baratos que una mente entrenada sabe detectar y actuar en consecuencia. La diferencia entre 8 €/Kg y 7.99 €/Kg es que te ahorras ¡1 céntimo! si compras 1 Kg, si compras medio, ¿cuánto te ahorras?, ¡nada!, pues 7.99 : 2 = 3.995 que redondeado es 4, que es lo que cobran. Aunque bien mirada la oferta no está tan mal pues si compras 5 Kg de merluza ahorras para comprarte un caramelo, eso sí, tienes que comprar más de medio Kg por vez.

Redondeo

Te recordamos como se redondean correctamente los números.

Redondear π a las diezmilésimas: π= 3.1415926535…, la cifra de las diezmilésimas es 5, como la cifra siguiente es 9 que es ≥ 5, le sumamos 1 al 5 y pondremos π¨=3.1416.

Fíjate que π está más cerca de 3.1416 que de 3.1415. Redondear √2 a las centésimas: √2 =1.41421356…, ahora la cifra de las centésimas es 1 y la siguiente es 4 < 5 luego la dejamos tal cual, √2= 1.41.

La regla es: Localizamos la cifra de redondeo, miramos la siguiente cifra (sólo la siguiente), si ésta es menor que 5 la cifra de redondeo se queda igual, si la cifra siguiente es 5 o mayor que 5 incrementamos en 1 la cifra de redondeo.

Más ejemplos:

Redondea

5.995 a las centésimas ☐ 6.00 y los ceros hay que escribirlos para indicar hasta dónde hemos redondeado.

7 555 555 en los miles ☐ 7 556 000 donde hay que completar con ceros después de los miles. 8.94999 en las décimas ☐ 8.9 sólo hay que mirar el 4.

Nota importante: Si l resultado de un problema son € se redondeará siempre en los cénti mos.

Otra nota importante: Si queremos dar un resultado con 2 decimales en los pasos intermedios trabajaremos con más decimales, al menos 3 o 4, de lo contrario el resultado no tendrá la precisión que pretendemos, un ejemplo:

A = 9.65; B = 6.98 y C = 4.99. Queremos hacer (A · B) · C2, si hacemos A · B y redondea mos en las centésimas nos queda 67.36y si ahora multiplicamos por 4.992= 24.90 nos sale 1677.26. El resultado correcto es 1 677.20 donde sólo hemos redondeado al final.

1.10. Potencias de exponente natural

Recuerda que:

Dado a, un número cualquiera, y n, un número natural, la potencia an es el producto del n úmero a por sí mismo n veces

En forma desarrollada, la potencia de base a y exponente n se escribe: an = a · a · a · … · a, n veces, siendo a cualquier número y n un número natural.

Ejemplo:

3^3+^2 = 3 · 3 · 3 · 3 · 3, 5 veces

(=3)5 = (=3) · (=3) · (=3) · (=3) · (=3), 5 veces.

La base a puede ser positiva o negativa. Cuando la base es positiva el resultado es siempre positivo. Cuando la base es negativa, si el exponente es par el resultado es po sitivo, pero si es impar el resultado es negativo.

Si calculamos los ejemplos de arriba tendremos:

3^3+^2= · 3 · 3 · 3 ·3 =243.Resultado positivo porque multiplico un número positivo 5 veces.

(-3)5= (-3)·(-3)·(-3)·(-3)·(-3)=243.Multiplico un número negativo un número impar de veces, por lo que el resultado es negativo.Cada vez que multiplicamosdos números neg ativos nos da uno positivo, como tenemos 5, quedaría un signo menos sin multiplicar, luego (+) · (-) = (-).

tRecuerda que:

Base positiva: resultado siempre positivo.

Base negativa y exponente par: resultado positivo.

Base negativa y exponente impar: resultado negativo

1.11- Propiedades de las potencias

Las propiedades de las potencias son:

a) El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y como exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene como base la misma, y como exponente la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Ejemplo:

- $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

c) La potencia de una potencia es igual a una potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

c) El producto de potencias de distinta base con el mismo exponente es igual a otr a potencia cuya base es el producto de las bases y cuyo exponente es el mismo:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

1.12. Potencias de exponente negativo

Definición de potencia de exponente negativo -n y base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Esto se justifica ya que se desea que se sigan verificando las propiedades de las potencias:

a m/an = am-n.

am/am+n = am - (m + n) = a-n = 1/an.

Ejemplo:

5 -2 es lo mismo que (1/5)2.

Calcula las siguientes operaciones con potencias:

a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

c) $5^3 / 5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Actividades propuestas

Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

b) (x + 2)3 : (x + 2)4   c) {(x - 1)3}4   d) (x + 3) · (x + 3)´-3

Calcula las siguientes operaciones con potencias:

a) 25 · 42

b) (33)3

c) 73 / 70

d) 44/4-5

e) 5-5 · 25^{-2}

UNIDAD 2

NÚMEROS RACIONALES, IRRACIONALES Y POTENCIA DE EXPONENTES ENTERO

2.1 Rectas en el plano y desigualdades lineales

Conceptos básicos.

Como ya has podido observar, existen muchos ejemplos donde la línea recta es de utilidad, y uno de los primeros pasos que vamos a seguir para iniciar con el estudio del tema es definir lo que es la línea recta.

Una primera idea de manera intuitiva es que la recta está formada por una sucesión De puntos que son coloniales. Otra idea es que la línea recta es aquella que se forma cuando a partir de dos puntos, la distancia más corta entre estos es precisamente la recta.

Ahora bien, desde la definición formal en matemáticas podemos afirmar que es un lugar geométrico, pero este lugar geométrico significa que todos los puntos que forman la recta cumplen con las mismas condiciones. En este caso la condición es que entre cualesquiera dos puntos que se tomen de ésta recta, la pendiente que se obtiene es la misma.

De esta última descripción vemos que surge otro concepto que ya nos resulta familiar, el Cual es la pendiente y que nos lleva a considerar la inclinación que tiene una recta. Al respecto podemos decir entonces que una característica de cualquier recta es que tiene una pendiente y con esa pendiente se puede conocer el ángulo de inclinación.

Es importante mencionar entonces que debemos distinguir entre rectas:

a) Horizontales

b) Verticales

c) Con pendiente positiva

d) Con pendiente negativa.

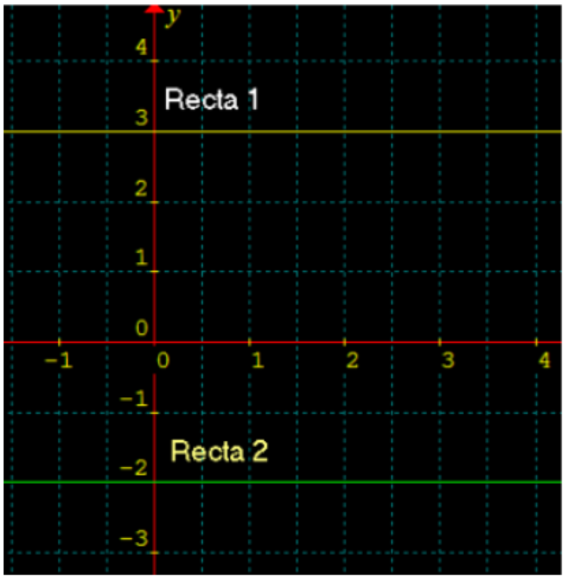
Veamos ahora cuales son los tipos de recta que identifican a cada una.

a) La recta horizontal.

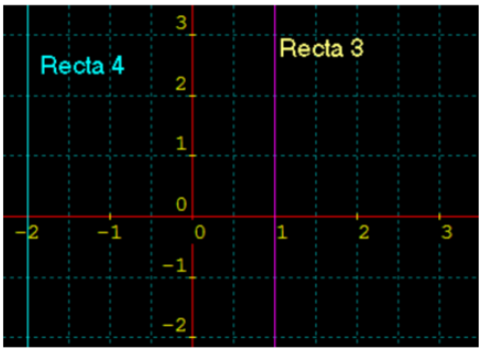
Es aquella que no forma ningún ángulo, es decir si realizamos un trazo de una recta en un plano cartesiano, entonces cualquier recta que sea paralela aleje “x” es horizontal, y por tanto su pendiente es cero.

La siguiente grafica nos muestra dos ejemplos de rectas cuya pendiente es cero. La primera recta su ecuación es: $y= 3$

La segunda recta tiene por ecuación: $y=-2$

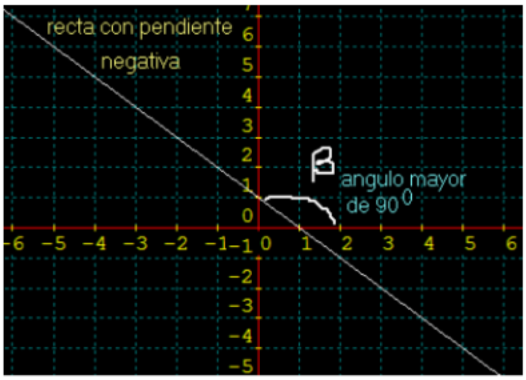


b) La recta vertical. Es aquella cuya que al trazarla se obtiene una recta paralela al eje "y", y desde la definición formal diremos que su pendiente es infinita. La ecuación de la recta 3 vertical es: x=1 La ecuación de la recta 4 vertical es x=-2



c) Recta con pendiente positiva. Se caracteriza porque tiene un ángulo de inclinación menor a 90 grados con respecto a la horizontal. Es decir, con el eje "x". La siguiente grafica nos muestra un ejemplo de recta con pendiente positiva. La ecuación de esta recta es: x-y-3=0 Que también podemos escribir en forma de: y= x-3 que se conoce como ecuación pendiente, ordenada al origen

d) Recta con pendiente negativa. Se caracteriza por tener un ángulo de inclinación mayor a 90 grados con respecto al eje "x". En la siguiente grafica se muestra un ejemplo de recta con pendiente mayor a 90 grados. la ecuación que representa a esta recta es: x+y-1= 0 o bien como: y= 1-x

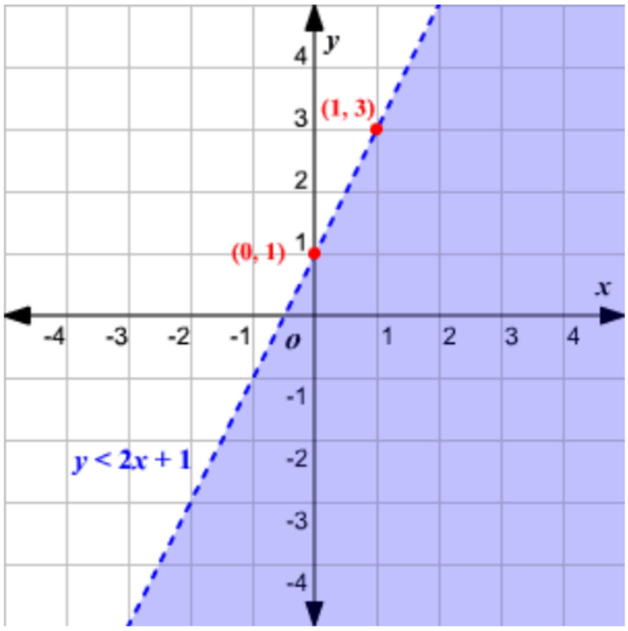


De estos dos últimos incisos hay que recordar entonces que la pendiente entonces está relacionada con el ángulo de inclinación, y que este puede ser entonces mayor o menor de 90 grados. Ahora bien ¿cómo podemos calcular el ángulo de inclinación de una recta? La respuesta a esta pregunta la vamos a dar con un ejemplo práctico que seguramente ya has visto en alguna parte donde realizan trabajos de construcción. Sistemas de desigualdades lineales Una desigualdad lineal con dos variables divide el plano en dos medios planos. Para graficar la desigualdad, grafique la ecuación del límite.

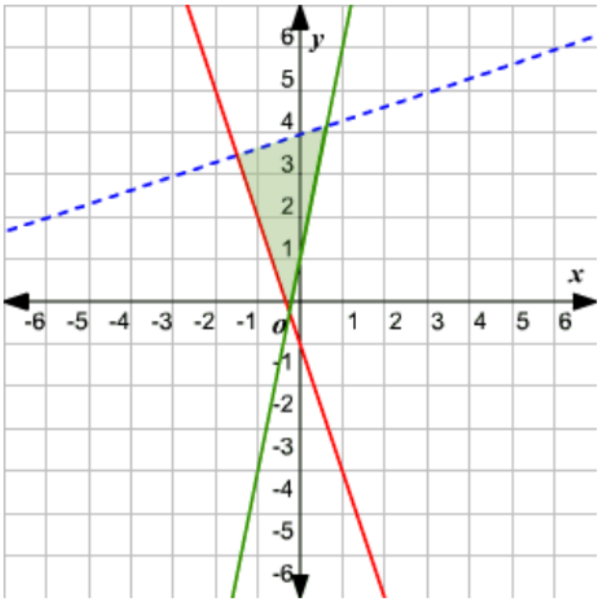
Use una línea continua si el símbolo ≤ o ≥ es usado porque el límite está incluido en la solución. Use una línea punteada si < o > es usado para indicar que el límite no es parte de la solución. Sombree la región apropiada.

A menos que esté graficando una línea vertical el signo de la desigualdad le hará saber que medio plano debe sombrear. Si el símbolo ≥ o > es usado, sombree arriba de la línea. Si el símbolo ≤ o < es usado sombree debajo de la línea.

Para una línea vertical, las soluciones grandes están a la derecha y las soluciones pequeñas están a la izquierda. Un sistema de dos o más desigualdades lineales puede dividir el plano en formas más complejas. Ejemplo: Grafique $y < 2x + 1$



Ejemplo: Grafique el sistema de desigualdades lineales. Graficando las tres líneas y sombreando la región encerrada, obtenemos la figura siguiente



2.2 Sistemas Lineales de Ecuaciones

Introducción

Estas notas están basadas en las realizadas por el profesor Manuel Jesús Gago Vargas ´ para la asignatura Métodos matemáticos: ´ Algebra lineal ´ de la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas. Un problema fundamental que aparece en matemáticas y en otras ciencias es el análisis y resolución de m ecuaciones algebraicas con n incógnitas. El estudio de un sistema de ecuaciones lineales simultaneas esta ´íntimamente ligado al estudio de una matriz rectangular de números definida por los coeficientes de las ecuaciones. Esta relación parece que se ha notado desde el momento en que aparecieron estos problemas.

El primer análisis registrado de ecuaciones simultaneas lo encontramos en el libro chino Jiu zhang Suan-shu (Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas ´), (v´ease McTutor y Carlos Maza) escrito alrededor del 200 a.C. Al comienzo del capítulo VIII, aparece un problema de la siguiente forma: Tres gavillas de buen cereal, dos gavillas de cereal mediocre y una gavilla de cereal malo se venden por 39 pesos. Dos gavillas de bueno, tres mediocres y una mala se venden por 34 pesos. Y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 pesos. ¿Cuál es el ´ precio recibido por cada gavilla de buen cereal, cada gavilla de cereal mediocre, y cada gavilla de cereal malo? Hoy en día, este problema lo formularíamos como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $3x + 2y + z = 39$, $2x + 3y + z = 34$, $x + 2y + 3z =$

26, Donde x, y y z representan el precio de una gavilla de buen, mediocre y mal cereal, respectivamente. Los chinos vieron el problema esencial. Colocaron los coeficientes de este sistema, representados por cañas de bambú de color, como un cuadrado sobre un tablero de contar (similar a un ´Abaco), y manipulaban las filas del cuadrado según ciertas reglas establecidas. Su tablero de contar y sus reglas encontraron su camino hacia Japón y finalmente aparecieron en Europa, con las cañas de color sustituidas por números y el tablero reemplazado por tinta y papel. En Europa, esta técnica llegó a ser conocida como eliminación Gaussiana ´, en honor del matemático alemán Carl F. Gauss.

