ANTOLOGÍA

MATEMATICAS ADMINISTRATIVAS

Segundo Cuatrimestre

Cuatrimestre: Enero-Abril 2024

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

—Mi Universidad‖

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Objetivo de la materia:

El alumno evaluará los modelos financieros aplicando los principios matemáticos referentes a la variación del dinero en el tiempo, y ver la aplicación de los puntos de equilibrio en los aspectos de la oferta y la demanda.

INDICE

UNIDAD I **Pag:**

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICA ADMINISTRATIVAS Y FUNCIONES MATEMÁTICAS

UNIDAD 2

FUNCIONES LINEALES, APLICACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

UNIDAD III

ÁLGEBRA MATRICIAL Y DETERMINANTES

UNIDAD IV

OPERACIONES DE MATRICES Y APLICACIONES

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICA ADMINISTRATIVAS Y FUNCIONES MATEMÁTICAS

1.1-Conceptos básicos

Las matemáticas, son una herramienta que nos permite verificar mediante modelos gráfico-numéricos los efectos que pueden generar las variaciones de los elementos o factores que intervienen en los fenómenos y sucesos que se presentan a lo largo de nuestra vida. En esta primera unidad, presentamos el concepto de función, así como las diversas formas para su representación.

La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces». (Puig Adam, 1958).

Se analizarán también los tipos de funciones, la traficación y las operaciones que puede haber entre ellas, con el fin de crear bases sólidas que permitan dar solución práctica a los diversos problemas que se presentan en el área económico-administrativa. Todo esto se podrá realizar a través del análisis de situaciones de optimización, costo total, ingreso, oferta y demanda y mediante el uso de los diferentes tipos de funciones y modelos gráficos.

La matematización de la economía se realiza a través del concepto de número real, que nos permite asignar un valor numérico —cuantificar— cualquier magnitud económica. Una realidad económica puede tratarse matemáticamente a partir del momento en que encontramos un medio de describirla mediante magnitudes numéricas cuyo comportamiento y relaciones mutuas podemos estudiar (precios, salarios, réditos, probabilidades, tasas de inflación, de desempleo, beneficios, costes, etc.). Sin embargo, es muy raro que un problema venga determinado por un ´único dato numérico.

Lo usual es que sea necesario trabajar simultáneamente con muchos datos. En este tema veremos los conceptos básicos para trabajar sistemáticamente con “bloques” de números.

Matemáticas es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma «poderoso, conciso y sin ambigüedades» (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese idioma se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo "hablen". En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios).

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo. En el caso del idioma matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de Resolución de Problemas.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

1.2- Relación con otras áreas de estudio básicas

Para comprender cualquier fenómeno se necesita la matemática, ésta forma parte de la construcción de las ciencias, todas ellas creaciones del ser humano; por lo que para poder interpretarlas en toda su dimensión y que muchas puedan existir es necesaria la ciencia lenguaje del universo; pero la relación matemática-ciencias muchas veces está ausente en la enseñanza, sus conocimientos se dan de manera aislada, sin mostrar su cultura y utilidad. Como recurso didáctico se puede utilizar tal reciprocidad de manera amena, en cualquiera de sus formas para enriquecer la enseñanza, la praxis y formación del docente de matemática. Todo esto se puede hacer desde una pedagogía integral que aboga por un proceso educativo vivo y transdisciplinar que muestre el concierto de fantasías que entrelazan todas las ciencias, en mayor o menor intensidad.

Las ciencias son un conjunto de conocimientos adquiridos por la humanidad, una necesidad del ser humano para su progreso y desarrollo, son un acto creativo del individuo. La gran mayoría de estas ciencias están relacionadas con la ciencia lenguaje del universo: la matemática. Ésta les ha aportado criticidad y les ha permitido el desarrollo de grandes teorías y aplicaciones; basta estudiar alguna de ellas en particular para ver su huella plasmada en el fantástico concierto de sus teorías, queda muestra del profundo poder de creación que tiene la figura más compleja del universo: el hombre. Las ciencias tienen varias clasificaciones, en especial Carnap (2006) las divide en formales, naturales y sociales. Las primeras estudian las formas válidas de inferencia; las segundas tienen por objeto el estudio de la naturaleza y las terceras son todas las disciplinas que se ocupan de los aspectos del ser humano. En las primeras se encuentran la lógica y la matemática, que no tienen contenido concreto en oposición con el resto de las ciencias. En las naturales se encuentran la: astronomía, biología, física, geología, química, entre otras. Y en las ciencias sociales están la: filosofía administración, antropología, política, demografía, economía, derecho, historia, psicología, sociología, entre otras.

En matemáticas sucede lo mismo. Si estudiamos derivadas, primero, las haremos sencillas, la de un monomio como x2, luego pasamos a un polinomio y cuando sentimos cierta familiaridad con el proceso, nos lanzamos más lejos.

Un problema puede resultar difícil por su tamaño, por tener demasiados elementos que lo hacen enrevesado y oscuro. Para empezar, debemos resolver un problema semejante lo más sencillo posible. Luego lo complicaremos hasta llegar al propuesto inicialmente.

Procediendo así, obtenemos varios provechos:

a) De orden psicológico. Empezamos animándonos con el probable éxito.

b) De orden racional. En el problema sencillo suelen aparecer, más transparentes principios de solución que estaban confusos y opacos en medio de la complejidad del problema.

c) Manipulación más fácil. La manipulación efectiva en un problema de pocas piezas es más fácil que en uno de muchas.

1.3- Aplicaciones hacia otras Disciplinas de Estudio

La geometría de Euclides, trae consigo en sus investigaciones un estudio sobre la naturaleza del espacio, comenzando allí a emerger la física. Existió la necesidad de la construcción y la medida de terrenos, entre otras aplicaciones. La geometría de Euclides (325 a. C - 265 a.C.) es así de suma importancia y tiene su diversidad de aplicaciones. Aristóteles (384 a. C. - 322 a. C.), también un gran estudioso de la física, afirmaba que los cuerpos más pesados caen más rápido. Desde luego, se encuentran la geometría y la estática; Arquímedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C) escribió una tratado del equilibrio de los planos y de sus centros de gravedad, desarrolló la teoría de la palanca y de los centros de gravedad de varias figuras planas entre ellas la parábola. Mágicas teorías donde no se separan los saberes entre físicos y matemáticos, se insinúa que sería un éxito en cuanto a motivación si se mostraran de esta manera las teorías.

La matemática, la computación, la biología y la medicina

La relación de la matemática y la medicina es importantísima. Un ejemplo lo encontramos en dispositivos para realizar tomografías computarizadas, entre tantos avances. Hay que tener presente que el cuerpo humano es el sistema de procesamiento de información más complejo. Si se juntan todos los procesos humanos de información, los conscientes y los inconscientes involucraríamos el procesamiento de 1024 bits de información diariamente. Esta cantidad astronómica de bits es un millón de veces mayor que el total de conocimiento humano que es de 1018 bits almacenados en todas las bibliotecas del mundo.

La matemática y la música

La música es, con justa razón, la hija privilegiada de la matemática. Se estudiaba, en las enseñanzas clásicas de la época griega dentro del quadrivium, junto con la aritmética, la geometría y la astronomía, estas enseñanzas correspondían a los saberes exactos, de ahí que la música se pueda considerar, aparte de un arte, como una ciencia. No interesa en estos momentos la discusión en cuanto a su naturaleza, o no, de ciencia, esta discusión está fuera de estas reflexiones.

En este escrito se intenta rescatar la relación música-matemática ausente en una docencia de la ciencia formal carente de sentido en la vida de los discentes. Algunos educadores no muestran en clases que el creador de la escala música fue Pitágoras, utilizando un instrumento musical denominado monocordio.

1.4. Funciones matemáticas

Una función es una relación establecida entre dos variables que asocia a cada valor de la primera variable (variable independiente x), un único valor de la segunda variable (variable dependiente y).