Como la técnica de eliminación es fundamental, empezamos el estudio de nuestra materia aprendiendo como aplicar este método para calcular las soluciones de los sistemas lineales. Después de que los aspectos computacionales se manejen bien, profundizaremos en cuestiones más teóricas. Eliminación Gaussiana y matrices En lo que sigue consideraremos fijado un cuerpo k de coeficientes. En el texto nos referiremos a los elementos del cuerpo como números ´ o escalares. El lector bien puede pensar que k es el cuerpo Q de los números racionales, R de los reales o incluso C de los complejos. Aunque debe tener en cuenta que todo lo dicho sobre sistemas de ecuaciones lineales y matrices es cierto en general para cualquier cuerpo k. Sea $n \geq 1$ un número natural. Una ecuación lineal ´ es una expresión de la forma $a1x1 + a2x2 + \cdots + anxn = b$, Donde a1, a2, . . . , an y b son números conocidos y x1 x2, . . . , xn son incógnitas. Los números ahí se denominan coeficientes de la ecuación, mientras que b es el término independiente. Una solución´ de la ecuación lineal anterior es una serie de números $\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n$ que la satisfacen, es decir, que verifican $a1\alpha 1 + a2\alpha 2 + \cdots + an\alpha n = b$. Definición: Sean $m \geq 1$ y $n \geq 1$ números naturales. Un sistema lineal es un conjunto de m ecuaciones lineales y n incógnitas de la forma $11x1 + a12x2 + \ldots + a1nxn = b1$ $a21x1 + a22x2 + \ldots + a2nxn = b2$ $am1x1 + am2x2 + \ldots + amnxn = bm$

Donde las xi son las incógnitas y los aij , bi son números. Los números aij se denominan coeficientes del sistema, y el conjunto de los bi términos independientes ´ del sistema. Una solución´ del sistema lineal anterior es una serie de números $\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n$ que satisface cada ecuación del sistema, es decir, que verifica $ai1\alpha 1 + ai2\alpha 2 + \cdots + ain\alpha n = bi$ para $i = 1, \ldots, n$. El problema es calcular, si es posible, una solución común a un sistema lineal como el anterior. Para estos sistemas, existen tres posibilidades: Solución única: Existe uno y solo un conjunto de valores para las incógnitas xi que satisfacen las ecuaciones simultáneamente. Se dice entonces que el sistema es compatible determinado. Por ejemplo, el sistema formado por la ´única ecuación lineal $2x1 = 3$ es compatible determinado, su ´única solución es $x1 = 3/2$. Infinitas soluciones: Existen infinitos conjuntos de valores para las incógnitas xi que satisfacen las ecuaciones simultáneamente. No es difícil probar que, si el sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas si k, el cuerpo de números, es infinito. En este caso se dice que el sistema lineal es compatible indeterminado. Por ejemplo, el sistema formado por la ecuación lineal $2x1 + x2 = 3$ tiene como soluciones $x1 = a$, $x2 = 3 - 2a$, donde a es cualquier elemento de k, luego es compatible indeterminado. Sin solución: No hay ningún conjunto de valores para las incógnitas ´ xi que satisfagan todas las ecuaciones simultáneamente. El conjunto de soluciones es vacío. Decimos que estos sistemas son incompatibles. Por ejemplo, el sistema dado por las ecuaciones $2x1 = 3$, $x1 = 1$ es incompatible, pues no hay ningún valor de x1 que satisfaga ambas ecuaciones

2.3.-Sistemas lineales de ecuaciones con incógnita

Gran parte del trabajo acerca de los sistemas de ecuaciones es decidir cuál de estas tres posibilidades es la que se presenta. La otra parte de la tarea es calcular la solución si es ´única o describir el conjunto de soluciones si hay más de una. Definición. Dos sistemas lineales con n incógnita se dicen equivalentes si tienen los mismos conjuntos de soluciones. Ejercicio: Dar un ejemplo de dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes con distinto número de ecuaciones. La eliminación Gaussiana es una herramienta que nos permitirá tratar las dos primeras Situaciones. Es un algoritmo que sistemáticamente transforma un sistema en otro más Simple, pero equivalente. La idea es llegar a un sistema lo más sencillo posible, eliminando Variables, y obtener al final un sistema que sea fácilmente resoluble. Por ejemplo, uno triangular1 para el caso $m = n$. El proceso de eliminación descansa sobre tres operaciones Simples que transforman un sistema en otro equivalente. Para describir estas operaciones, Sea Ek la k- ´esima ecuación Ek : $ak1x1 + ak2x2 + . . . + aknxn = bk$

Y escribamos el sistema como

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

Dado un sistema lineal S, cada una de las siguientes transformaciones elementales produce un sistema equivalente S. 1. Intercambio de las ecuaciones i-´esima y j-´esima (1 _ i _ j _ m). Esto es, si

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}, \text{ entonces } \mathcal{S}' \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

2. Reemplaza la i-´esima ecuación por un múltiplo no nulo de ella. Esto es

$$\mathcal{S}' \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ \alpha E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}, \text{ donde } \alpha \neq 0.$$

3. Reemplaza la j-´esima ecuación por la suma de ella misma con un múltiplo de la i-´esima ecuación. Esto es

$$S' = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j + \alpha E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 1.2.2. Comprobar que estas operaciones no cambian el conjunto de soluciones. Es decir, que los sistemas S y S0 son equivalentes. El problema más común en la práctica es la resolución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas, lo que se conoce como un sistema cuadrado, con solución única. En este caso, la eliminación Gaussiana es directa, y más tarde estudiaremos las diferentes posibilidades. Lo que sigue es un ejemplo típico. Ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ 6x + 2y + z &= -1, \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

En cada paso, la estrategia es centrarse en una posición, llamada posición pivote, y eliminar todos los términos por debajo de la posición usando las tres operaciones elementales. El coeficiente en la posición pivote se denomina pivote, mientras que la ecuación en donde se encuentra el pivote se llama ecuación pivote. Solamente se permiten números no nulos como pivotes. Si un coeficiente en una posición pivote es cero, entonces la ecuación pivote se intercambia con una ecuación por debajo para producir un pivote no nulo. Esto siempre es posible para sistemas cuadrados con solución única. A menos que sea cero, el primer coeficiente de la primera ecuación se toma como el primer pivote. Por ejemplo, el elemento 2 del sistema es el pivote del primer paso:

Paso 1. Elimina todos los términos por debajo del pivote. Resta tres veces la primera ecuación de la segunda para generar el sistema equivalente:

$x + y + z = 1,$

$-y - 2z = -4,$ (E2 − 3E1)

$-2x + 2y + z = 7.$

Suma la primera ecuación a la tercera para formar el sistema equivalente

$x + y + z = 1,$

$-y - 2z = -4,$

$3y + 2z = 8$ (E3 + E1).

Paso 2. Selecciona un nuevo pivote. De momento, seleccionamos un nuevo pivote buscando para abajo y a la derecha. Más adelante veremos una mejor estrategia. Si este coeficiente no es cero, entonces es nuestro pivote. En otro caso, intercambiamos con una ecuación que este por debajo de esta posición para colocar el elemento no nulo en la posición pivote. En Nuestro ejemplo, −1 es el segundo pivote

$2x + y + z = 1,$

$-1\,y - 2z = -4,$

$3y + 2z = 8.$

Paso 3. Elimina todos los términos por debajo del pivote. Suma tres veces la segunda ecuación a la tercera para llegar al sistema equivalente:

$2x + y + z = 1,$

$-1\,y - 2z = -4,$

$-4z = -4$ (E3 + 3E2)

En general, en cada paso nos movemos abajo y hacia la derecha para seleccionar el nuevo pivote, y entonces eliminar todos los términos por debajo de ´el hasta que ya no podamos seguir. En este ejemplo, el tercer pivote es −4, pero como ya no hay nada por debajo que eliminar, paramos el proceso. En este punto, decimos que hemos triangularizado el sistema. Un sistema triangular se resuelve muy fácilmente mediante el método de sustitución hacia atrás, en el que la ´ultima ecuación se resuelve para la ´ultima incógnita y se sustituye hacia atrás en la penúltima ecuación, la cual se vuelve a resolver para la penúltima incógnita, y continuamos así hasta llegar a la primera ecuación. En nuestro ejemplo, de la ´ultima ecuación obtenemos z = 1

Sustituimos z = 1 en la segunda ecuación, y tenemos:

$y = 4 - 2z = 4 - 2(1) = 2.$

Por ´ultimo, sustituimos z = 1 y y = 2 en la primera ecuación para obtener:

$x = 1/2\ (1 - y - z) = 1/2\ (1 - 2 - 1) = -1$

2.4. Potencias de exponente racional

Se define la potencia de exponente fraccionario r/s y base a como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Ejemplo:

Exponentes fraccionarios: $(16)^{3/4} = 4\sqrt{16^3}$

Las propiedades citadas para las potencias de exponente entero son válidas para las potencias de exponentes fraccionarios.

Ejemplo:

$8\ 2/3 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Radicales

Se define raíz n-ésima de un número a, como el número b que verifica la igualdad bn = a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Siendo: n el índice, a la cantidad subradical o radicando y b es la raíz n-ésima de a

$$\overset{\text{índice}}{\sqrt[n]{\underset{\text{cantidad subradical}}{a}}} = \overset{\text{raíz}}{b} \longleftrightarrow b^n = a$$

b es la raíz n-ésima de a

Importante: n siempre es positivo. No existe la raíz -5 de un número.

La radicación de índice n es la operación inversa de la potenciación de exponente n.

Por la definición de raíz n-ésima de un número a se verifica que, si b es raíz, entonces:

$$\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$$

2.5. Propiedades de los radicales

Las propiedades de las potencias enunciadas anteriormente para el caso de exponentes fraccionarios, también se pueden aplicar a las raíces:

a) Si multiplicamos el índice de una raíz n por un número p, y a la vez elevamos el radican do a ese número p el valor de la raíz no varía.

Se verifica $\Delta p \neq 0$ que:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot p]{a^p}$$

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p}=a^{\frac{p}{p\cdot n}}=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{25}$. Se verifica puesto que según acabamos de ver: $\sqrt[3]{5}={}^{3\cdot 2}\!\sqrt{5^2}=\sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces del mismo índice, se multiplican los radicandos y se halla la raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Demostración:

Según las propiedades de las potencias de exponentes enteros se verifica que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c)Para dividir raíces del mismo índice se dividen los radicandos y se halla la raíz del índice común. Suponemos que b ≠ 0 para que tenga sentido el cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Demostración:

Esta propiedad la podemos demostrar como sigue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) La raíz de una raíz es igual a la raíz cuyo índice es el producto de los índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

2.6 Operaciones, Suma y resta de radicales:

Para sumar estos radicales hay que sumar sus expresiones aproximadas. Sin embargo, la e xpresión:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \neq \sqrt{13}$$

Recuerda para sumar y restar radicales estos deben de ser idénticos:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

sí se puede sumar y restar puesto que sus radicales son idénticos

Para poder sumar o restar radicales esnecesario que tengan el mismo índice y el mismo ra dicando. Solo cuando esto sucede podemos sumar o restar los coeficientes o parte numér ica dejando el mismo radical

Ejemplo:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot 5^4}$.

Por las propiedades de los radicales podemos sacar factores del radical dejando que todos los radicales sean idénticos:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Producto de radicales

Para multiplicar radicales debemos convertirlos en radicales de igual índice y multiplicar lo s radicandos:

1.- Calculamos el m.c.m. de los índices

2.- Dividimos el m.c.m. entre cada índice y lo multiplicamos por el exponente del radica ndo y simplificamos.

Raíz de una raíz

Es la raíz cuyo índice es el producto de los índices (según se demostró en la prop iedad e), y después simplificamos extrayendo factores fuera el radical si se puede.

Ejemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7\cdot y^5}}=\sqrt[6]{x^7\cdot y^5}=\sqrt[6]{x^6\cdot x^1\cdot y^5}=x\cdot\sqrt[6]{x\cdot y^5}$

Recuerda:

Para extraer factores del radical se debe cumplir que el exponente del radicando sea mayor que el índice de la raíz.

2 opciones:

☐Se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz, el cociente indica el número de factores que extraigo y el resto los que se quedan dentro.

☐Se descomponen los factores del radicando elevándolos al mismo índice de la raíz, cada exponente que coincida con el índice saldrá el factor y los que sobren se quedan dentro

2.7. Racionalización

Para ello, hay que multiplicar numerador y denominador por la expresión adecuada.

Cuando en la fracción solo hay monomios, se multiplica y divide la fracción por un mismo número para conseguir completar en el denominador una potencia del mismo exponente que el índice de la raíz.

Ejemplo:

- $\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}$

Multiplicamos y dividimos por 4 x para obtener en el denominador una cuarta potencia y quitar el radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Cuando en la fracción aparecen en el denominador binomios con raíces cuadradas, se multiplica y se divide por un factor que proporcione una diferencia de cuadrados, este factor es el factor conjugado del denominador

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, su conjugado es: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

- Otro ejemplo: $(\sqrt{a}+b)$ su conjugado es: $(\sqrt{a}-b)$

Ejemplo:

- $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Multiplicamos por el conjugado del denominador que en este caso es: √3 -√5

Multiplicamos por el conjugado del denominador que en este caso es: $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

2.8. Operaciones con notación científica

Definición

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños.

La ventaja que tiene sobre la notación decimal es que las cifras se nos dan contadas, con l o que el orden de magnitud del número es evidente.

Un número puesto en notación científica consta de:

- ☐ Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- ☐ El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- ☐ Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

N = a.bcd...·10n

siendo: a su parte entera (solo una cifra) b c d… su parte decimal

10n La potencia entera de base 10

Si n es positivo, el número N es "grande" Y si n es negativo, entonces N es "pequeño"

Ejemplos:

32.48 · 1014 (= 3 248 000 000 000 000): Número grande.

8.561 · 10-18 (= 0.000000000000000008561): Número pequeño.

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, tenie do en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la p otencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan la misma potencia de base 10 y, así poder sacar factor común.

Ejemplos:

- A) $(5.24 \cdot 10^{6}) \cdot (6.3 \cdot 10^{8}) = (5.24 \cdot 6.3) \cdot 10^{6+8} = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.3012 \cdot 10^{15}$
- B) $\frac{5.24 \cdot 10^{6}}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0.8317 \cdot 10^{14} = 8.317 \cdot 10^{13}$
- C) $5.83 \cdot 10^{9} + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} = 5.83 \cdot 10^{9} + 6932 \cdot 10^{9} - 75 \cdot 10^{9} = (5.83 + 6932 - 75) \cdot 10^{9}$
$= 6\,862.83 \cdot 10^{9} = 6.86283 \cdot 10^{12}$

Recuerda:

☐Para multiplicar números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.

☐Para dividir números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan l os exponentes de la potencia de base 10.