Esta relación se representa mediante y = f(x).

Una función real de variable real es una función en la que tanto los valores de la variable

dependiente como los de la variable independiente son números reales. Se suele expresar mediante

( ) : x y f x f→ =R R . A f (x) se la denomina la imagen de x por la función f .

Conceptos básicos

El concepto de función matemática o simplemente función, es sin duda, el más importante y utilizado en Matemáticas y en las demás ramas de la Ciencia. No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa.

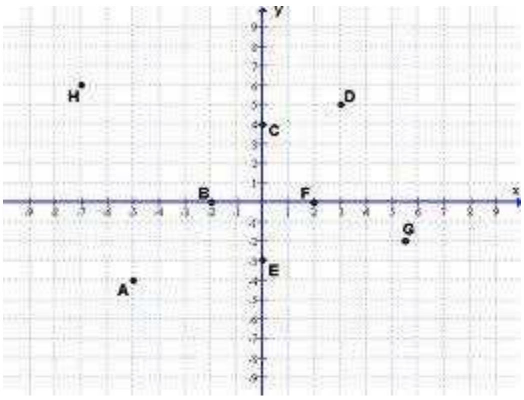
Desde los tiempos de Galileo, que fue uno de los primeros en usarlo (aunque no en la forma que nosotros lo conocemos actualmente), pasando por el gran Newton y Leibniz, que fue el primero que en 1673 usó la palabra "función" para referirse a la relación de dependencia de dos variables o cantidades, Euler, que le dio su formulación moderna y =

f(x), Cauchy, Dirichlet o Gauss, las mejores mentes de la Historia de la Humanidad le dedicaron su atención y sus desvelos.

"Es un conjunto de pares ordenados de números (x,y) en el cual dos pares distintos no tienen el mismo primer número"

Para entender mejor esta definición de función se puede manejar algunos puntos de

un plano cartesiano(figura1).



Por ejemplo para cada punto (x,y), dentro del plano hay un valor para x pero también existe un valor para y, aunque si ustedes analizan para cada valor de x hay un valor diferente de y al menos que sea el mismo punto, es decir si observan los puntos tenemos que:

El estudio de las propiedades de las funciones está presente en todo tipo de fenómenos que acontecen a nuestro alrededor. Así, podemos nombrar fenómenos sociales relacionados con crecimientos demográficos, con aspectos económicos, como la inflación o la evolución de los valores bursátiles, con todo tipo de fenómenos físicos, químicos o naturales, como la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la función de onda de una partícula a escala cuántica, la desintegración de sustancias radiactivas o la reproducción de especies vegetales y animales. Casi todo es susceptible de ser tratado a través del planteamiento y estudio de una o varias funciones que gobiernan los mecanismos internos de los procesos en todas las escalas y niveles. Otra cosa bien distinta y mucho más difícil, es determinar cuáles son las funciones que intervienen en cada proceso en concreto.

Esta, en suma, es la tarea de los científicos: descubrir la dinámica rectora de cada fenómeno y expresarla en términos de una función

A (-5,-4)	B (-2, 0)	C (0, 4)
D (3, 5)	E (0,-3)	F (2, 0)
G (5.5, -2)	H (-7, 6)	

Con esto debemos entender que en las coordenadas del punto A, que si x tiene un valor de -5 el valor para y será de -4, o que del punto H que si x tiene el valor de -7 el valor para y será de 6 y así de manera similar en cualquier punto de un plano cartesiano.

Pero resolvamos algunos ejemplos de la vida cotidiana:

1.- Cierta costurera adquirió un grupo de patrones o moldes para confeccionar ropa. Estos tenían las medidas expresadas en pulgadas y ella estaba acostumbrada a manejarlas en centímetros. Mediante algunos cálculos realizó las conversiones correspondientes y sustituyó los números dados por el valor equivalente para responder a la pregunta anterior, primero debes investigar la equivalencia en centímetros de una pulgada. Luego trata de completar la siguiente tabla:

PULGADAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CENTÍMETROS	2.54	5.0	7.6	10.1	12.7	15.2	17.7	20.3	22.8	25.4	27.9

1.5 Aplicaciones generales

Para comprender cualquier fenómeno se necesita la matemática, ésta forma parte de la construcción de las ciencias, todas ellas creaciones del ser humano; por lo que para poder interpretarlas en toda su dimensión y que muchas puedan existir es necesaria la ciencia lenguaje del universo; pero la relación matemática-ciencias muchas veces está ausente en la enseñanza, sus conocimientos se dan de manera aislada, sin mostrar su cultura y utilidad. Como recurso didáctico se puede utilizar tal reciprocidad de manera amena, en cualquiera de sus formas para enriquecer la enseñanza, la praxis y formación del docente de matemática. Todo esto se puede hacer desde una pedagogía integral que aboga por un proceso educativo vivo y transdisciplinar que muestre el concierto de fantasías que entrelazan todas las ciencias, en mayor o menor intensidad.

Se suele aceptar como un absoluto incuestionable que la matemática juega un papel importante en el desarrollo de las ciencias, en la tecnología y para interpretar la vida cotidiana. Sin embargo, el proceso académico enseñanza - aprendizaje se realiza, en ocasiones, con unos grados de abstracción que alejan la ciencia formal de la realidad de los estudiantes, de sus intereses. Es menester que los profesionales, matemáticos y docentes de la ciencia se formen para recobrarla en las aulas, es así como Uzuriaga, Vivian y Martínez (2006, p.269) afirman que:

La educación matemática debe ser valorada y rescatada por los matemáticos, pues es claro que debe combinar una muy buena solidez y conocimientos matemáticos con las teorías pedagógicas y centrar nuestra atención en desarrollar, o por lo menos usar adecuada y críticamente, metodologías que le permitan a nuestros alumnos un aprendizaje a lo largo de la vida, a aprender a aprender, aprender a emprender, aprender a ser, aprender a conocer, aprender a trabajar en colaboración, a valorar el contexto histórico cultural.

La utilidad y concepción de las teorías matemática, sus saberes se utilizaban en las otras ciencias existentes en cada época, tales como la astronomía y la música, por ejemplo. Los resultados matemáticos obtenidos dan pie y utilidad al estudio en diversos ámbitos. Sin la matemática, el ser humano no hubiera alcanzado los niveles de desarrollo necesario

Desde luego cada ciencia tiene su trascendental importancia en saberes; y bajo el punto de vista de su influencia en el bienestar social, cada una ha dado su aporte valioso; pero si es cierto que el conocimiento es uno de los elementos que ayudan en el destino de las sociedades para que las necesidades fundamentales de la vida sean satisfechas, se admite que la matemática puede con toda justicia demandar uno de los lugares más privilegiados en el sistémico concierto de las fantasías de la inteligencia, integrada a todos los saberes de las ciencias.

Lo anterior, lleva a mirar los puntos de vista de la ciencia matemática, desde el comienzo de la historia, a fin de que sean apreciados los aportes de la ciencia lógica. Han existido diversas maneras de concebirla; en la antigüedad en los filósofos presocráticos ya existía inquietud por encontrar la naturaleza de las cosas más allá de sus apariencias múltiples. Pitágoras (582 a. C. - 507 a. C) y sus seguidores denominados los pitagóricos afirmaban que a toda materia se le asociaba un número.

Estos estudiosos le dieron suma importancia a las proporciones y se consideran los precursores de la matemática. En su época entonces no se enseñaban las ciencias de manera separadas (ni separadas de la filosofía) y el fin último de la educación era la formación integral del individuo; ideales plasmados en la Paideia griega.

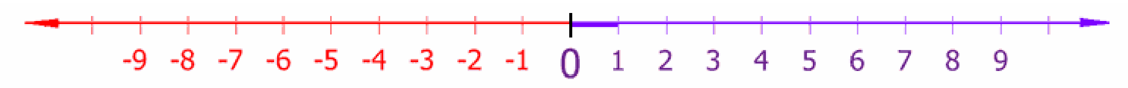
Más adelante, al surgir el positivismo con Comte (1798-1857), después de la revolución industrial, se execra en las aulas a la matemática de las ciencias y la filosofía. Se rechazan conocimientos provenientes de la psicología, sociología, considerándolas a todas estas fuera de los cánones de la ciencia; como se puede notar se reduce el estudio a meros asuntos probables y la educación entra en decadencia, porque es esta convergen aspectos claramente humanos fuera de las pruebas científicas.

De esta manera se impone el espíritu positivista como único conocimiento válido, reduciendo y supeditando la cultura a la ciencia, execrando la filosofía, abandonando el sentido común crítico, exigiendo inclusive el percibir la realidad sólo desde un punto de vista. Predomina, en consecuencia, una visión empirista, aproblemática, ahistórica, acumulativa y lineal; desprovista antes los ojos del mundo de subjetividad y dinamismo.

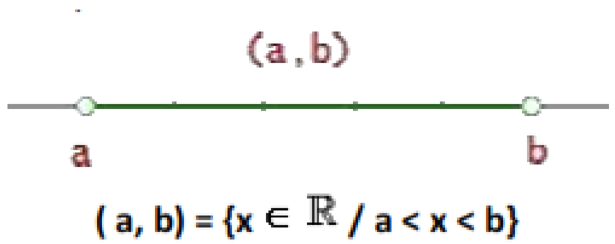
1.6 Dominio y rango restringidos

Recta Numérica:

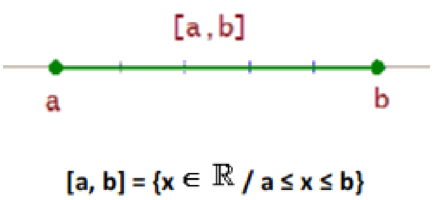
Es la representación gráfica del conjunto de los números reales



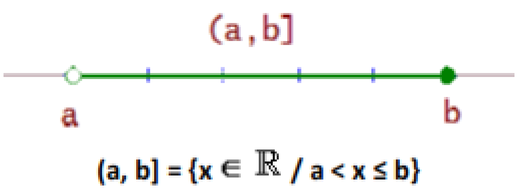
Intervalo Abierto (a, b); es el conjunto de todos los números reales mayores que a menores que b, sin incluir a y b



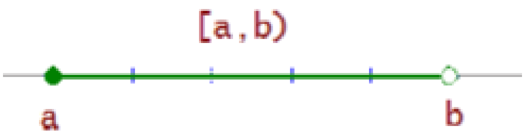
Intervalo cerrado:, [a, b], es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.



Intervalo semi abierto por la izquierda (a, b], es el conjunto de todos los números n reales mayores que a y menores o iguales que b.



Intervalo semiabierto por la derecha [a, b), es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b.



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x < b\}$$

1.7 Funciones multivariadas básicas

En muchas funciones matemáticas, el valor de una variable dependiente depende de más de una variable independiente. Se da el nombre de funciones multivariadas a las que contienen más de una variable independiente.

Una clase de funciones multivariadas es la de las funciones bivariadas. Ésta tiene dos variables independientes. La notación z = f(x,y)

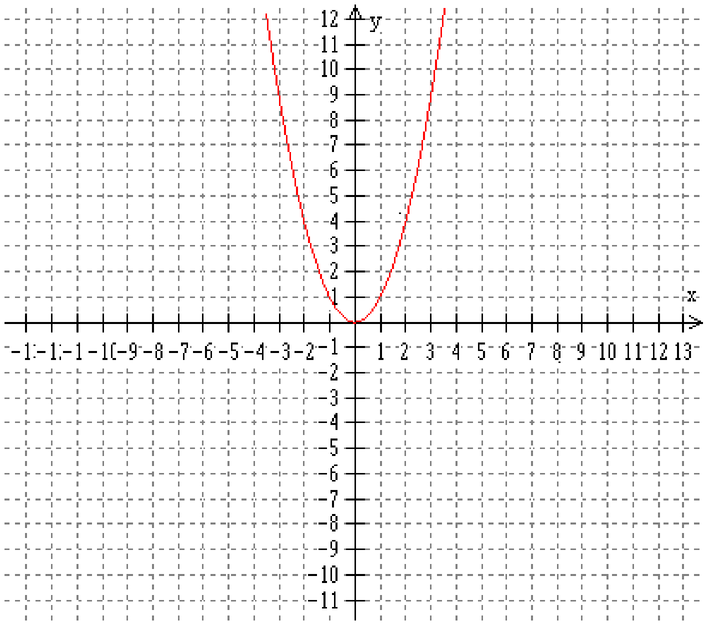
Indica que la variable dependiente z depende de los valores de las dos variables independientes x y y . He aquí un ejemplo de una función bivariada:

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2 - 10$$

La notación para evaluar las funciones multivariadas es análoga a la de las funciones de una variable independiente. Por ejemplo si queremos evaluar f(x,y) cuando x=0 y y=0 , esto se denota mediante f(0,0). En la función precedente.

$$F(0,0) = (0)^3 + 3(0)(0) + (0)^2 - 10 = 0 + 0 + 0 - 10 = -10$$

Anteriormente ya se vio lo que es una función, lo que es una variable dependiente y una variable independiente, pero sería bueno observarlo desde otro punto de vista por ejemplo: si la f(x) = x2 y además sabemos que la gráfica (Figura 5) es.

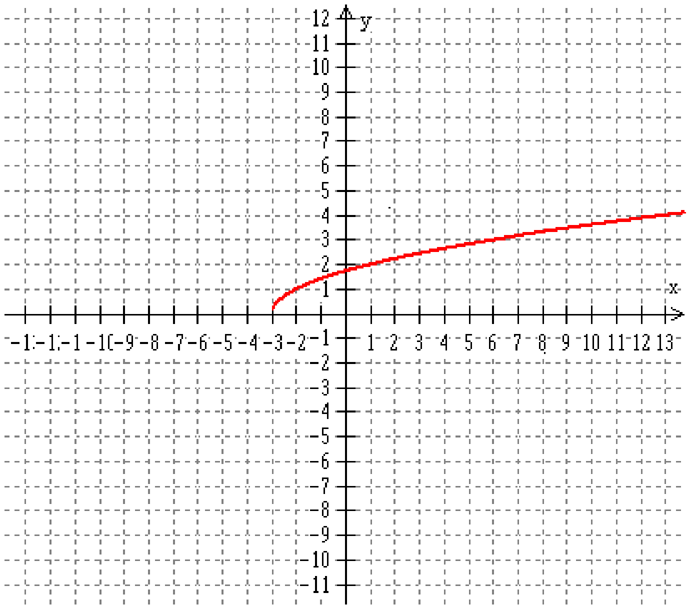


Observando la gráfica podemos encontrar el valor de f(-2), es decir que valor tiene la variable dependiente cuando x es igual a -2, valoramos y nos damos cuenta que el valor corresponde a 4, entonces podemos darnos cuenta que:

f(-2) = 4, f(3) = 9, f(0) = 0

Y así podemos encontrar todos los valores de y que queramos en función de la variable independiente x.

Analicemos otra función por ejemplo: $f(x) = \sqrt{x+3}$ (Figura 6)



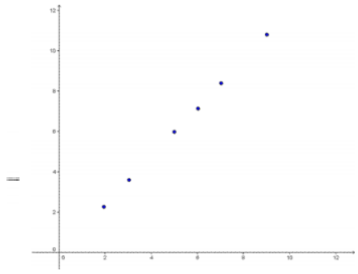
1.8 Representación a través de gráficos

Fundamentalmente, existen 3 formas de expresar una función: por medio de una tabla de valores, una gráfica o por una fórmula (también llamada ecuación). Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, pero podemos avanzar que la fórmula es la mejor forma de expresar la función, ya que con ella podemos obtener las otras dos expresiones mediante una serie de procedimientos establecidos.