☐Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

2.9 LOGARITMOS

Definición:

El logaritmo de un número m, positivo, en base a, positiva y distinta de uno, es el exponen te al que hay que elevar la base para obtener dicho número

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^{z}$$

Los logaritmos más utilizados son los logaritmos decimales Logaritmos de base 10 y los logaritmos naturales o neperianos (llamados así en honor a Neper) o logaritmos en base e (e es un número irracional cuyas primeras cifras son: e = 2. 71828182…). Ambos tienen una notación especial:

log10 m = log m   loge m = ln m

Ejemplos:

Ejemplos:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1000} = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como consecuencias inmediatas de la definición se deduce que:

El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

Demostración:

Como a0 = 1, por definición de logaritmo, tenemos que loga 1 = 0

- El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
- El logaritmo de la base es 1.
- Solo tienen logaritmos los números positivos.

Ejemplos:

loga 1 = 0

log2 1 = 0

log3 1 = 0

☐El logaritmo de la base es 1.

Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos. Un logaritmo puede ser un número natural, entero, fraccionario e incluso un nú mero irracional Al ser la base un número positivo, la potencia nunca nos puede dar un nú mero negativo ni cero.

- log_2 (−4) No existe
- log_2 0 No existe.
- log 100 = 2 ⇔ 100 = 10^2.
- log 0.1 = −1 ⇔ 0.1 = 10^{-1}.
- log $\sqrt{10}$ = 1/2 ⇔ $\sqrt{10}$ = $10^{1/2}$.
- log 2 = 0.301030....

2.10. Pro piedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Demostración:

Llamamos A = logax y B = logay. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$
$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Multiplicamos: xy = aA *aB = aA+B <> loga(x* y) = A + B = logax + logay.

Ejemplo:

loga(2 · 7) = loga2 + loga7

2.El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del di visor:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Demostración:

Llamamos A = logax y B = logay. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$
$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Dividimos: x / y = aA / aB = aA-B <>loga(x / y) = A - B = logax - logay.

Ejemplo:

loga (75/25) = loga 75-loga 25

3.El logaritmode una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la bas e de la potencia:

$$\boxed{\log_a x^y = y \cdot \log_a x}$$

4.Cambio de base: El logaritmo en base a de un número x es igual al cociente de dividir el logaritmo en base b de x por el logaritmo en base b de a:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de "fórmula del cambio de base".

Algunas calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar una de esas calculadoras pa ra calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de esta fórmula.

Ejemplo: $log_2 11 = \frac{log\, 11}{log\, 2} = 1.04139269 : 0.30103 = 3.45943162$

Se sabe si dos conjunto Tienen el mismo número de Elementos el mismo cardinal, si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre ellos.

Lo sorprendente es que en los conjuntos infinitos se pueda establecer entre un conjunto y una parte de él, y por tanto tener el mismo cardinal.

Así, el conjunto de los números naturales tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números pares pues se puede hacer corresponder a cada número natural n el número par 2n.

2.11.-Potencias De 11

Las potencias de 11

Las potencias enteras de 11 no dejan de llamar nuestra atención y pueden ser incl uidas entre los productos curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1 331

11 x 11 x 11 x 11 = 14 641

Disposición no menos interesante presentan los números 9, 99, 999, etc. cuando son e levados al cuadrado:

9^2 = 81

99^2 = 9 801

999^2 = 998 001

9999^2 = 99 980 001

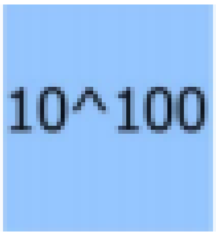
Vale la pena observar que el número de nueves menos 1 de la izquierda es igual al número de ceros de la derecha, que se sitúan entre los dígitos 8 y 1.

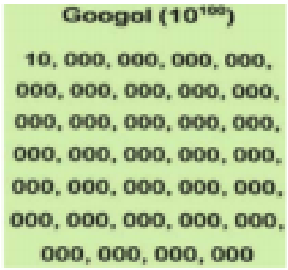
Números reales:

Los primeros números que se acercan a nuestra definición de lo que es infinito los podem os tomar de la misma naturaleza, contando elementos muy pequeños que existen en abun dancia, como son las gotas del mar (1 x 1025 gotas), los granos de arena en todas las playa s del mundo (5.1 x 10 23 granos) o el número de estrellas de todo el Universo conocido (3 x 1023 estrellas). Podemos incluso tomar el número de partículas elementales del uni verso (1 x 1080) si queremos obtener un número más grande. Si queremos hallar un nú mero más grande "Googol", acuñado por un niño de 9 años en 1939, posee 100 ceros, y fue creado con el objetivo de darnos una aproximación hacia lo que signif ica el infinito. Pero hoy en día se conocen cantidades (mucho) más grandes que el Googol.

Tenemos por ejemplo, los número primos de la forma de Mersenne, que Han podido ser encontrados gracias a la invención de las computadoras.

En 1952, el número primo de Mersenne más grande era (2 · 1017) 1, un número primo con 39 dígitos, y ese mismo año, las computadoras probaron que el número (2 · 10521)1 es ta mbién primo y que Dicho número posee 157 dígitos siendo este mucho más grande que un Googol





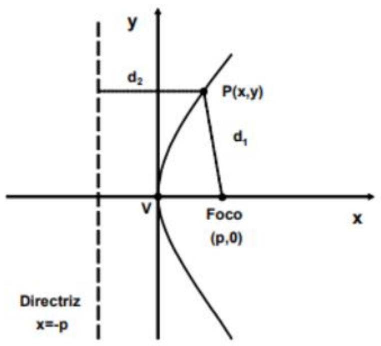
UNIDAD 3

3.1 parábolas y ecuaciones cuadráticas.

Definición de parábola La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el plano llamado foco y de una recta también fija en el plano llamada directriz.

El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice. La distancia del vértice al foco o de del vértice a la directriz se le denota mediante la letra p .

La siguiente figura muestra a una parábola que es paralela al eje x y que se abre a la derecha:



La distancia que existe de cualquier punto P(y,x) que pertenezca a la parábola al foco es

$$d_1 = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Por su parte, la distancia que existe de cualquier punto P(y,x) que pertenezca a la parábola a la directriz es: d = x + p 2

Ahora, por definición: $d_1 = d_2$

sustituyendo queda:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p$$

ahora, elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

desarrollando:

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

eliminando términos queda:

$$-2xp + y^2 = 2xp$$

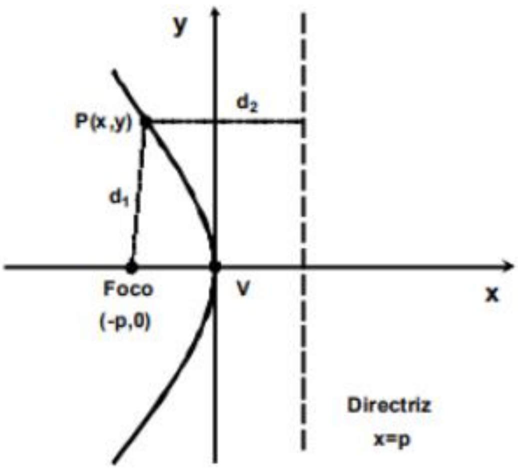
o bien:

$$y^2 = 2xp + 2xp$$

que es igual a:

$$y^2 = 4px$$

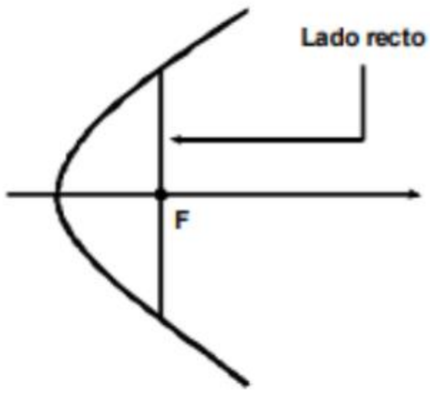
Ecuación conocida como ecuación ordinaria o canónica de la parábola con vértice en el origen. A la recta que pasa por el vértice y el foco se le conoce como eje de la parábola (EP). Cabe señalar que en una parábola la excentricidad siempre es uno porque la distancia que hay del vértice al foco es igual a la que hay del vértice a la directriz. Similarmente, si el eje de la parábola también es el eje x , pero se abre para la izquierda entonces el foco se ubica en F (0,− p) y la directriz tiene ecuación x = p , gráficamente esto es



Haciendo un análisis similar al anterior se obtiene que su ecuación canónica es

$$y^2 = -4px$$

Se conoce como lado recto (LR) de cualquier parábola a la longitud de una recta perpendicular al EP y que pasa por su foco y que incluye a la parábola en ambos extremos

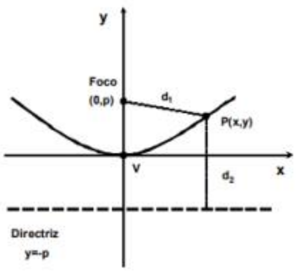


Sustituyendo p en la ecuación se tiene: $y^2 = 4p(p) = 4p^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4p^2} = \pm 2p$, por lo tanto cada ordenada tiene un longitud de $2p$, eso significa que el lado recto se calcula como:

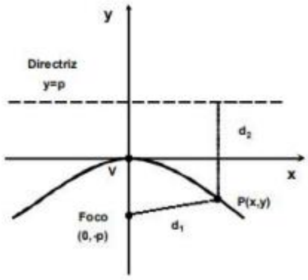
$$LR = |4p|$$

Por otra parte, si el eje de la parábola es el eje y, se tienen dos casos:

Si se abre hacia arriba se tiene que el foco se ubica en $F(0, p)$ y su directriz es: $y = -p$, tal y como se muestra en la figura:



Si se abre hacia abajo con foco en F (0,− p) y directriz en y = p , se tiene



Su ecuación ordinaria es:

$$x^2 = -4py$$

Ejemplos.
Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de las siguientes parábolas:

1) $y^2 = 8x$
Solución.
$4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} = 2$. $EP: eje\, x$. Signo (+), por lo que se abre hacia la derecha.
El foco se ubica en $F(2,0)$. La ecuación de la directriz es: $x = -2$. El lado recto es: $LR = |4(2)| = 8\, u$.

2) $y^2 = -12x$
Solución.
$4p = -12 \Rightarrow p = \frac{-12}{4} = -3$. $EP: eje\, x$. Signo (-), por lo que se abre hacia la izquierda. El foco se ubica en $F(-3,0)$. La ecuación de la directriz es: $x = 3$. El lado recto es: $LR = |4(-3)| = 12\, u$.

3) $x^2 = 16y$
Solución.
$4p = 16 \Rightarrow p = \frac{16}{4} = 4$. $EP: eje\, y$. Signo (+), por lo que se abre hacia arriba. El foco se ubica en $F(0,4)$. La ecuación de la directriz es: $y = -4$. El lado recto es: $LR = |4(4)| = 16\, u$.

Ecuaciones cuadráticas Las ecuaciones de segundo grado son de la forma:

aX2 + bX + C = 0 a ≠ 0 1.

Identificación de coeficientes: Al empezar con las ecuaciones de segundo grado, resulta complicado identificar los coeficientes a, b y c. Sin embargo, es muy fácil. Presta atención a los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1) En las siguientes ecuaciones de segundo grado identifica los coeficientes a, b y c:

a) 2x 2 + 3x + 1= 0 → solución: a = 2 ; b = 3 ; c = 1.

b) x 2 – 2x + 5 = 0 → solución: a = 1 ; b = – 2; c = 5 .

c) – 5x 2 + 4x – 2 = 0 → solución: a =– 5 ; b = 4 ; c = – 2 .

d) – 2 x 2+ x – 4 = 0 → solución: a =– 2 ; b = 1 ; c = – 4 .

e) x 2 – 9 = 0 → solución: a = 1 ; b = 0 ; c= – 9 .

f) x 2 + 5 x = 0 → solución: a = 1 ; b = 5 ; c= 0.

Las ecuaciones como las a), b), c) y d), se dice que son completas porque ninguno de sus coeficientes es cero. Las ecuaciones como la e) y la f), se dice que son incompletas porque alguno de sus coeficientes es cero. (Nota: el coeficiente 'a' nunca puede ser cero pues si lo fuera, la ecuación no sería de segundo grado) 3. Tipos de ecuaciones de segundo grado: Una ecuación de segundo grado puede ser completa o incompleta. En el siguiente cuadro puede verse claramente la clasificación de ecuaciones de segundo grado

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$ax^2+bx+c=0, \text{ con } a\neq 0$

$$\begin{cases} \text{Incompletas} \begin{cases} 1)\ b=0 \rightarrow ax^2+c=0 \\ 2)\ c=0 \rightarrow ax^2+bx=0 \end{cases} \\ \\ \text{Completas: } b\neq 0 \text{ y } c\neq 0 \end{cases}$$

Vamos a empezar por resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas. Los métodos de resolución son distintos según que sea b=0 ó c=0. 4. Resolución de la ecuación incompleta

3.1 La ecuación ax 2 + c = 0.

Para resolver: 1°) despejamos x 2 2°) tomamos la raíz cuadrada de ambos miembros

$$ax^2+c=0 \rightarrow ax^2=-c \rightarrow x^2=\frac{-c}{a} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

3.2 La ecuación ax 2 + bx = 0. Para resolver: 1°) extraemos factor común 2°) igualamos a cero cada factor.

$$ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 & \leftarrow \text{PRIMERA SOLUCIÓN} \\ ax+b=0 \rightarrow x_2=\frac{-b}{a} & \leftarrow \text{SEGUNDA SOLUCIÓN} \end{cases}$$

a) $x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm\sqrt{4} \longrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $x^2-9=0 \longrightarrow x^2=9 \longrightarrow x=\pm\sqrt{9} \longrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

c) $x^2+25=0 \longrightarrow x^2=-25 \longrightarrow x=\pm\sqrt{-25} \longrightarrow$ **NO HAY SOLUCIÓN.**

d) $2x^2-32=0 \longrightarrow 2x^2=32 \longrightarrow x^2=16 \longrightarrow x=\pm\sqrt{16}$

y por tanto $\longrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{cases}$

e) $x^2-3x=0 \longrightarrow x(x-3)=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x-3=0 \rightarrow x_2=3 \end{cases}$

f) $x^2+5x=0 \longrightarrow x(x+5)=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x+5=0 \rightarrow x_2=-5 \end{cases}$

3.2 Polinomios

Definición. Términos. Grado. Valor numérico Un monomio viene Dado por el producto n de números reales e indeterminadas, Llamamos coeficientede un monomio al número real que multiplica a la indeterminada o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la parte literal del mono mio.

- $\frac{1}{7}\cdot x^2 - 32\cdot x^3 + 8$ *es un polinomio de grado 3 en la variable* x .
- $-5\cdot y^4 + 6\cdot x^2 + 11\cdot x$ *es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas* x *e* y.
- $3\cdot x^2\cdot y^3 - 2 + 5\cdot y^2$ *es un polinomio de grado 5 en* x *e* y.
- $8x - 9\cdot y + 3\cdot z$ *es un polinomio de grado 1 en* x *,* y *y* z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar pol inomios con una única variable.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

Donde los coeficientes ak son números reales Decimos que un polinomio es mónico cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Los términos de un polinomio vienen determinados por el número de mono mios que tenga ese polinomio

Recuerda que:

- Monomio: mono: uno, nomio: término: 1 término
- Binomio: bino: 2 dos, nomio: término: 2 términos
- Trinomio: trino: tres, nomio: término: 3 términos. Cuatrinomio: cuatri: cuatro, no mio: término: cuatro términos.
- A partir de cuatrinomio se les nombra polinomios: Poli: varios, nomio: términos.
- Un polinomio es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El gra do de un polinomio viene dado por el mayor grado de sus monomios.

Si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un nú mero real, el valor numérico del polinomio para ese valor determinado de la variable.

Si hemos llamado p¨ aun polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo el número 5 la denotamos por p(-5)
y leemos ”p de menos cinco” o ”p en menos cinco”. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x podemos referirnos a él como p o p(x) indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

Ejemplos:

- *Si evaluamos el polinomio* $p=-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ *en* $x=5$ *nos encontramos con el número*

$$p(5)=-3\cdot 5^4+\frac{1}{5}\cdot 5^2+2=-3\cdot 625+5+2=-1875+7=-1868$$

- *El valor del polinomio* $q(y)=4y^3+3y-7$ *para* $y=-1$ *es*

$$q(-1)=4\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)-7=4\cdot(-1)-3-7=-4-10=-14$$

3.2.1-Análisis de las Variables de un Polinomio

Un polinomio en la variable x es una expresión algebraica formada solamente por la suma de términos de la forma axn , donde a es cualquier número y n es un número entero no negativo.

☐ Ejemplos:

1) 3x – 2

2) x 4 + 5

3) $2n^2 - 5n + 3$

4) $5y^3 + 4y^2 - 3y + 1$

Nota: Los polinomios son expresiones algebraicas, pero no toda expresión algebraica es un polinomio. Término: Un término es una parte de una expresión algebraica. Los términos se separan entre sí por los signos de suma (+) o resta (-).

♦ Coeficiente numérico: es el factor numérico del mismo.

♦ Término constante: es el coeficiente numérico que no contiene variable. Los polinomios se clasifican de acuerdo al número de términos.

♦ Un polinomio que tiene un solo término se llama monomio.

♦ Si el polinomio tiene dos términos se llama un binomio

♦ Si tiene tres términos se llama trinomio

♦ Los polinomios formados por más de tres términos no reciben ningún nombre en especial, simplemente son polinomios con la cantidad de términos que contiene. Si el polinomio es en una variable, el grado del polinomio está determinado por el término que contiene el mayor exponente.

♦ Si tiene más de una variable, se suman los exponentes de cada término y la suma más alta determina el grado del polinomio.

Polinomios	Grado
$9y^4 - 5y^3 + 3y^2 + 7y - 2$	Es de grado cuatro
$x^3 - 4x^2 - 6$	Es de grado tres
$2n^2 - 3n + 1$	Es de grado dos
$5x - 1$	Es de grado uno
8	Es de grado cero
$3x^3y^5 + 5x^2y^4 - 7xy^2 + 6$	Es de grado ocho

Los polinomios se ordenan escribiendo los exponentes en orden ⁄ descendente, es decir, de mayor a menor ⁄ ascendente, es decir, de menor a mayor

Polinomio	Orden
$3x^2 - 5x + 8$	Orden descendente
$8 - 5x + 3x^2$	Orden ascendente

Términos semejantes Dos términos son semejantes cuando ambos son numéricos o cuando tienen las mismas variables y sus exponentes son respectivamente iguales

Semajentes	No semejantes
6 ; -11	6 ; $-11x$
x ; $3x$	x ; $3x^2$
$-3x$; $11x$	$-3x$; $11xy$

Evaluacion de polinomios Para evaluar un polinomio hacemos lo mismo que evaluar una expresión algebraica. Simplemente sustituimos el valor asignado a la variable y efectuamos las operaciones indicadas en el polinomio

Evalúa cada polinomio para los valores asignados:

1) 2x4 – 3x3 + 6x – 8 cuando x = -2

2) x 2 +5x – 6 cuando x = -

3 3) 3xy –xy +4 cuando x = 1 y y = -2

3.3. Operaciones con Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polino mio.

A la hora de sumar dos polinomios procedemos a sumar los monomios de igual parte lite ral.

- *La suma de los polinomios* $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ *y* $-x^4+4x^2-5x-6$ *es el polinomio*

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+\left(-x^4+4x^2-5x-6\right)=\left(-3x^4-x^4\right)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$

$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(7x^2-5x+3)+(2x^2+9x-8)=(7x^2+2x^2)+(-5x+9x)+(3-8)=9x^2+4x-5$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2x^5 & +6x^4 & +3x^3 & -11x^2 & +5x & +6 \\
+ & -9x^5 & & +4x^3 & +11x^2 & -9x & -7 \\
\hline
 & -7x^5 & +6x^4 & +7x^3 & & -4x & -1
\end{array}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p

y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumar los:

P+q=q+ p

Ejemplo:

- $((2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 5x + 2)) + (x + 6) = (2x^3 - 2x^2 + 2 + x^4 + 7x^2 + 5x + 2) + (x + 6) =$
$= (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x + 4) + (x + 6) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 10$

También:

- $(2x^3 - 2x^2 + 2) + ((x^4 + 7x^2 + 5x + 2) + (x + 6)) = (2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 5x + 2 + x + 6) =$
$= (2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 6x + 8) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 10$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es este último. Se trata del polinomio dado por el nú mero 0, el polinomio cero.

- $(5x^3 + 4x^2 - 3x + 1) + 0 = 0 + (5x^3 + 4x^2 - 3x + 1) = (5x^3 + 4x^2 - 3x + 1)$
- $0 + (-7x^3 + 3x + 7) = (-7x^3 + 3x + 7) + 0 = -7x^3 + 3x + 7$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su polinomio opuesto tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p = -3x^4 + 5x^3 + 2x - 7$ es $3x^4 - 5x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-3x^4 + 5x^3 + 2x - 7) + (3x^4 - 5x^3 - 2x + 7) = (-3x^4 + 3x^4) + (5x^3 - 5x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

3.4 Resta de polinomios

Recordemos que el polinomio opuesto de otro se obtiene simplemente cambiando e l signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número " -1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es :

$$-p = (-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la operación diferencia, o resta, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p - q = p + (-q) = p + (-1)\cdot q$$

La resta consiste en sumar a un polinomio el opuesto de otro

Ejemplo:

- Dado el polinomio: $p \equiv 2x^4 - 3x^2 + 6$ y el polinomio: $q \equiv -7x^4 + 6x^2 + 7$.

Vamos a restar $p - q$:

El proceso es el mismo que para la suma, lo único que cambia es que a p le sumamos el op uesto de q: Es decir, a q le cambiamos de signo y se lo sumamos a p:

$$(2x^4 - 3x^2 + 6) - (-7x^4 + 6x^2 + 7) = (2x^4 - 3x^2 + 6) + (7x^4 - 6x^2 - 7) = 9x^4 - 9x^2 - 1.$$

Recordemos que el opuesto de q es $-q$, $(7x^4 - 6x^2 - 7)$.

Ejemplo:

- $(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$
  $= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$

Actividades propuestas

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

   a) x2 – 2 b) 3x4 + x3 – 1

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un p+olinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los n úmeros reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del produc to respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cue stión que resolvemos con facilidad

3.5 División de polinomios

Si analizamos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. ya sabes que cuando dividimos dos números, D (dividendo) entre d (divisor, distinto de 0), surgen otro dos, el cociente (c) y el resto (r), que se encuentran ligados por la llamada prueba de la división:

D=d*c+r

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando r= 0.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente c, t al que el resto r sea un número menor que el divisor d, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto r, podemos escoger arbitr ariamente un valor para el cociente c el cual nos suministra su valor asociado como re sto r.

En efecto, si tenemos como dividendo D=672 y como divisor d=12
y “queremos” que el cociente sea c = 48 su resto asociado es :

r = D - d . c = 672-12. 48 = 672-576=96

y la conexión entre estos cuatro números es

672 = 12.48+96

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios p(x) y q(x) , la división de p(x) , polinomio dividendo, entre q(x) polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente c(x) y el polinomio resto r(x) .

También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto:
su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$px \ = qx \cdot c(x) + r(x)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de Polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

Vamos a dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

3.6 Factorización de polinomios

Todo polinomio de grado n tiene a lo Sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Basándonos en el cálculo de las raíces de un polinomio vamos a realizar el proceso de des composición de un polinomio en forma de producto de otros polinomios más sencillos. (Factorización de un polinomio):

Nos vamos a basar en el siguiente enunciado: La condición necesaria y suficiente para que un polinomio P(x) sea divisible por (x - a) , es que a sea una raíz de P (x)
Podemos reescribir este resultado de la siguiente manera

Un polinomio P(x) es divisible por (x - a) <> a es una raíz de P(x). Vamos a demostrarlo:

Si P(x) es divisible por (x-a)<> a es una raíz de P(x): Condición necesaria
En efecto: Si P(x) divisible por (x - a) r = <>P(a)=0 (por el teorema del resto)<>a es raíz de P(x)

Si a es una raíz de P(x) <> (x-a) divide a P(x): Condición suficiente –
Como consecuencia inmediata se tiene: si a es una raíz de P(x) <>P(x) = c(x) (x - a)

El polinomio dado queda descompuesto en forma de producto de dos factores
Repitiendo: el proceso Para c(x) éste se puede descomponer a su vez de nuevo y así sucesivamente.

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Decimos que un polinomio es reducible si admite una factorización mediante polin omios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será irreducible.

Ejemplo:

Descomponer factorial mente el polinomio: x3 = 4x2 + 5x - 2.

Como el coeficiente de x3 es 1, según vimos en el apartado de cálculo de raíces de un polinomio,las posibles raíces racionales, de existir, han de ser divisores de 2.por tanto pue den ser: +1, -1, +2, -2.

Comprobamos si el 1 es raíz. Aplicamos el teorema de Ruffini:

	1	−4	5	−2
1		1	−3	2
	1	−3	2	0

Por tanto, 1 es raíz y tenemos

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

Resolviendo ahora la ecuación x2- 3x + 2 = 0, resulta x = 1 y x = 2.

Por tanto, x2- 3x + 2 = (x - 1)-(x 2) y en definitiva, el Polinomio tendrá La siguiente descomposición factorial:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-1)(x-2)=(x-1)^2(x-2)$$

3.7. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x)\neq 0$$

Dónde tanto P(x) como Q(x) son polinomios.

Ejemplos:

Así son fracciones algebraicas las siguientes expresiones:

$$\frac{7x^3-2x}{6x^2+5x-9} \quad \frac{4x^2-9x}{2x^2+33} \quad \frac{3x^2y+2xy^2}{7xy}$$

Son expresiones algebraicas. En general, no son un polinomio. Sólo lo es en el muy particu lar caso en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polino mio de grado 0.

Es sencillo constatar que las expresiones Anteriores no son un polinomio: cualquier polinomio puede tener un valor numérico para cualquier número real x.

Sin embargo, esas expresiones no pueden ser evaluadas para los valores que anulan el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción algebraica sí es un polinomio:

$$\frac{-3x^3+5x^2-3x}{x}=\frac{-3x^3}{x}+\frac{5x^2}{x}+\frac{-3x}{x}=-3x^2+5x-3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, p ero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en x-0 . No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualqu ier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor.

Son expresiones equivalentes allí donde ambas tienen sentido.

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en las fracciones a partir de la descomposición factorial de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$
$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factori zado. De esa forma entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

3.8.-Simplificación de fracciones algebraicas

De la misma manera que se hace con las fracciones numéricas, para simplificar fracciones algebraicas se descomponen numerador y denominador en factores, simplificando, posteri ormente, aquellos que son comunes.

Ejemplo:

Una fracción algebraica como

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

Puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizacion es en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idéntic as, pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, e sto es, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Las operaciones con fracciones algebraicas se realizan de la misma forma q ue las respectivas operaciones con fracciones numéricas.

Puesto que Las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiend o las propiedades de los números reales.

Suma o resta. Para sumar o restar dos fracciones algebraicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la má s adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}=\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

Producto. Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

División. Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}=\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

3.9 Ecuaciones de primer grado con una variable

En este libro continuamente se trabaja con ecuaciones. Es esencial en absoluto comprender el significado de las ecuaciones y sus propiedades.

Las ecuaciones y sus propiedades

Una ecuación indica la igualdad de dos expresiones algebraicas. Las expresiones algebraicas pueden escribirse en términos de una o más variables. Los siguientes son algunos ejemplos de ecuaciones.

$$3x - 10 = 22 - 5x \qquad (1)$$

$$\frac{2r - 5s + 8t}{3} = 100 \qquad (2)$$

$$w^2 - 5w = -16 \qquad (3)$$

En las ecuaciones (1) y (3), las variables son x y w, respectivamente. En la ecuación (2) hay tres variables, r, s y t. Se utiliza el término variable porque se pueden sustituir las letras con distintos valores numéricos.

La solución de una ecuación consta de esos valores numéricos, los cuales, al ser sus- tituidos por las variables, hacen válida una ecuación. Los valores numéricos que hacen vá- lida una ecuación se conocen como raíces de una ecuación. Se dice que las raíces son los valores de la(s) variable(s) que satisface(n) la ecuación. En la ecuación (1), la sustitución del número 0 por la variable x da como resultado

10= 22

lo cual no es cierto. El valor x = 0 no es una raíz de la ecuación. Sin embargo, al sustituir el número 4 por la variable x se obtiene

3(4) - 10 = 22 - 5(4)

2=2

Se considera que el valor x = 4 es una raíz de la ecuación.

Se pueden distinguir tres tipos de ecuaciones. Una identidad es una ecuación que es válida para cualquier valor numérico asignado a las variables. Un ejemplo de una identidad es la ecuación

$$6x + 12 = \frac{12x + 24}{2}$$

5(x + y) = 5x + 5y

En cada una de estas ecuaciones, cualquier valor que se asigne a las variables hará que ambos lados sean iguales.

Una ecuación condicional es válida únicamente para un número limitado de valores de las variables. Por ejemplo, la ecuación

x +3 = 5

es verdadera sólo cuando x es igual a 2.

Un enunciado falso, o contradicción, es una ecuación que nunca es verdadera. Esto significa que no hay valor alguno que se pueda asignar a las variables para que los dos la- dos de la ecuación sean iguales. Un ejemplo es la ecuación

X=x+5

Se indica que los dos lados no son iguales al usar el símbolo; para este ejemplo,

$$x \neq x + 5$$

La solución de una ecuación se refiere al proceso de encontrar las raíces de una ecuación, si es que existe alguna. Con el fin de resolver ecuaciones, por lo general se manipulan o se reordenan. Las reglas siguientes indican las operaciones permitidas.

Reglas seleccionadas para el manejo de ecuaciones iguales de ambos lados de una ecuación.

II Es posible multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por cualquier constante diferente a cero.

III Se pueden multiplicar ambos lados de una ecuación por una cantidad que implique variables.

IV Es posible elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación.

V Se pueden dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que incluya variables siempre que la expresión no sea igual a 0.

Las reglas I y II llevan a la creación de ecuaciones equivalentes. Las ecuaciones equivalentes son ecuaciones que tienen las mismas raíces. Las reglas III y IV pueden dar como resultado raíces que no son raíces de la ecuación original. Estas raíces se denominan raí- ces extrañas. La aplicación de la regla V puede llevar a ecuaciones que no tienen todas las raíces contenidas en la ecuación original o ecuaciones que no son equivalentes a las ecuaciones originales.

Algunos conocimientos preliminares

El grado de un polinomio se define como el grado del término elevado a la mayor potencia en un polinomio. Si se puede escribir una ecuación en la forma Expresión polinomial 0

el grado de la expresión polinomial es el grado de la ecuación. Por tanto,

la ecuación $2x - 4 = 0$ es una ecuación de primer grado. La ecuación $4r2 - r +10= 0$ es una ecuación de segundo grado. La ecuación $n4 - 3n2 + 9 = 0$ es una ecuación de cuarto grado.