Veamos un ejemplo de la vida diaria en el que aparecen las 3 formas de expresar una función:

Manolito compra pan todos los días; desea saber el importe de las barras de pan que va a comprar dependiendo del nº de barras adquiridas. Para ello, ha recogido los datos de varios días distintos en los que ha adquirido distinto número de barras y ha formado una tabla de valores:

Nº de barras	2	3	5	6	7	9
Precio (en €)	2'40	3'60	6	7'20	8'40	10'8



Tipos de gráficos

La gráfica de una función es el dibujo, sobre unos ejes coordenados, de todos los pares (x,f(x)) donde x recorre todos los valores del dominio de la función. Como ya quedó claro y = f(x), así que la 2ª coordenada y de cada uno de estos puntos no es más que la correspondiente imagen de la 1ª coordenada x.

Gráfica -> dibujo de {(x,f(x))/ x Dominio f}

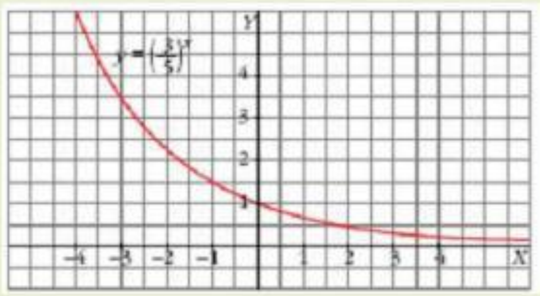
Sobre el eje OX representamos los valores de la variable independiente x y sobre el eje OY los valores de f(x) = y que es la variable dependiente.

Gráfica de f(x) = $\left(\frac{3}{5}\right)^x$

Dominio = $(-\infty, +\infty)$

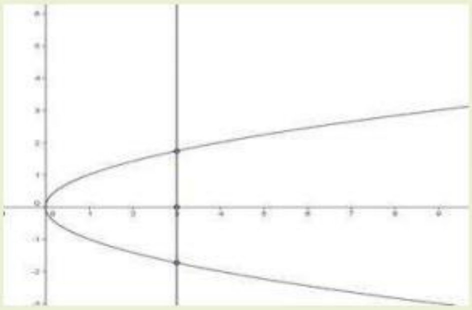
La gráfica pasa por el punto (0,1) como se observa si miramos el plano coordenado, luego: 0 (f(0) = 1. En efecto: $(3/5)^0 = 1$

También se ve que pasa por (1,0'6) ya que f(1) = $(3/5)^1$ = 3/5 = 0'6



Para determinar a partir de la gráfica el valor de y = f(x) que corresponde a un valor de x concreto, debemos trazar la recta perpendicular al eje OX que pase por ese valor de x y el punto en el que esta recta corte a la gráfica es el valor de f(x).

Cada recta perpendicular debe cortar en un único punto a la gráfica, ya que en otro caso habría algún valor de x que tendría dos imágenes, lo cual no debe suceder



Esta gráfica **no** es una función

Esta gráfica NO corresponde a una función, ya que cada valor de **x** > 0 tiene **2 imágenes** (cada recta perpendicular al eje OX corta a la gráfica en dos puntos. En el ejemplo, hemos trazado la recta perpendicular que pasa por x = 3 y vemos que corta a la gráfica en 2 puntos distintos.

La gran ventaja de la gráfica como forma de representar a una función es que proporciona una gran cantidad de información de un vistazo: nos dice cuál es el comportamiento global de la función, la tendencia que tiene, etc. Por el contrario, como inconveniente podemos citar que, en general, es muy difícil obtener la gráfica precisa de una función cualquiera. De hecho, se necesita una herramienta matemática poderosísima para ello: el cálculo diferencial, combinado con el cálculo de límites funcionales. Este estudio se escapa del objetivo del presente curso. Como primera aproximación al dibujo de una gráfica, podemos utilizar una tabla de valores para marcar cada punto de la tabla, formado por 2 coordenadas x e y, sobre los ejes y unir entre sí, bien mediante rectas o curvas, los puntos dibujados, como se indica en el siguiente ejemplo:

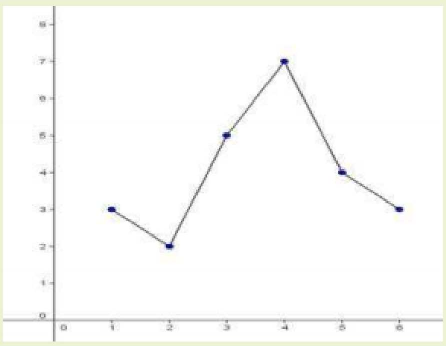
Dada la siguiente tabla de valores para la función f(x)

Vamos a construir la gráfica a partir de esta tabla:

Variable x	1	2	3	4	5	6
Variable y = f(x)	3	2	5	7	4	3

Al trazar así la gráfica, podemos hacernos una primera idea de los valores que alcanza la función; así, al valor **x = 1'5** le corresponde

f(x) = y = 2'5 aproximadamente. Esto no garantiza en absoluto que efectivamente f(1'5) =2'5, sólo se trata de una primera aproximación. Desconocemos completamente si la gráfica es así o parecida, ya que disponemos de muy poca información (sólo 6 valores). Con más datos, podríamos construir una gráfica más precisa.



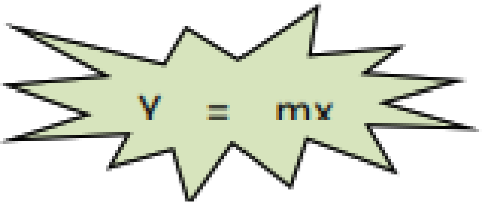
1.9 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

Hasta ahora se ha definido lo que es una función lineal, si recordamos es donde a cada variable dependiente corresponde un valor de la variable independiente y un claro ejemplo es la ecuación de la recta.

Se llama función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x,y). Su ecuación tiene la forma:

$y = mx$ ó $f(x) = mx$

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.



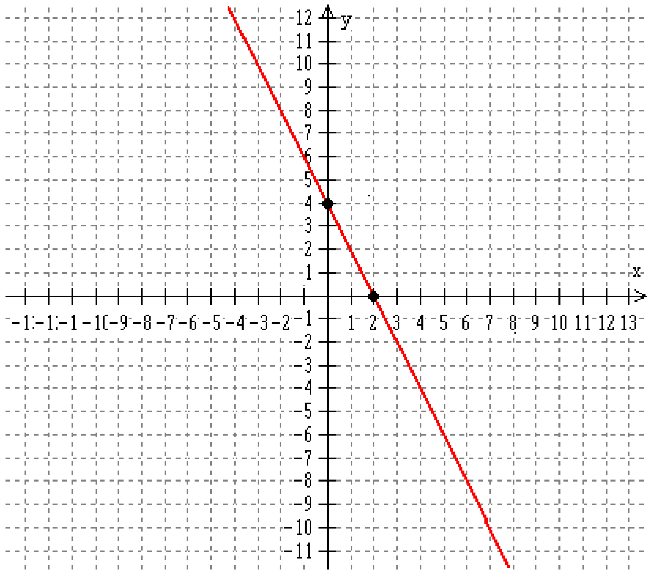


Figura 9. Ecuación de la recta

Interpretación de la pendiente: Es la Inclinación que existe entre dos puntos. Considerando el ejemplo anterior (Figura 9) entre el punto A y el Punto B.

Las coordenadas del Punto A(0,4) y del punto B(2,0), por lo tanto nos apoyamos en la fórmula para encontrar la pendiente entre dos puntos.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entre el punto A y el punto B se puede tomar como el punto 1 el que yo determine lógicamente el otro punto será el punto 2, en este caso tomaremos el punto B(2,0).

como el punto 2, por lógica, el punto A(0,4) será el punto 1, entonces la pendiente será:

$$m = \frac{0-4}{2-0} = -\frac{4}{2} \quad \frac{incremento\ en\ y}{incremento\ en\ x}$$

Pero analizando el incremento que en el caso de y del punto A al punto B es un decremento de 4 unidades y en el caso de x del punto A al punto B es un incremento de 2 unidades.