Solución de ecuaciones de primer grado con una variable

El procedimiento que se emplea para resolver ecuaciones depende de la naturaleza de la ecuación. Considérense primero ecuaciones de primer grado que implican una variable. Los siguientes son algunos ejemplos de estas ecuaciones.

$$3x = 2x - 5$$

$$5x - 4 = 12 + x$$

Es relativamente fácil resolver ecuaciones de esta forma. Al usar las reglas de manejo apropiadas, el planteamiento consiste sólo en aislar la variable en un lado de la ecuación y todas las constantes al otro lado de la ecuación.

Resuelva las dos ecuaciones de primer grado que se presentaron antes.

SOLUCIÓN

Para la ecuación 3x = 2x – 5, se suma 2x en ambos lados de la ecuación para obtener

$$3x + (-2x) = 2x - 5 + (-2x)$$

$$\boxed{x = -5}$$

3.10- Las desigualdades y su solución

La expresión debajo del radical de la fórmula cuadrática, b2 - 4ac, recibe el nombre de discriminante. Obsérvense las generalizaciones siguientes con respecto del discriminante y las raíces para ecuaciones de segundo grado.

Interpretaciones del discriminante

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

I *Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos raíces reales.*

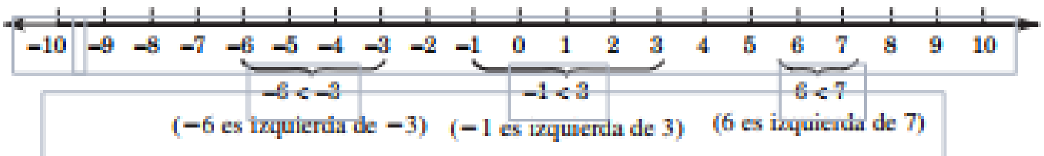
II *Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una raíz real.*

III *Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay raíces reales.*

Desigualdad	Interpretación
a) $3 < 5$	"3 es menor que 5"
b) $x > 100$	"el valor de *x* es mayor que 100"
c) $0 < y < 10$	"el valor de *y* es mayor que cero y menor que 10"

Estas desigualdades son desigualdades estrictas, puesto que los elementos que se comparan nunca son iguales entre sí. El caso a) ilustra una desigualdad absoluta, la cual siempre es verdadera. Una desigualdad condicional sólo es verdadera en ciertas situaciones. La desigualdad del caso b) es verdadera cuando la variable x tiene un valor mayor que 100. Si x = 150, la desigualdad es verdadera; si x=- 25, la desigualdad no es verdadera. El caso c) ilustra lo que se denomina una doble desigualdad.

Un uso de las desigualdades es facilitar la comparación de números. La figura 1.1 ilustra la recta de los números reales. Dados dos números reales a y b, si a < b, significa que a cae a la izquierda de b en la recta de los números reales. En la figura 1.1 se presentan ejemplos de desigualdades



Los siguientes enunciados son maneras de expresar la misma relación.

a es menor que *b*.
b es mayor que *a*.
$a < b$
$b > a$
$b - a > 0$
$a - b < 0$
a cae a la izquierda de *b* en la recta de los números reales.
b cae a la derecha de *a* en la recta de los números reales.

Se expresa otro tipo de relación de desigualdad por medio de los símbolos y Dichas relaciones de desigualdad permiten la posibilidad de que dos cantidades puedan ser iguales. La tabla siguiente ilustra estos tipos de desigualdades.

Desigualdad	Interpretación
a) $x + 3 \geq 15$ *b*) $y \leq x$	"la cantidad $(x + 3)$ es mayor que *o* igual a 15" "el valor de y es menor que *o* igual al valor de x"

Notación de intervalo

Un intervalo es un conjunto de números reales que caen entre dos números a y b. Es posible especificar esto usando la siguiente notación:

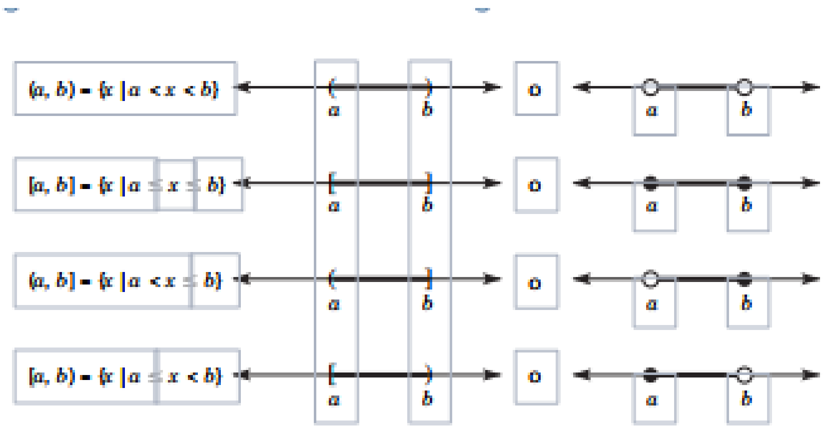
$(a, b) = (x)a < x < b)$

La notación (a, b) representa el intervalo abierto con los extremos a y b. La notación $\{x|a < x < b\}$ indica que el intervalo abierto con extremos a y b "consta de los números reales x tales que (|) x es mayor que a y x es menor que b". Por "abierto", nos referimos a los valores extremos que no se incluyen en el intervalo.

Un intervalo cerrado es aquel que incluye los valores de los extremos. La notación [a, b] representa el intervalo cerrado que incluye los valores de los extremos a y b. Es posible expresar este intervalo cerrado con mayor precisión como

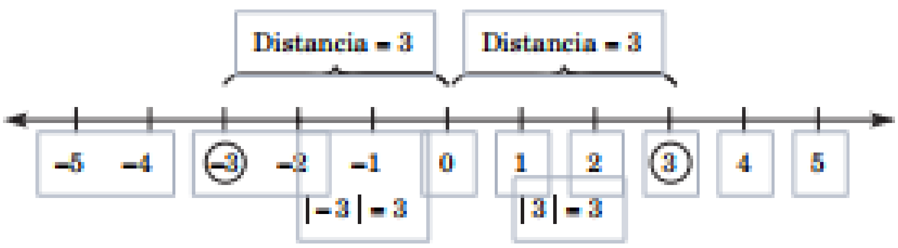
$[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$

Los intervalos abiertos en un extremo incluyen un extremo, pero no el otro. La notación (a, b] representa el intervalo abierto en un extremo que contiene el punto de extremo b pero no a. La notación [a, b) expresa el intervalo abierto en un extremo que incluye a pero no b. La figura 1.2 ilustra la representación gráfica de varios intervalos. Nótese que se ilustran dos representaciones de la recta numérica, una que usa paréntesis y corchetes y la otra que utiliza círculos abiertos () y sólidos (). La notación con círculo abierto indica que el valor del extremo no se incluye en el intervalo. El círculo sólido indica que sí se incluye el valor del extremo.



3.11 Relaciones de Valor Absoluto

El valor absoluto de un número es su distancia de separación respecto del cero en la recta de los números reales, la cual debe ser mucho mayor que o igual a cero. Se expresa el valor absoluto de un número a como |a|. Usando esta definición, se puede confirmar en la figura 1.9 que |3| 3 y |3| 3. La siguiente es una definición más formal.



Definición: Valor absoluto Para cualquier número real a,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Algunas propiedades de los valores absolutos

Las siguientes son algunas propiedades de los valores absolutos.

Propiedad 1

$$|a| \geq 0$$

$$|-5| = 5 \geq 0$$
$$|10| = 10 \geq 0$$
$$|0| = 0 \geq 0$$

Propiedad 2

$$|-a| = |a|$$

$$|-4| = |4| = 4$$

Propiedad 3

$$|x - y| = |y - x|$$

$$|12 - 5| = |7| = 7$$
$$|5 - 12| = |-7| = 7$$

Propiedad 4

$$|ab| = |a|\,|b|$$

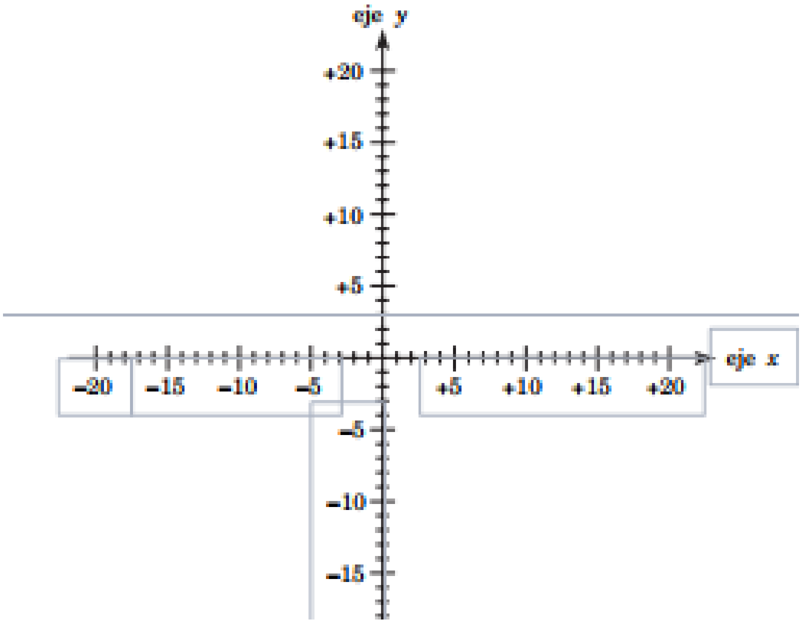
$$|3(-5)| = |-15| = 15$$

3.12- Sistemas de coordenadas rectangulares

A lo largo de este libro se utilizará el modelo visual con tanta frecuencia como sea posible para reforzar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos. El modelo visual a menudo tendrá la forma de una representación gráfica. Para elaborar la representación gráfica, ahora se estudian los sistemas de coordenadas rectangulares.

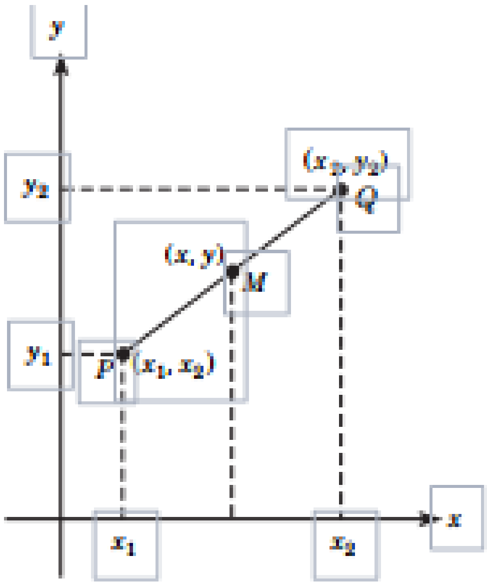
El plano cartesiano

Considérese un plano en el que se trazan una línea horizontal y una línea vertical, como en la figura 1.13. Las dos líneas son números reales, los cuales se intersecan en sus respectivos puntos cero. La línea horizontal se conoce como eje horizontal. Según se indica en la figura 1.13, es más común que reciba el nombre de eje de las x. La línea vertical es el eje vertical y



Fórmula del punto medio

La figura 1.17 ilustra un segmento de línea PQ, donde P y Q tienen coordenadas (x1, y1) y (x2, y2), respectivamente. Puede localizarse el punto medio de un segmento de línea usando la fórmula del punto medio.



Definición: Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de línea que une dos puntos que tienen las coordenadas (x1, y1) y (x2, y2), respectivamente, tiene las coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Fórmula de la distancia

Dados dos puntos en un plano cartesiano, se puede determinar la distancia que separa los dos puntos basándose en el teorema de Pitágoras. En la figura 1.19, suponga que se interesa en encontrar la distancia que separa los puntos A y B. Se forma el triángulo rectángulo

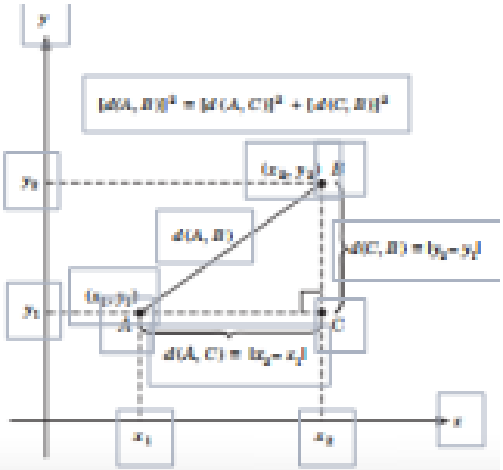


Figura 1.19 Teorema de Pitágoras.

3.13 Ecuaciones lineales

Forma general- Ecuación lineal con dos variables

Una ecuación lineal donde se están relacionando dos variables x y y tiene la forma estándar

ax+ by = c

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado. Cada variable de la ecuación se eleva (implícitamente) a la primera potencia: ax + by= c ⇒ ax1 + by1= c; por tanto, es una ecuación de primer grado. La presencia de términos que tienen exponentes distintos a 1 (por ejemplo, x2) o de términos que implican un producto de variables (por ejemplo, 2xy) ocasiona que una ecuación no se considere como lineal.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales con dos variables:

	Parámetros de la ecuación (2.1)		
	a	b	c
$2x + 5y = -5$	2	5	-5
$-x + \frac{1}{2}y = 0$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$x/3 = 25$	$\frac{1}{3}$	0	25
$\sqrt{2}u - 0.05v = 3.76$	$\sqrt{2}$	-0.05	3.76
$2s - 4t = -\frac{1}{2}$	2	-4	$-\frac{1}{2}$

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones que no son lineales. ¿Puede explicar por qué?

$$2x + 3xy - 4y = 10$$

$$x + y^2 = 6$$

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$$

$$ax + \frac{b}{y} = c$$

La forma de una ecuación lineal no siempre es obvia. A primera vista, la ecuación

$$2x = \frac{5x - 2y}{4} + 10$$

podría no parecer lineal. Sin embargo, multiplicar ambos lados de la ecuación por 4 y mover las variables al lado izquierdo da: 8x + 5x- 2y +40, lo cual implica la ecuación: 3x +2y + 40, que es lineal y tiene la forma de la ecuación (2.1).

Representación mediante el uso de las ecuaciones lineales

Dada una ecuación lineal que tiene la forma ax + by c, el conjunto solución para la ecuación es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Al usar la notación de conjunto se puede especificar el conjunto solución S como

$$S = \{(x, y) \mid ax + by = c\}$$

De manera verbal, esta notación indica que el conjunto solución S consta de los elementos (x, y), de tal manera que (la línea vertical) satisfaga la ecuación ax + by = c. Dicho de otro modo, la ecuación (2.2) expresa que S consta de todos los pares ordenados (x, y), de manera que ax +by = c. Para cualquier ecuación lineal, S consta de un número infinito de elementos; es decir, hay un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen una ecuación lineal que tiene la forma ax + by =c.

Para determinar un par de valores que satisfaga una ecuación, asigne un valor para una de las variables, sustituya este valor en la ecuación y despeje el valor correspondiente de la otra variable. Este método supone que se incluyen ambas variables en la ecuación (esto es, $a \neq 0$ y $b \neq 0$).

(Posibilidades de producción) Una compañía fabrica dos productos diferentes. Para la próxima se- mana se tienen disponibles 120 horas de trabajo para producir los dos productos. Es posible asignar horas de trabajo de fabricación para cualquiera de los productos. Además, puesto que ambos productos generan buenas utilidades, a la gerencia le interesa aprovechar el total de 120 horas durante la semana. Cada unidad producida del producto A requiere tres horas de trabajo y cada unidad del producto B re- quiere 2.5 horas.

a) Defina una ecuación que indique que el total de horas de trabajo empleadas para producir x unidades del producto A y y unidades del producto B es igual a 120.

b) ¿Cuántas unidades del producto A se pueden fabricar si se producen 30 unidades del producto B?

c) Si la gerencia decide producir sólo un producto, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede fabricar del producto A? ¿El máximo del producto B?

SOLUCIÓN

a) Las variables se pueden definir como sigue:

x = número de unidades fabricadas del producto A
y = número de unidades fabricadas del producto B

Se ha indicado que hay un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen cualquier ecuación lineal. En el ejemplo 2, ¿hay algún elemento del conjunto solución que pudiera no ser realista?

SOLUCIÓN

En el ejemplo 2, x y y representan el número de unidades fabricadas de dos productos. Puesto que una producción negativa es imposible, los valores negativos de X y Y no tienen significado real alguno. Hay valores negativos que satisfacen la ecuación (2.5). Por ejemplo, si y 60, entonces

$3x + 2.5(60) = 120$

$3x + 150 = 120$

$3x = -30$

$x = -10$

Además de valores negativos, es posible que x y y tengan valores decimales o fraccionarios. Por ejemplo, si y 40,

$3x + 2.5(40) = 120$

$3x + 100 = 120$

$3x = 20$

$X = 6.5$

Según sea la naturaleza de los productos y la forma cómo se venden, los valores fraccionarios pueden o no ser aceptables.

Para una ecuación lineal con dos variables existe siempre una intercepción de x y una intercepción de y (excepto por dos casos especiales). En la figura 2.1, la intercepción de x es (8, 0), y la intercepción de y es (0, 4). En la figura 2.2, las intercepciones de x y y ocurren en el mismo punto, el origen. La intercepción de x es (0, 0) y la intercepción de y es (0, 0). Analice ambas figuras y verifique que la intercepción de x representa un punto que tiene un valor de y igual a 0 y que la intercepción de y representa un punto con valor de x igual a 0.

La ecuación $x = k$

Una ecuación lineal de la forma ax, c es un caso especial de la ecuación (2.1), donde b 0. Para esta ecuación no hay término con y. Dividir ambos lados de la ecuación entre a produce la forma simplificada

$x = c/a$

Puesto que c y a son constantes, se puede suponer que $c/a = k$ y escribir la ecuación en la forma equivalente

$X=k$

donde k es un número constante verdadero. Esta ecuación lineal es especial en el sentido de que x es igual a k sin importar el valor de y. Quizá se entienda más fácil si se escribe de nuevo la ecuación (2.8) como

$x + 0y = k$

La variable y puede tener cualquier valor en tanto que $x = k$. Esa es la única condición que requiere la ecuación. Como resultado, cualquier ecuación de esta forma se traza como una línea vertical que cruza el eje de las x en $x = k$.

Para ecuaciones de la forma x = k, hay una intercepción de x (k, 0) pero no hay intercepción de y (a menos que k = 0). ¿Qué sucede cuando k = 0?

La ecuación y = k

Una ecuación lineal de forma by = c también es un caso especial de la ecuación (2.1), donde a 0; es decir, no hay término con x. Después de dividir ambos lados entre b, la forma reducida general de este caso es

$$y = k$$

donde k es un número verdadero constante. Esta ecuación indica que y es igual a k para cualquier valor de x. De nuevo, puede verse esto con mayor claridad al volver a escribir la ecuación (2.9) como

$$0x + y = k$$

3.14 Forma de pendiente-intercepción

Según un punto de vista ventajoso y diferente se determinó la forma general de una ecuación lineal con dos variables, como

$$ax + by = c$$

Como se verá, una simple modificación de esta ecuación puede generar información importante sobre la ecuación y su gráfica.

Al despejar y en la ecuación (2.1), se obtiene

$$by = c - ax$$

$$y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}$$

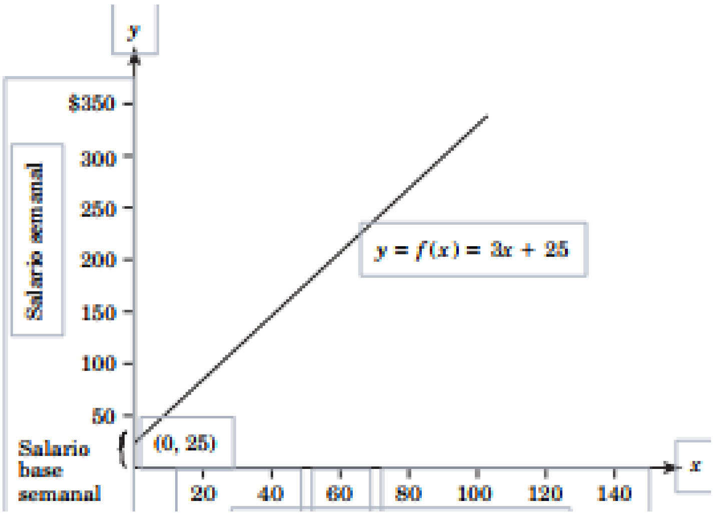
Para cualquier ecuación lineal los términos c/b y- a/b del lado derecho de la ecuación (2.11) tienen especial importancia, dado que b ≠ 0. El término c/b en la ecuación (2.11) es la ordenada de la intercepción de y y- a/b (que puede verse como multiplicador de x) es la pen- diente de la ecuación.

Esta información se obtiene a partir de cualquier ecuación lineal de la forma de la ecuación (2.1) si en ésta se puede despejar y. La ecuación (2.11) se conoce como la forma de pendiente-intercepción de una ecuación lineal. Es posible generalizar la ecuación (2.11) en una forma más simple:

$y = mx + k$

donde m representa la pendiente de la línea y k es la coordenada de la intercepción de y. Para ilustrar, la ecuación

$5x + y = 10$



donde C =costo total, en dólares

y x = número de millas conducidas

Esta ecuación está en la forma de pendiente-intercepción con una pendiente de 0.40 e intercepción de C (que es el equivalente a la intercepción de y) de (0, 18 000). La pendiente sugiere que el costo total se incrementa a una relación de $0.40 por cada milla conducida adicional. La intercepción de C indica un costo de $18 000 si el auto se conduce cero millas.

3.15 Determinación de la ecuación de una línea recta

En esta sección se muestra cómo determinar la ecuación de una relación lineal. La manera en que se determina esta ecuación depende de la información disponible. En las secciones siguientes se analizan las diferentes posibilidades. En cada caso se busca la forma de pendiente-intercepción. Por consiguiente, se requiere identificar los parámetros de pendiente e intercepción m y k.

Pendiente e intercepción

La situación más sencilla es aquella en la cual se conoce la pendiente m y la intercepción de y (0, k). Para determinar la ecuación lineal en este caso casi trivial, simplemente se sustituyen m y k en la forma de pendiente-intercepción de la ecuación (2.12).

Determine la ecuación de la línea recta que tiene una pendiente de 5 y una intercepción de y de (0, 15).

SOLUCIÓN

Al sustituir los valores de m= 5 y k = 15 en la ecuación (2.12) resulta

$y = 5x + 15$

Definida de nuevo como la ecuación (2.1), una forma equivalente de esta ecuación es

Pendiente y un punto

Dada la pendiente y un punto que cae sobre una línea recta, se pueden sustituir la pendiente-te m y las coordenadas del punto dado en la ecuación (2.12) para despejar k.

Ya que la pendiente de una línea recta es 2 y un punto en la línea recta es (2, 8), es posible sustituir estos valores en la ecuación (2.12), lo que produce

$8 = (-2)(2) + k$

$12 = k$

pendiente de 3 e intercepción de y en (0, 25). Obsérvese que se dibujó esta ecuación sólo para valores no negativos de x y y. ¿Puede decir por qué sería esto apropiado?

Ya que la pendiente representa el cambio en y asociado a un incremento de una unidad en x, la pendiente de 3 significa que el salario semanal y aumenta $3 por cada unidad adicional vendida. La coordenada y de la intercepción de y representa el valor de y cuando $x = 0$.

Por lo tanto, 2.5 representa el salario que se ganaría si no se vendiera ninguna unidad. Se puede considerar esta cantidad como el salario base para este vendedor.

Un departamento de policía estima que el costo total C de posesión y operación de una patrulla se puede describir con la ecuación lineal

$C = 0.40x + 18\ 000$

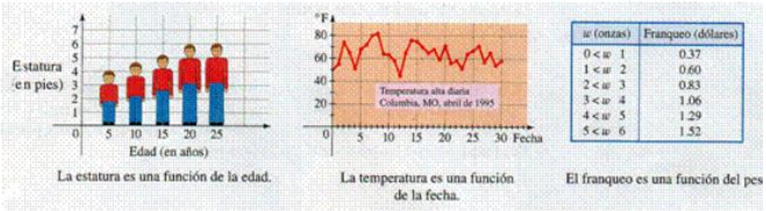
UNIDAD 4

4.1 Funciones Radical y Trascendente

Funciones en nuestro entorno En casi todo fenómeno físico se observa que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura depende de la edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso (véase figura 1). Se usa el término función para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra. Es decir, se expresa lo siguiente.

- La altura es una función de la edad
- La temperatura es una función de la fecha
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso

La Oficina Postal de Estados Unidos emplea una regla simple para determinar el costo de enviar un paquete con base en su peso. Pero es fácil describir la regla que relaciona el peso con la edad o la temperatura con la fecha



La estatura es una función de la edad. La temperatura es una función de la fecha. El franqueo es una función del pes

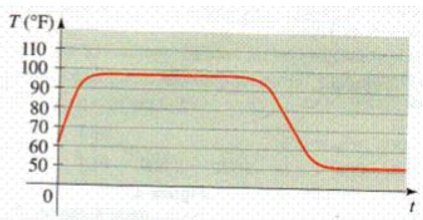
¿Puede pensar en otras funciones? Aquí hay algunos ejemplos

- El área de un circulo es una función de su radio
- El número de bacterias en un cultivo es una función del tiempo.
- El peso de un astronauta es una función de su elevación.
- El precio de un artículo es una función de la demanda de ese artículo

La regla que describe cómo el área A de un circulo depende de su radio r está dada por la formula 2 A=π.r . Incluso cuando no está disponible una regla o formula precisa que describe una función, se puede todavía describir la función mediante una gráfica. Por ejemplo, cuando se abre la llave del agua caliente, la temperatura del agua depende del tiempo que el agua haya estado corriendo. Así, se puede decir

• La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo En la figura 2 se muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que se abrió la llave. En la gráfica se muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del depósito de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua se incrementa con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua en el depósito. Cuando se vacía el depósito, t disminuye a la temperatura del suministro de agua fría.

Figura 2
Gráfica de la temperatura *T* del agua como una función del tiempo *t*



Definición de función Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letra como f, g, h…. para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra “f” para representar una regla como sigue: “f” es la regla “cuadrado del Número”

Cuando se escribe f (2), se entiende "aplicar la regla f al número 2". Al aplicar la regla Se obtiene f (2) = 2 2 = 4. De manera similar, f (3) = 3 2 = 9, f (4) = 4 2 = 16, Y en general f (x) = x 2 . “Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A Exactamente un elemento, llamado f(x), en un conjunto B.” Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo f(x) se lee “f de x” o “f en x” y se llama el valor de f en x, o la imagen de x bajo f. El conjunto de A se llama dominio de la función. El rango de f es el conjunto de los valores posibles de f(x) cuando x varía a través del dominio, es decir

Rango de f = $\{f(x)\ x \in A\}$

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. Así, si se escribe y= f(x), entonces (x) es la variable independiente y (y) es la variable dependiente. Es útil considerar una función como una máquina. Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando se introduce x en la máquina, es aceptada como una entrada y la máquina produce una salida f(x) de acuerdo con la regla de la función. Así, se puede considerar al dominio como el conjunto de las entradas posibles y al rango como el conjunto de las salidas posibles. Función racional (asíntotas verticales y horizontales) Una función racional tiene la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son polinomios. Se supone que P(x) y Q(x) no tienen factor en común. Aunque las funciones racionales se construyen de polinomios, sus gráficas se ven bastante diferentes de las gráficas de funciones poligonales. Funciones racionales asíntotas El “dominio” de una función racional consiste en los números reales x excepto aquellos para los que el denominador es cero. Al graficar una función racional, se debe poner atención especial al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores. Se comienza por graficar una función racional muy simple Ejemplo. Una función racional simple. Bosqueje una gráfica de la función racional

Bosqueje una gráfica de la función racional $f(x)=\frac{1}{x}$.

Solución: La función f no está definida para x=0. En las tablas siguientes se muestra que cuando x es cercana a cero, el valor de f (x) es grande, y mientras x se aproxime más a cero f (x) se vuelve más grande

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100\,000$
Tiende a 0^-	Tiende a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	$100\,000$
Tiende a 0^+	Tiende a ∞

Este comportamiento se describe en palabras y símbolos como sigue. En la primera tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la izquierda, los valores de y = f(x) disminuyen sin límite. En símbolos

f x →−∞..cuando.....x 0 “

Y atiende a menos infinito cuando x tiende a 0 por la izquierda” En la segunda tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la derecha, los valores de f(x) se incrementan sin límite.