Puesto que la pendiente es la relación entre el incremento en y y el incremento en x, m = -2 , aquí hacemos mención que es una pendiente negativa y se da cuando en x o en y existe un decremento.

Ahora analicemos la pendiente de cada una de las siguientes rectas, empezaremos con la rectaAB: A(-2,4) y B(2, -8)

Si nos desplazamos verticalmente desde el punto A(-2,4), hasta el punto B(2,-8), observamos que el valor para y en el punto A es de 4 y en el punto B es de -8, sabemos que la distancia entre 4 y -8 es de 12, entonces lo que tuve que bajar fueron 12 unidades, esto sería el decremento para y.

Por otro lado, si nos desplazamos horizontalmente del punto A(-2,4), hasta el punto B(2,-8), observamos que el valor para x en el punto a es -2 y en el punto B es 2, sabemos que la distancia entre -2 y 2 es 4, entonces lo que tuve que avanzar fueron 4 unidades, esto sería el incremento en x.

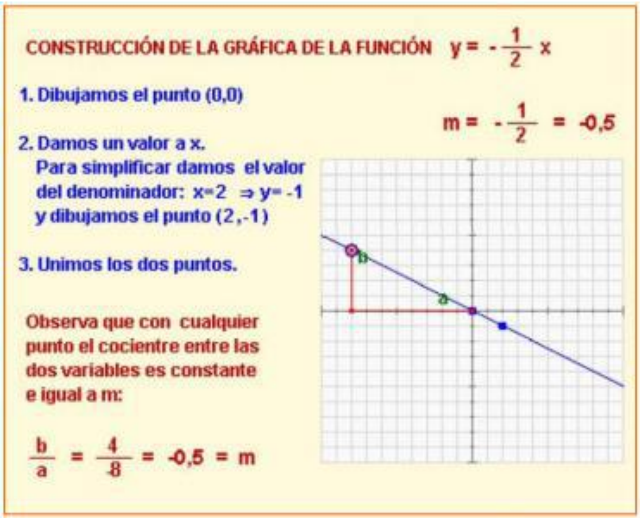
Si la pendiente es igual al incremento en y entre el incremento en x entonces: Entonces la pendiente de la recta es -3, Porque el valor para y es decremento y por consiguiente negativo

Recuerda: dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.

Representación gráfica:

Como has visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como $y=mx$, si $x=0$ entonces $y=0$; por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0). Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0).

Si $x=1$, entonces $y=m$, por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o pendiente de la recta. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.



1.10 Intersección con el eje (y).

Antes de continuar haremos una breve descripción de algunas características de la recta.

$$Y = mx + b$$

☐ La ecuación de una recta es;

En donde m es la pendiente de la recta b es la ordenada al origen, es decir donde la recta cruza el eje de las y

Por ejemplo: $y = x+3$

La pendiente es igual a 1 y la ordenada igual a 3 (Figura 11)

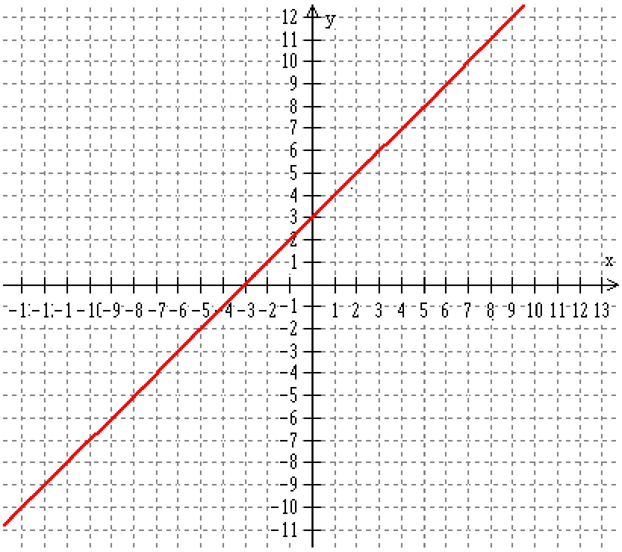


FIG.11

Por ejemplo:

En donde la pendiente es igual a -2 y la ordenada al origen es 4, es decir, que esta recta debe cruzar el eje de las y en el valor de la ordenada que es 4 (Figura 12).

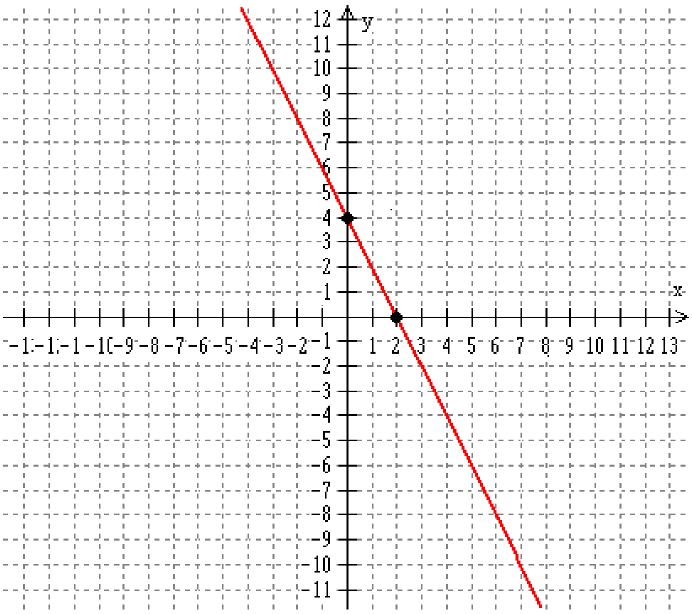


FIG.12

1.11 Determinación de la ecuación de una línea recta

Pendiente e intersección

Para encontrar la ecuación de una recta teniendo como datos su pendiente y la intersección con alguno de los ejes podemos manejar dos opciones:

A) Cuando se conoce el dato de intersección con el eje de las y En este caso utilizamos la fórmula que hasta ahora se ha manejado y = mx+b, donde, m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0,3), que es la ordenada al origen y tiene pendiente igual a 2, si observamos la gráfica (Figura 13), la recta cruza el eje vertical cuando y = 3, por lo tanto, el valor de b es igual a 3 y la pendiente es igual a dos, por consiguiente, con los datos:

$m = 2, \quad b = 3$ la ecuación será

$$y = mx + b \longrightarrow y = 2x + 3$$

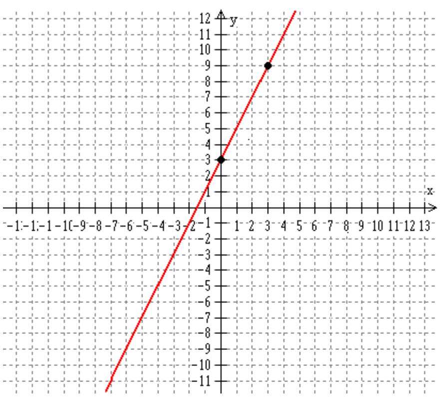


Figura 13.

B) Cuando se conoce el dato de intersección con el eje de las x.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que cruza por el punto (5,0), que es la abscisa al origen y que tiene pendiente igual a -2 (Figura 14)

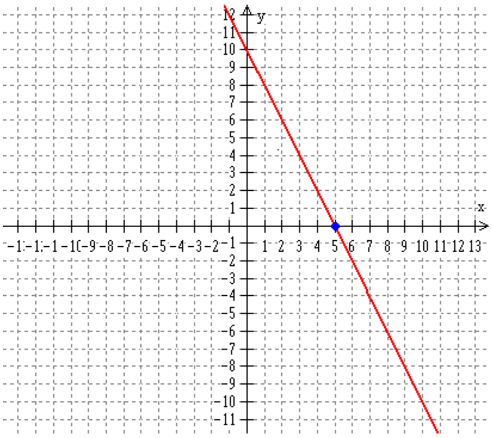


Figura 14.