En símbolos, ( ) → + f x →∞...cuando....x 0 “

Y atiende a infinito cuando x tiende a 0 por la derecha” En las dos tablas siguientes se muestra cómo cambia f(x) cuando x se vuelve grande

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100\,000$	-0.00001
Tiende a $-\infty$	Tiende a 0

x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
$100\,000$	0.00001
Tiende a ∞	Tiende a 0

En estas dos tablas de muestra que cuando x se vuelve grande, el valor f(x) se aproxima cada vez más a cero. Se describe esta situación en símbolos escribiendo: f (x) → 0...cuando....x → −∞ Y f (x) → 0....cuando......x → ∞ Usando la información de estas tablas y graficando algunos puntos más, se obtiene la gráfica mostrada en la siguiente figura

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

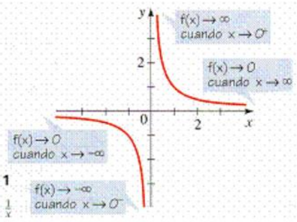
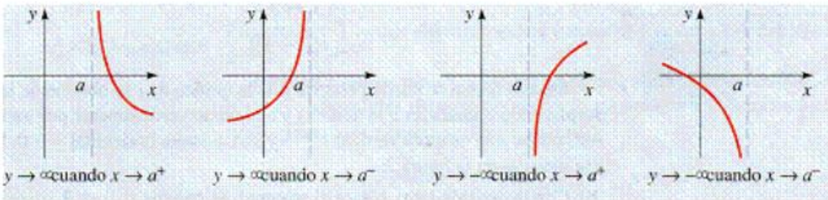


Figura 1
$f(x) = \frac{1}{x}$

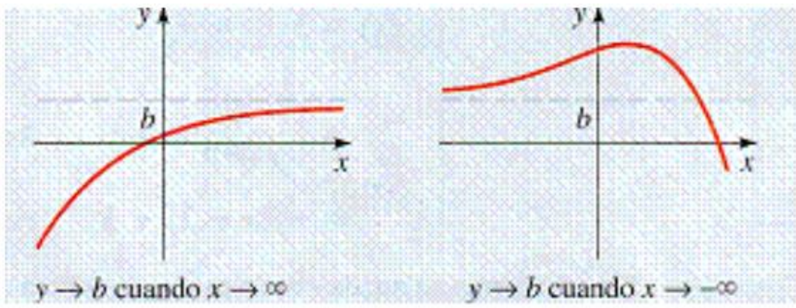
En el ejemplo se usó la siguiente notación de fechas

Símbolo	Significa
$x \to a^-$	x tiende a a por la izquierda
$x \to a^+$	x tiende a a por la derecha
$x \to -\infty$	x tiende a menos infinito; es decir, x disminuye sin cota
$x \to \infty$	x tiende a infinito; es decir, x se incrementa sin cota

La recta x=0 se llama “asíntota vertical” de la gráfica de la figura anterior, y la recta y=0 es una “asíntota horizontal”. En términos informales, una asíntota de una función es una línea a la que la gráfica de la función se aproxima cada vez más cuando se va a lo largo de esta línea. Definición de asíntotas verticales y horizontales 1. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ se y tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende a a por la derecha o la izquierda



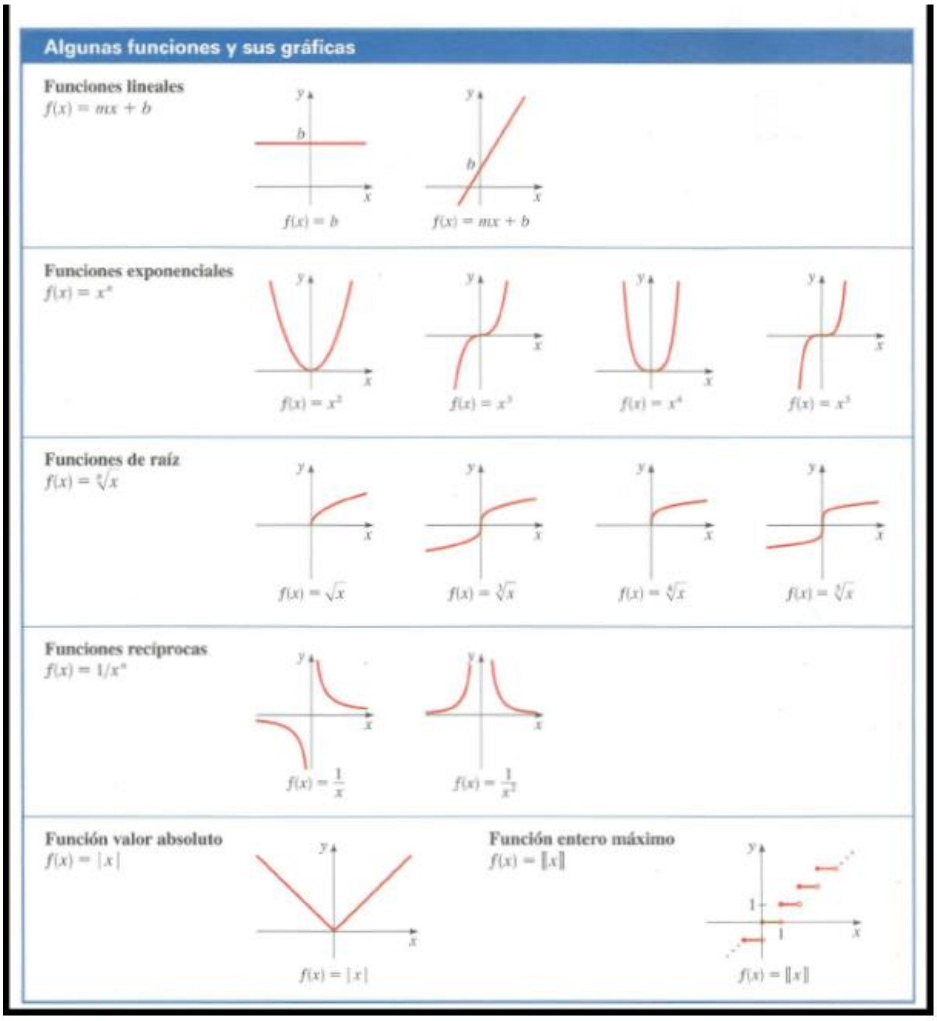
2. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$



Funciones irracional Las funciones irracionales son aquellas cuya expresión matemática f(x) presenta un radical:

$$\sqrt[n]{g(x)}$$

Donde g(x) es una función polinómica o una función racional. Ejemplos de esta se muestra en la tabla siguiente



4.2 Derivación

Introducción En este capítulo vamos a investigar cómo varia el valor de una función al variar la variable independiente. El problema fundamental del Cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una amanera continua, llevó Newton al descubrimiento de los principios fundamentales del Cálculo infinitesimal, el instrumento científico más poderoso del matemático moderno Incrementos El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final. Un incremento de x se representa por el símbolo Δx , que se lee "delta x". El estudiante no debe leer este símbolo "delta veces x" Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo según que la variable aumente o disminuya al cambiar de valor. Asimismo Δy Significa incremento de y $\Delta\phi$ Significa incremento de ϕ $\Delta f(x)$ Significa incremento de f (x) Si en y = f (x) la variable independiente x toma un incremento Δx , entonces Δy indicará el incremento correspondiente de la función f (x) (O sea, de la variable dependiente y). El incremento Δy siempre ha de contarse desde el valor inicial definido de y que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado de x desde el cual se cuenta el incremento Δx . Por ejemplo, consideremos la función 2 y = x Si tomamos x =10 como valor inicial de x , esto fija y =100 como valor inicial de y Supongamos que x aumenta hasta x =12 , es decir, $\Delta x = 2$ Entonces y aumenta hasta y =144 , y $\Delta y = 44$

Si se supone que x decrece hasta x = 9 , es decir $\Delta x = -1$ Entonces y decrece hasta y = 81 , y $\Delta y = -19$ En este ejemplo, y aumenta cuando x aumenta, y y decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes de Δx y Δy tienen un mismo signo. Puede acontecer que y decrezca cuando x aumenta, o viceversa; Δx y Δy tendrán entonces signos contarios Comparación de incrementos Consideremos la función (1) 2 y = x Supongamos que x tiene un valor inicial fijo y le damos después un incremento Δx . Entonces y tomará un incremento correspondiente Δy , y tendremos ( ) 2 y + Δy = x + Δx O sea ( ) 2 2 y + Δy = x + 2x ·Δx + Δx Restando (1) .... 2 y = x (2) ( ) 2 Δy = ...2x ·Δx + Δx Obtenemos el incremento Δy en función de x y Δx . Para hallar la razón de los instrumentos, basta dividir los dos miembros de (2) por Δx , y resulta x x x y = + Δ Δ Δ 2 Si el valor de x es 4, es claro que lim 8 0 = Δ Δ Δ → x y x Observemos ahora con cuidada, mediante una tabla, cómo se comporta la razón de los incrementos de x y y cuando el incremento de x decrece

Esta tabla pone de manifiesto que al decrecer Δx también disminuye Δy , mientras que la razón de los dos incrementos toma los valores sucesivos 9, 8,8, 8,6 8,4 8,2 8,1 8,01. Esta sucesión de valores nos dice que podemos hacer que el valor de la razón x y Δ Δ sea tan próximo a 8 como deseemos con sólo tomar a Δx suficientemente pequeño. Definición de derivada. Derivada de una función de una variable La definición fundamental del Cálculo diferencial es la siguiente: La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero. Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada. La definición puede darse mediante símbolos, en la forma siguiente: Dada la función (1) y = f (x) Consideremos un valor inicial fijo de x Demos a x un incremento Δx , siendo el valor final de la función (2) y + Δy = f (x + Δx) Para hallar el incremento de la función, restamos (1) de (2); se obtiene (3) Δy = f(x + Δx)– f(x) Dividiendo los dos miembros por Δx , incremento de la variable independiente, resulta: (4) ( ) ( ) x f x x f x x y $\Delta + \Delta - = \Delta \Delta$ El límite del segundo miembro cuando $\Delta x \to 0$ es, por definición, la derivada de f (x) , o sea, según (1), de y , y se presenta por el símbolo dx dy . Luego, la igualdad (A) ( ) ( ) x f x x f x lím dx dy x $\Delta + \Delta - = \Delta \to 0$

Define la derivada de y [o de f (x)] con respecto a x De (4) obtenemos también x y lím dx dy x $\Delta \Delta = \Delta \to 0$ Asimismo, si u es función de t , entonces, t u lím dt dy t $\Delta \Delta = \Delta \to 0$ = derivada de u con respecto a t La operación de hallar la derivada de una función se llama derivación

Símbolos para representar las derivadas Puesto que Δy y Δx son siempre cantidades finitas y tienen valores definidos, la expresión x y $\Delta \Delta$ Es una verdadera fracción. Pero el símbolo dx dy Ha de mirarse no como una fracción, sino como el valor límite de una fracción. En muchos casos veremos que este símbolo sí tiene propiedades de fracción, y más adelante demostraremos el significado que puede atribuirse a dy y dx , pero, por ahora, el símbolo dx dy ha de considerarse como conjunto. Puesto que, en general, la derivada de una función de x es también función de x , se emplea también el símbolo f´(x) para representar la derivada de f (x) . Luego, si y = f (x) Podemos escribir la igualdad f (x) dx dy = ´ , Que se lee "la derivada de y con respecto a x es igual a f prima de x ". El símbolo

d , Considerado por sí mismo, se llama operador diferencial; indica que toda función que se escriba de él ha de derivarse con respecto a x . Así, dx dy O y dx d indica la derivada de y con respecto a x f (x) dx dy Indica la derivada de f (x) con respecto a x (2 5) 2 x + dx dy Indica la derivada de 2 5 2 x + con respecto a x El símbolo y ´ es una forma abreviada de dx dy . Luego, si y = f (x), Podemos escribir las identidades f (x) D f (x) f (x) dx d y dx d dx dy y x ´ = = = = = ´ Debe hacerse hincapié en esto: en el paso esencial de hacer que Δx →0 , la variable es Δx y no x . El valor de x se supone fijo desde el principio. Para hacer resaltar que 0 x = x desde el principio hasta el fin, podemos escribir: ( ) ( ) ( ) x f x x f x f x lím x Δ + Δ − = Δ → 0 0 0 0 ´ Función derivable De la teoría de los límites se deduce que si existe la derivada de una función para cierto valor de la variable independiente, la función misma debe ser continua para aquel valor de la variable. Sin embargo, la recíproca no es siempre cierta: se han descubierto funciones que son continuas y, a pesar de eso, no tienen derivada. Pero tales funciones no son frecuentes en las Matemáticas aplicadas, y en este libro se consideran solamente las funciones derivables, es decir, las funciones que tienen derivada

para todos los valores de la variable independiente, con excepción, a lo más, de valores aislados. Regla de los cuatro pasos Regla general para la derivación Según la definición de derivada se puede ver que el procedimiento para derivar una función y = f (x) comprende los siguientes pasos: Regla general para la derivación PRIMER PASO. Se sustituye en la función x por x + Δx , y se calcula el nuevo valor de la función x + Δy SEGUNDO PASO. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función) TERCER PASO. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente) CUARTO PASO. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada El estudiante debe familiarizarse con esta regla, aplicando el procedimiento a muchos ejemplos. La resolución detallada de tres de estos ejemplos se da a continuación. Ejemplo I Hallar la derivada de la función 3x2+5 + Resolución. Aplicando los pasos sucesivos de la regla general, obtenemos, después de hacer 3x2+ 5

4.3 Problemas de Matemática Financiera

Vamos a plantear y a resolver problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto y se utilizan tasas, margen de beneficio, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.

Pondremos un ejemplo de cada uno y lo resolveremos exponiendo las fórmulas y conceptos que hacen falta para ello.

Empezaremos por las tasas y los números índice entre los que destacaremos la tasa de natalidad y mortalidad y los índices de las bolsas y el de precios al consumo (I.P.C.)

respectivamente, para después continuar con intereses y préstamos bancarios y sus amort izaciones.

Tasas

La tasa de natalidad es un indicador social. En toda tasa se da la cantidad que interesa en r elación a una cantidad de referencia.

Ejemplos:

Tasa de natalidad: 21.64 0/00 ⇒ Nacen 21.64 bebés por cada 1 000 habitantes.

Tasa de paro: 12 % ⇒ 12 parados por cada 100 personas en edad laboral.

Tasa de alcoholemia: 0.15 ⇒ 0.15 cm3 de alcohol por litro de sangre.

4.4. Números índice

Un número índice NI, es una herramienta o parámetro creada para estudiar la variación en el tiempo de una determinada magnitud económica.

$$NI = \frac{Medida\ \ actual\ \ de\ la\ \ magnitud}{Medida\ \ antigua\ \ de\ la\ \ magnitud}$$

Destacamos:

El índice de las bolsas refleja el valor global de las empresas que se cotizan en ellas. El valo r del Índice en cada momento se obtiene mediante cálculos muy complejos en los que se valoran las cotizaciones de las acciones y la cantidad que se comercializa de cada una. Más que su valor concreto, se puede prestar atención a su variación porcentual respecto a una fecha anterior:

El IBEX 35 ha subido un 0.80 % durante esta semana.

Especialmente importante es el índice de precios al consumo (IPC): No tiene, en cada momento, un valor determinado, sino que se evalúa en referencia al año (o al mes) anterior:

El IPC ha subido en mayo un 0.28 %, con lo que acumula un crecimiento anual del 3.56 %.

Para calcular la variación mensual del IPC, se tiene en cuenta la variación del precio de cad a uno de los bienes de consumo y la cantidad invertida en el mismo durante ese me s. El índice de precios al consumo es un número índice que se utiliza para medir la variació n de la inflación. Se calcula tomandel precio de una serie de artículos representativos de c onsumo habitual (cesta de la compra), p1, p2, p3, Multiplicando Dichos precios por su correspondiente peso o ponderación, q1, q2, q3, … según la importancia asignada en el momento

$$IPC = \frac{Medida\ actual\ de\ la\ magnitud}{Medida\ antigua\ de\ la\ magnitud} = \frac{p_{11}q_{11} + p_{21}q_{21} + p_{31}q_{31} + \dots}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20} + p_{30}q_{30} + \dots}$$

4.5. Interés simple

Cuando depositamos una determinada cantidad de dinero capital en un banco lo q ue hacemos es prestar este capital a la entidad bancaria y ésta, a cambio, nos da un tan to por ciento del dinero que depositamos.

Por ejemplo,

Si depositamos 50 000 € en una libreta de ahorro al 1.5% cada año recibimos:

$$\frac{50\,000 \cdot 1.5}{100} = 50\,000 \cdot 0.015 = 750$$

La cantidad que hemos depositado, 50 000 € es el capital: El beneficio obtenido, 750 €, se llama interés. La cantidad que producen 100 € cada año, 1.5 €, se llama rédito o tanto por ciento. Y la cantidad que produce 1 € anualmente, 0.015 €, se llama tanto por uno.