Para encontrar la ecuación de la recta lo primero que tenemos que hacer es utilizar los datos con los que se cuenta y utilizar la misma fórmula: Y = mx+b.

Si sabemos que pasa por el punto (5,0) y tiene pendiente igual a -2 entonces sustituyendo datos: $0 = -2(5)+b \Rightarrow 0 = -10 + b \Rightarrow b = 10$

Entonces la ecuación es $y = -2x + 10$, que el valor de b lo pudimos haber obtenido dela gráfica en donde vemos que la recta cruza el eje vertical cuando y es igual a 10.

1.12 Pendiente y un punto

En este caso a diferencia del anterior, el punto que se da como dato no está en ninguno de los ejes coordenados y en el ejemplo anterior o está en el eje vertical o está en el eje horizontal. para este caso manejamos la segunda fórmula de la ecuación de una recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Donde los datos conocidos serán la pendiente, m y los valores del punto conocido (X1, Y1

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, -2) y tiene pendiente igual a -4, sustituyendo valores en la formula nos quedaría lo siguiente.

$$y - 4 = -4(x - (-2)) \therefore \quad y - 4 = -4(x + 2) \therefore \quad y - 4 = -4x - 8$$

Por lo tanto la ecuación es $y = -4x - 4$

En este caso en particular si nos dan dos puntos como datos, hay que seguir los siguientes pasos:

1. Hallar la pendiente entre los dos puntos.
2. Conociendo la pendiente y los dos puntos, aplicamos la segunda fórmula de la ecuación de la recta, en este caso se escoge uno de los puntos, cualquiera de los dos, ya que la ecuación será la misma y la resolvemos.

Ejemplo:

Hallar la ecuación que pasa por los puntos A(3, -1) y B(4, 2), siguiendo los pasos indicados, lo primero será encontrar la pendiente.

Si la pendiente es igual a 3, escogemos el punto A(3,-1) y aplicamos la segunda fórmula de la ecuación de una recta.

$$y + 1 = 3(x - 3) \therefore \quad y + 1 = 3x - 9$$

$$y = 3x - 10$$

UNIDAD 2
FUNCIONES LINEALES, APLICACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

2.1. Funciones lineales de ingresos

En el ámbito administrativo se conoce como ingreso, a la cantidad total de dinero que obtiene una organización debido a la venta de sus productos o a la prestación de sus servicios. Basándonos en este concepto puede verse claramente que el ingreso de cualquier organización dependerá directamente del precio al que venda sus productos o servicios, así como de la cantidad de servicios brindados o de productos vendidos. Matemáticamente pudiera expresarse como:

Ingreso Total = (precio) (cantidad vendida)

Asumiendo que el precio de todos los productos es el mismo, sin embargo, si dicho precio variara, el ingreso total sería la suma de los ingresos individuales obtenidos por cada producto o servicio al precio en que se vendió.

Ejemplo: 1. Una empresa en la que se fabrican relojes de pulso vende a sus clientes mayoristas dichos relojes a un costo de $120.00. Si para ser considerado como cliente mayorista necesitan hacer una compra de al menos 1000 productos. ¿Cuál será el ingreso menor que pudiera recibir el fabricante de un cliente mayoritario?

Solución: Ingreso Total = (precio) (cantidad vendida)
Sustituyendo:
Ingreso Total= ($120.00) (1000 productos)
Ingreso total= $120,000.00

Ejemplo 2: Retomando el problema anterior, supóngase que además de vender 1000 relojes a un mayorista vende 500 a un medio mayorista al cual le ofrece un precio de $150.00. ¿Cuál será su ingreso total?

Solución: Ingreso Total = (precio) (cantidad vendida) Sustituyendo: Ingreso total=
($120.00) (1000 productos) + ($150.00) (500 productos)
Ingreso Total= $120,000.00 + $75, 000.00
Ingreso Total = $195, 000.00

2.2 Funciones lineales de costo

El costo es la expresión cuantitativa monetaria representativa del consumo necesario de factores de la producción que se emplean para producir un bien o prestar un servicio.

Con las funciones de costos trataremos de plantear un modelo matemático simplificado de la realidad económica. Iniciaremos diciendo que los costos de producción de un bien o de prestación de un servicio tienen distintos componentes que, en un principio, le atribuiremos un comportamiento lineal, pues es el modelo más sencillo.

Las funciones lineales cumplen un importante papel en el análisis cuantitativo de los problemas económicos. En muchos casos los problemas son lineales pero, en otros, se buscan hipótesis que permitan transformarlos en problemas lineales ya que su solución es más sencilla.

Costo lineal: Cuando una empresa produce cualquier bien o presta un servicio, deberá utilizar una serie de insumos que valorizados monetariamente le genera costos, que analizados en función a la relación con la producción total, los denominaremos costos fijos y costos

variables. Los primeros, como lo indica su nombre, son independientes de las cantidades de un artículo que se produzca o un servicio que se preste (p.ej.: alquiler del local, depreciación de los bienes durables, determinados impuestos, etc.).

En cambio, los costos variables dependen de la cantidad que se produzca de ese artículo o que se preste del servicio, (p. ej.: costos de materiales, de mano de obra productiva, etc.)

El costo total es la suma de ambos

Costo Total = Costos Fijos + Costos Variables

Si a los costos fijos de producir x artículos lo indicamos como b pesos, estamos en presencia de una función constante de la forma f(x) = b , Haciendo b = 6, confeccionamos la gráfica correspondiente de CF (x) = 6

Podemos observar que si se confeccionan 1, 5 u 8 artículos se mantiene el mismo valor de costo fijo, por eso decimos que CF (x) = 6 es una función constante.

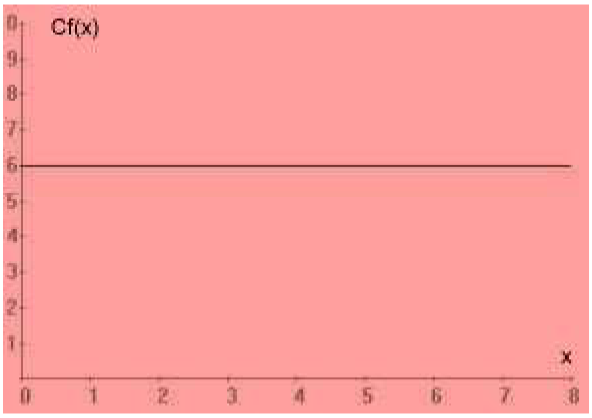
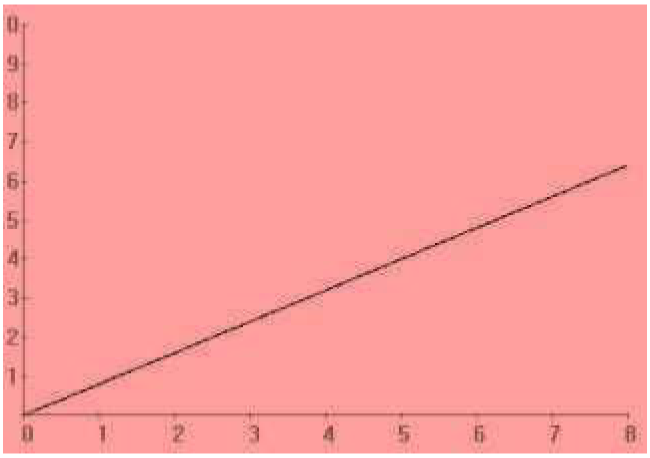


Figura 20.

Para simplificar nuestro análisis supongamos la condición de que el costo variable por unidad de artículo se mantiene constante, en ese caso los costos variables totales serán proporcionales a la cantidad de artículos producidos.