Un capital colocado al R % en un año produce C.R /100 , De Interés Luego en t Años producirá un interés de:_

$$I = \frac{C \cdot R \cdot t}{100} = Crt$$

- capital, C, es la cantidad de dinero que depositamos en una entidad financiera.
- Interés, I, es la cantidad de dinero producida por un capital de un interés determina do.
- Rédito o tanto por ciento, R, es la ganancia que producen 100 € en un año.
- Tanto por uno, r, es la ganancia que produce 1 € en un año

INTERES SIMPLE			
[illegible]		$I = C.i.t$	
[illegible]	$I = C.\frac{i}{100}.t$	[illegible]	$I = C.\frac{i}{200}.t$
[illegible]	$I = C.\frac{i}{1200}.t$	[illegible]	$I = C.\frac{i}{400}.t$
[illegible]	$I = C.\frac{i}{36000}.t$	[illegible]	$I = C.\frac{i}{600}.t$
[illegible]	$M = C + I$	[illegible]	$M = C(1 + i.t)$

Colocamos en un banco 10,000 € al 2 %, percibiendo Los intereses semestralmente. Si hemos cobrado 600 € en concepto de intereses. ¿Cuánto tiempo hemos tenido el dine ro en el banco?

Al ser el cobro de intereses semestral, la fórmula que aplicamos es:

$$I = \frac{CrT}{2} \Rightarrow T = \frac{2I}{Cr} = \frac{2 \cdot 600}{10\,000 \cdot 0.02} = 6 \text{ semestres.}$$

Esto significa que el dinero ha estado depositado en el banco 6 semestres, o lo que es lo mismo, 36 meses.

4.6 Interés compuesto

Cuando no cobramos los intereses en los distintos periodos de tiempo, sino que éstos se van sumando al capital, éste se va incrementando. A este proceso le llamamos capitalizaci ón y afirmamos que hemos colocado el capital a interés compuesto.

Colocar un capital a interés compuesto significa que el capital se va incrementando con lo s intereses producidos en cada periodo de tiempo.

Al capital existente en cada momento, le llamamos montante.

Cuando colocamos un capital, C, al tanto por uno, r, al final del primer año tenemos un montante de:

$$M_1 = C + Cr = C(1 + r)^1.$$

Al final del segundo año, tendremos:

$$M_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2.$$

Al final del tercer año, tendremos:

$$M_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3.$$

Razonando y siguiendo la misma pauta, llegamos a obtener que el montante, al cabo de t a ños, es:

$$M = C(1 + r)^t$$

De forma análoga, obtenemos el montante cuando capitalizamos n veces al año o en n periodos cada año:

$$M = C\left(1+\frac{r}{n}\right)^{t}$$

4.7. Anualidades de capitalización

En muchas situaciones se plantea el problema de conseguir u obtener un capital al cabo de un número determinado t de años. Para ello, hacemos unos pagos o aportaciones, Siempr e iguales al principio de cada uno de los años.

Estos pagos o aportaciones se llaman anualidades de capitalización.

Las anualidades de capitalización son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para Formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de t años, Supongamos que la anualidad de capitalización es a, que el tanto por uno anual es r y el Tiempo de capitalización es de t años.

Utilizando la expresión de interés compuesto, obtenemos que la anualidad que entregamo s al inicio del primer año se convierte o capitaliza en el siguiente montante:

Supongamos que la anualidad de capitalización es a, que el tanto por uno anual es r y el tiempo de capitalización es de t años.

Utilizando la expresión de interés compuesto, obtenemos que la anualidad que entregamo s al inicio del primer año se convierte o capitaliza en el siguiente montante:

a (1 + r)t

La segunda anualidad, entregada al principio del segundo año, capitaliza al cabo de t - 1 años el montante:

a (1 + r)t-1

La tercera anualidad capitaliza en t - 2 años el montante:

a (1 + r)t-2

y así sucesivamente, la anualidad t-ésima, que entregamos al comienzo del t-ésimo año o último, capitaliza en 1 año el siguiente montante:

a (1 + r)1

La suma de todos estos montantes da lugar a la capitalización del capital C:

$$C = a\,(1 + r)^1 + a\,(1 + r)^2 + \ldots + a\,(1 + r)^{t-1} + a\,(1 + r)^t$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresi ón geométrica a la progresión anterior de razón (1 + r) y números de términos t, obtene mos:

$$C = \frac{a(1+r)^t(1+r) - a(1+r)}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\cdot[(1+r)^t - 1]}{r}$$

Una sucesión: a1, a2, an Se llama sucesión o progresión geométrica si cada término excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constanter llamada razón de la progresión: a2 = a1 . r ; a3 = a2, r; an = an-1 r.

Por tanto, la suma de los n primeros términos a1 + a2 + …. + an vale:

4.8. Tasa anual equivalente (T.A.E.)

En cuentas de ahorro, llamamos TAE al tanto por ciento de crecimiento total del capital d urante un año cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año. En préstamos bancarios, la TAE, también es superior al rédito declarado. Al calcularla se incluyen los pa gos fijos (comisiones, gastos) que cobra el banco para conceder el préstamo.

Pago mensual de intereses:

$$1 + \frac{C}{100} = \left(1 + \frac{r}{1\,200}\right)^n$$

siendo C el capital y n el número de meses

Si colocamos 600 € al 2 % anual con capitalización trimestral, en un año genera un montan te de:

M = 600 (1 + 0.02/4)4= 612.090

Si ahora nos preguntamos, ¿a qué tanto por ciento anual hemos de colocar el mismo capit al para generar el mismo montante con capitalización anual?

$$612.090 = 600\left(1 + \frac{T.A.E.}{100}\right)^1$$

Operando, obtenemos el T.A.E. = 2.015

Esto indica que el T.A.E. es el tanto por ciento anual, que genera el mis mo montante que una capitalización en n periodos de tiempo al año al r % anua

4.9. Anualidades de amortización

En la vida real es muy frecuente pedir prestado a un banco o una entidad financiera una cantidad de dinero que llamamos deuda.

Esta deuda la devolvemos o la amortizamos mediante pagos siempre iguales, durante un número t de años consecutivos, haciendo cada pago o aportación al fin al de cada año. Estos pagos o aportaciones iguales se llaman anualidades de amortización.

Las anualidades de amortización son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de Cada año, para amortizar o cancelar una deuda junto con sus Intereses compuestos, durante un número determinado, t de años.

La deuda D, al cabo de t años, al tanto por uno anual, r, capitaliza el siguiente montante:

M=D(1+r) t

Las anualidades, a, que aportamos al final de cada año, capitalizan los siguientes montantes

- La primera anualidad en t - 1 años se convierte en: a (1 + r)t-1
- La segunda anualidad en t - 2 años se convierte en: a (1 + r)t-2

- La tercera anualidad en t - 3 años se convierte en: a (1 + r)t-3

Yasí sucesivamente, la anualidad tésima, que aportamos al final del último año, es: a La sum a de los anteriores montantes ha de coincidir con M

$$M = D(1+r)^t = a + a(1+r) + ... + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1}$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresi ón geométrica a la sucesión anterior de razón 1 + r y de t términos, obtenemos:

$$D \cdot (1+r)^t = \frac{a(1+r)^{t-1} \cdot (1+r) - a}{(1+r) - 1}$$

Y de aquí obtenemos la expresión que nos da la anualidad de la amortización:

$$a = \frac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al final de cada mes, la amortización mensu al viene dada por:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1+\frac{r}{12}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^T - 1}$$

donde D es la deuda y T es el tiempo de amortización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, la cuota de amortización es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^T - 1}$$

La empresa Frío Industrial ha adquirido una máquina por la que se compromete a pagar 12 000 € en el momento de la adquisición y 5 000 € al final de cada año, durante 10 años. Si se aplica un 2 % de interés anual, ¿cuál es el valor de la máquina?

La deuda, D, que la empresa amortiza en 10 anualidades es:

$$D = \frac{a \cdot ((1+r)^t - 1)}{r(1+r)^t} = \frac{5\,000 \cdot ((1+0.02)^{10} - 1)}{0.02(1+0.02)^{10}} = 44\,914.47$$

Luego el valor de la máquina es: 44 914.47 + 12 000 = 56 914.47.

4.10. Funciones en forma de tabla, gráfica o expresión algebraica

Ya sabes que una función puede venir dada principalmente de tres formas:

Funciones en forma de tabla ,Si recogemos los datos de un experimento obtenemos una tabla de valores, como, por ejemplo:

Ejemplo:

Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:

Espacio (m)	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.43
Tiempo (s)	0	0.2	1.13	3.14	4.9	7.06	9.16	10.00

Cuando la función viene dada por una tabla de valores únicamente conocemos algunos va ores de x con sus correspondientes valores de y Si deseamos estimar el valor de y para algún x que no figure en la tabla debemos recurrir a interpolaciones y extr apolaciones,

Funciones en forma de expresión algebraica

Conoces muchas fórmulas que pueden dar origen a funciones.

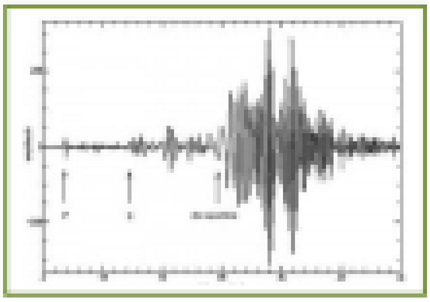
Ejemplo:

El volumen de líquido contenido en un cilindro de 3 cm de radio al variar la altura x del líq uido.

y = 9πx

Funciones en forma de gráfica

A veces la gráfica de una función puede obtenerse directamente del fenóme no estudiado mediante un aparato.



Ejemplo:

Un electrocardiograma es una función que indica la variación del potencial eléctrico del corazón al transcurrir el tiempo.

Un sismograma indica la variación de la velocidad y aceleración de las ondas producidas por un terremoto.

Otras veces la obtendremos de su expresión analítica o de la función dada como tabla.

Pero hay que advertir que, como en los ejemplos anteriores de electrocardiograma o sismograma, en ocasiones no es posible conocer la expresión analítica

Una función es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de u na (variable independiente) le hacemos corresponder como mucho, un único valor de la otra (variable dependiente).

Para indicar que la variable (y) depende o es función de otra, (x), se usa la notación y = f(x), que se lee "y es la imagen de x mediante la función f".

Una función real de variable real es aquella en la que tanto el dominio como la imag en son subconjuntos de π. Si A y B son subconjuntos de π la función se indica:

f: A_B x _ f (x)

Y también y = f(x), Domf = A.

Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula, lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una tabla donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de gráfica… ¡Y también existen funciones que no se pueden escribir mediante una expresión algebraica!

Por tanto, se puede asemejar con una máquina que coge un número y lo transforma en otro mediante una serie de operaciones que, a veces, podemos describir mediante una fórmula.

Ejemplos:

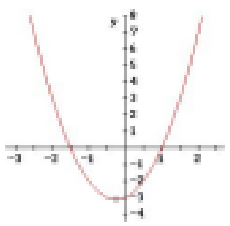
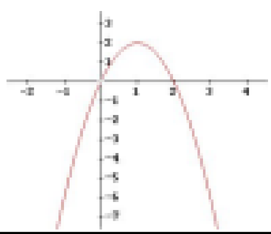
Funciones constantes (los números vistos como funciones):

$f(x) = k$, para todo $x \in \Re$

$f(x) = 2$, para todo $x \in \Re$, así $f(-2) = 2$; $f(0) = 2$; $f(\sqrt[4]{5}) = 2$; …

4.11 Función cuadrática

una función cuadrática es una función polinómica de segundo grado: y =f(x) = ax2 + bx + c. La gráfica de este tipo de funciones se llama parábola.

Si el coeficiente líder o cuadrático es positivo ($a > 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y positivo (convexa).	Si el coeficiente líder o cuadrático es negativo ($a < 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y negativo (cóncava).
$y = 2x^2 + x - 3$ $2 > 0$ 	$y = -2x^2 + 4x$ $-2 < 0$ 

Los otros coeficientes del polinomio afectan a la posición que ocupa la parábola respecto a los ejes.

En una función cuadrática hay una rama que crece y otra que decrece.

El punto donde se produce ese cambio se llama vértice y es el mayor (máximo) o menor (mínimo) valor que toma la función. Es el punto más significativo en una par ábola y, por eso, es importante saber calcularlo. Para ello, le damos y lo sustituimos en la f unción para calcular su imagen

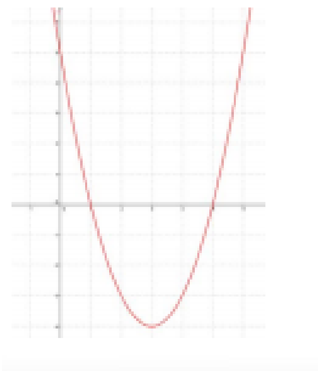
Dicho la variable independiente el valor x=-b/2a

valor es fácil de recordar ya que es lo mismo que aparece en la fórmula de las ecuaciones de 2° grado quitándole la raíz cuadrada.

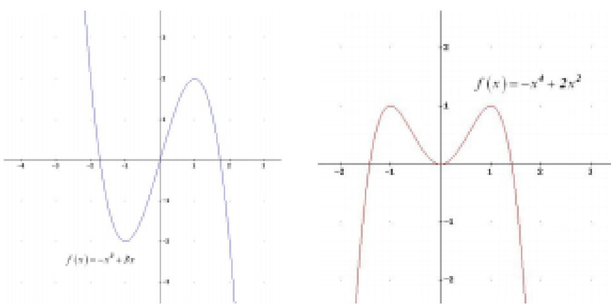
Ejemplo:

x	0	1	3	5	6
$f(x)$	5	0	−4	0	5
	(0, 5)	(1, 0)	(3, −4)	(5, 0)	(6, 5)

GRÁFICA



las funciones polinómicas de grado mayor que dos son más complejas de dibujar, aunque las gráficas también tienen características llamativas:



Primer paso $y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5$

$$=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5$$

Segundo paso
$$\begin{array}{l} y+\Delta y=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5 \\ \underline{y.......=3x^2.........................+5} \end{array}$$

$$.....\Delta y=......6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2$$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\cdot\Delta x$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x\to 0$. Según (A) resulta:

$$\frac{dy}{dx}=6x$$

O bien $y'=\frac{d}{dx}\left(3x^2+5\right)=6x$

Ejemplo 2 Hallar la derivada de x^3-2x+7

Resolución. Hagamos $y=x^3-2x+7$

Primer paso $y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+7$

$$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+7$$

Segundo paso
$$\begin{array}{l} y+\Delta y=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+7 \\ \underline{y........=x^3..-2x....................+7} \end{array}$$

$$\Delta y=......3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.........-2\cdot\Delta x$$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-2$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (A) tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

O bien $$y' = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 2x + 7\right) = 3x^2 - 2$$

Ejemplo 3 Hallar la derivada de la función $\frac{c}{x^2}$

Resolución Hagamos $y = \frac{c}{x^2}$

Primer paso $y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$

Segundo paso $y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$

$$\underline{y\ldots\ldots = \frac{c}{x^2}}$$

$$\Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{-c \cdot \Delta x(2x + \Delta x)}{x^2 (x + \Delta x)^2}$$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \frac{2x + \Delta x}{x^2 (x + \Delta x)^2}$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (A) tendremos

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2x}{x^2 (x)^2} = -\frac{2c}{x^3} \cdot \left[y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2c}{x^3} \right]$$

Bibliografía básica y complementaria:

- Lenguaje Algebraico Ing. Gerardo Sarmiento agosto 2009
- Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales, Frank, S, Budnik. Editorial Mc- Graw-Hill
- Desarrollo del pensamiento matemático Rodrigo Andrés Vásquez
- CAPITULO I SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES
- Algebra Lineal y GeómetraCurso2010/11.Departamentode´Algebra.http://www.departamento.us.es/da
- Pre cálculo Quinta Edición, Matemáticas para el cálculo; James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson; Editorial Thomson