CV(x) = 0.8 x

Como el costo total para producir x artículos es la suma de los costos anteriores, tenemos

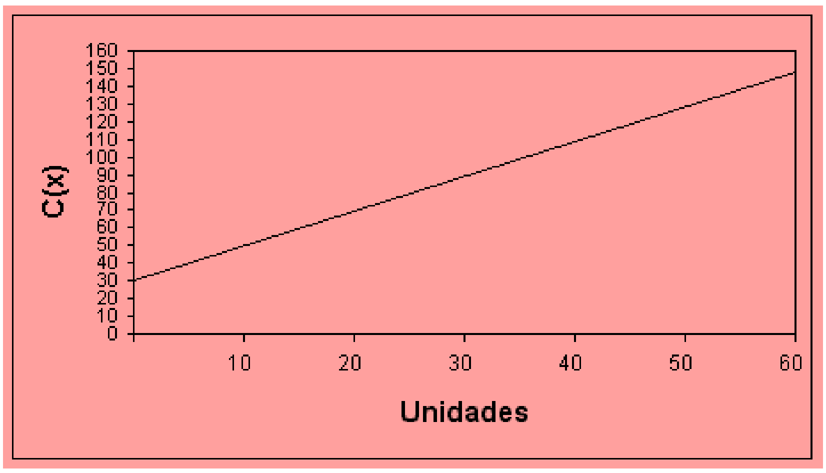
CT(x) = CV(x) + CF(x)

Ejemplo 3 El costo variable de fabricar juntas para machimbre es de $ 2 por unidad y los costos fijos por día son de $30. Escriba la fórmula de costo total y construya su gráfica

¿Cuánto cuesta fabricar 25 juntas de machimbre por día?

Solución

El costo total de fabricar x juntas de machimbre en un día es C(x) = 2x + 30



El costo total de fabricar 25 juntas de machimbre por día es de \$ 80.

$$C(25) = 2.\ 25 + 30$$
$$C(25) = 80$$

2.3 Funciones lineales de utilidades

La utilidad de una organización es la diferencia existente entre el ingreso total y el costo total. Matemáticamente pudiera expresarse como:

Utilidad = Ingreso - Costo Total

Cuando el ingreso total es mayor que el costo total la utilidad es positiva se conoce como ganancia, en caso contrario la utilidad sería negativa y recibe el nombre de pérdida o déficit.

Cuando tanto la función de ingreso como la de costo son funciones lineales de una misma variable, es decir, de la cantidad de artículos producidos o servicios brindados la función de la utilidad también será una función lineal de la misma variable. Es decir, si el ingreso total fuera la función $I(x)$ y el costo total $C(x)$, la función utilidad sería:

Utilidad o pérdida = $I(x) - C(x)$

Ejemplo 1: Una empresa vende un artículo a un precio de \$100.00, si sus gastos por mano de obra son de \$10.00 por producto y por concepto de materia prima de \$15.00

por producto teniendo costos fijos de \$1,000,000 mensuales, si su producción mensual es de 50,000 artículos.

Determina la utilidad mensual de la:

Solución:

El ingreso estaría definido por:

Ingreso total = \$100 (x)

El costo total sería:

Costo total = \$25.00 (x) + \$1 000, 000

La utilidad es:

Utilidad = 100(x) – (\$25.00(x) + \$1 000, 000)

Agrupando tenemos:

Utilidad = \$75.00(x) – 1 000, 000

Utilidad Mensual = \$ 75.00 (50,000 artículos) - \$ 1000, 000

Utilidad Mensual= \$3, 750 000 - \$ 1000, 000

Utilidad Mensual = \$2, 750 000

2.4 Modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción

Concepto

- El punto de equilibrio es aquel nivel de operaciones en el que los ingresiguales en importe a sus correspondientes en gastos y costos.
- También se puede decir que es el volumen mínimo de ventas que debe para comenzar a obtener utilidades.
- Es la cifra de ventas que se requiere alcanzar para cubrir los gastos y costos de la empresa y en consecuencia no obtener ni utilidad ni perdida.

Objetivos

- Determinar en qué momento los ingresos y los gastos son iguales.

- Medir la eficiencia de operación y controlar las sumas por cifras predeterminadas por medio de compararlas con cifras reales, para desarrollar de forma correcta las políticas y decisiones de la administración de la empresa.
- Influye de forma importante para poder realizar el análisis, planeación y control de los recursos de la entidad.

Factores Determinantes

- El volumen de producción afectará de forma directa a los costos variables, mientras que los costos fijos no son influidos por este.
- El tiempo afecta al punto de equilibrio de forma que se puede dar solución a los problemas de forma oportuna.
- Los artículos y las líneas de producción deben tomarse a consideración para no caer en producciones que no generan utilidades.
- Los datos reales y presupuestados de los estados financieros permitirán determinar las variaciones, que las provoco y así aplicar soluciones.

Basado en lo anterior podemos concluir que el punto de equilibrio se encuentra igualando, ingreso con costo total:

Ingreso = Costo Total

Ejemplo 5.- Hallar el punto de equilibrio de la producción de termostatos eléctricos, cuyo costo variable es de $55.00, el costo fijo es de $15,000 y su precio de venta es de $80.00

x = número de unidades

Ingreso = precio de venta por el número de unidades = ($80.00)(x)

Costo Total = Costo Fijo + Costo Variable = ($15,000)+ (costo de producción por

número de unidades producidas) = ($15,000) + ($55.00)(x).

Entonces para encontrar el punto de equilibrio igualamos el ingreso con el costo total

Ingreso = Costo Total

80x = 15,000 + 55x

80x -55x = 15,000

25x = 15,000

X = 15,000/25 = 600 unidades

Esto me indica que debo producir 600 unidades para empezar a tener ganancia

Solución:

2.5 Modelo gráfico de punto de equilibrio.

Empezamos por definir que el eje de las absisas "x" representa la cantidad de utilidades a producir y vender. El eje de las ordenadas representa el valor de las ventas. (ingresos), costos y gastos en pesos.

Análisis:

La curva de ingresos totales inicia desde el origen o intersección de los dos ejes del plano cartesiano. A medida que se van vendiendo más unidades, la curva va en ascenso, hasta llegar a su tope máximo.

Ingresos Totales = Número de Unidades vendidas por precio de venta.

El punto de equilibrio

Se puede calcular tanto para unidades como para valores en dinero. Algebraicamente

el punto de equilibrio para unidades se calcula así:

Fórmula (1)

Donde

CF = costos fijos; CVT = costo variable total; VT = ventas totales

Fórmula (2)

Dónde: CF = costos fijos; PVq = precio de venta unitario; CVq = costo variable unitario O también se puede calcular para ventas de la siguiente manera..

$$PE_{ventas} = \frac{CF}{1 - \frac{CVT}{VT}} \qquad PE_{unidades} = \frac{CF}{PVq - CVq}$$

Ejemplo:

Los municipios de tierra caliente del departamento del Tolima se conocen por sus comidas y bebidas. Si de bebidas se trata, la avena es una bebida de exquisito sabor.

Para ello se necesita leche, canela, harina de trigo, almidón de yuca, vainilla, azúcar, leche condensada, hielo y vaso desechable. Estos elementos tienen un costo por vaso,de $250. Supongamos que Camilo Prada, un reconocido vendedor de avena de la región, no tiene local propio. El arrienda un sitio por el cual paga $100.000 mensuales.

Los enseres que él requiere como cantimplora, ollas y otros elementos, tienen una depreciación mensual de $50.000.

En total sus costos fijos ascienden a$150.000. Camilo Prada vende cada vaso de avena en $1.200 .Análisis: Si el precio de venta por vaso es de $1.200 y el costo variable unitario es de$250, quiere decir que cada vaso de avena que se venda, contribuirá con $950 para cubrir los costos fijos y las utilidades operacionales de su negocio. Si reemplazamos en la formula (1) estas variables, se tendrá un punto de equilibrio de 158 vasos aproximadamente. Es decir, Camilo tendrá que vender 158 vasos en el mes para poder cubrir sus costos operativos y así poder comenzar a generar utilidades.

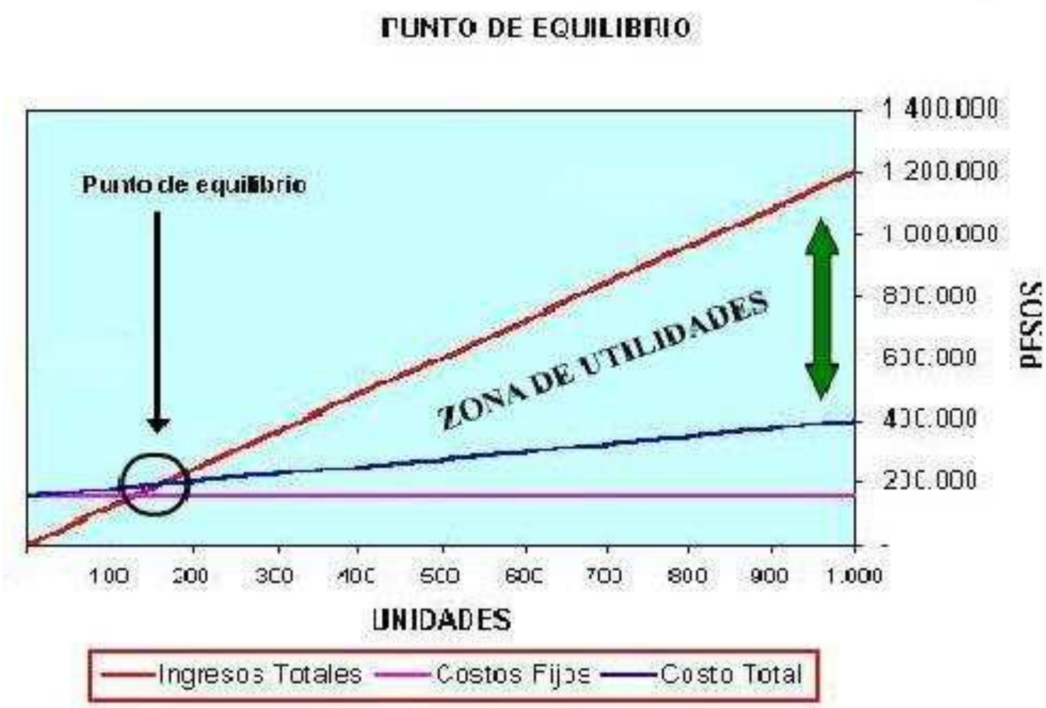
Ahora bien, supóngase que Camilo vende, con los mismos costos fijos, 500 vasos de avena al mes, es decir, $600.000.

Los costos variables totales para Camilo serán de$125.000. ¿A qué nivel de ventas logrará su punto de equilibrio? Respuesta: $189.600 aproximadamente, o lo que es lo mismo: 158 vasos x $1.200 =$189.600.

Por su parte la curva de los costos fijos inicia en el punto de $ 150,000 y permanece constante, es decir, no guarda relación con el volumen de producción y ventas.

El costo total comienza a partir de los costos fijos y corresponde a la sumatoria de los costos fijos más los costos variables, por unidad producida.

Costo total = Costo fijo + (Número de unidades producidas por costo variable unitario), como se puede apreciar, los ingresos cruzan a los costos totales exactamente en $189,600. A partir de este nivel de ventas, 158 vasos aproximadamente, la zona de utilidades comienza a aparecer a la derecha del PE. Por debajo de los valores anteriores, aparecerá una zona de perdidas, puesto que el costo es mayor que el ingreso.



2.6 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad.

Una manera diferente de hacer el análisis de equilibrio es teniendo en consideración su contribución a la utilidad. Siempre y cuando el precio de venta p rebase el costo variable por unidad v, la venta de cada unidad tendrá como resultado una contribución a la utilidad. La diferencia entre el precio de venta y el costo variable por unidad recibe el nombre de margen de utilidad. Matemáticamente:

Margen de utilidad= p – v

El margen de utilidad deberá utilizarse primero para subsanar los costos fijos generados en la producción, más una vez librados todos estos costos, el margen de utilidad por unidad contribuirá directamente en la utilidad.

Ejemplo: Es decir, si un objeto es vendido a un precio p = $20.00 y el costo variable por unidad es de v= $5.00, su margen de utilidad será:

Margen de utilidad= p – v Margen de utilidad= $20.00 – $5.00 Margen de utilidad= $15.00

Más si se considera que para producir se tiene que desembolsar por concepto de costo fijo la cantidad de $30, 000, los $15.00 pesos de margen de utilidad de cada producto primero deberán cubrir los costos fijos y hasta lograr cubrirlos en su totalidad comenzará su contribución a la utilidad.

Para cubrir el costo fijo se necesita: Margen de utilidad (x productos) = Costo fijo Es decir: 15.00 (x) = 30 000 Despejando para x: x= 30, 000 / 15.00 x= 2000 unidades Esto quiere decir que solo contribuiremos a la utilidad una vez vendidas al menos 2000 unidades siendo la utilidad de $15.00 por unidad vendida a partir de este punto.

Como se ha comentado anteriormente los modelos de equilibrio sirven para tomar decisiones principalmente con respecto a la producción. Cuando se trata de decidir si una empresa produce o compra algún artículo en particular deben tenerse en consideración los costos tanto fijos como variables de cada opción. Una vez considerados tales factores se determinan las funciones lineales que representarían la relación. Se determina el punto de equilibrio entre ambas funciones a través del método que se desee, ya sea el gráfico o el analítico. A partir del punto de equilibrio, la opción que tenga el costo por unidad menor será la mejor.

El costo de comprar estaría determinado por: Comprar = (8.00) (x) El costo de producir estaría determinado por: Producir = 40 000 + (4.00) (x) Igualando ambas opciones se tiene: (8.00) (x)= 40 000 + (4.00) (x) El equilibrio se encontraría al producir x unidades, despejando para x tenemos: (4.00) (x) = 40 000

x = 10, 000 unidades

Por lo que a partir de 10, 000 unidades la mejor opción será producir. Sí el nivel de producción es de 15 000 unidades la mejor opción es invertir en el equipo y producir en lugar de comprar.

EJEMPLO2: La gerencia de la compañía de controles Robertson debe decidir entre dos procesos de producción de su termostato electrónico modelo C. El costo mensual del primer proceso está dado por $C1(x) = 20x + 10{,}000$ dólares, donde x es la cantidad de termostatos producidos, y el costo mensual del segundo proceso está dado por $C2(x)=10x+30{,}000$ dólares. Si las ventas proyectadas son de 800 termostatos a un precio unitario de $40, ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia para maximizar las ganancias de la compañía?

Solución:

El nivel operativo de equilibrio con el primer proceso se obtiene resolviendo la ecuación

$40x = 20x + 10{,}000$

$20x = 10{,}000$

$X = 500$

Lo que da como resultado en el primer proceso que el punto de equilibrio esta cuando se producen 500 unidades.

En el segundo proceso se obtiene la ecuación

$40x = 10x + 30{,}000$

30x = 30,000

X = 1,000

Lo que da como resultado en el segundo proceso que el punto de equilibrio esta cuando se producen 1,000 unidades.

No perdamos de vista que el punto de equilibrio nos indica el número mínimo de unidades que se deben de producir para que la compañía deje de tener pérdidas.

Entonces analizando, el primer proceso empieza a ganar a partir de producir 501 unidades, y en el segundo proceso empieza a ganar hasta 1001 unidades, por lo tanto si la gerencia decide producir 800 unidades, lógicamente se escoge el primer proceso ya que empieza a ganar desde 501 unidades.

	Ingreso	C. Total	P. Equilibrio	Producción propuesta	Viable
Proceso 1	40x	20x+10,000	500	800	ok
Proceso 2	40x	10x+30,000	1,000	800	

2.7 La recta

Analíticamente hablando, una recta se define como una ecuación de primer grado en dos variables de la forma:

Ax + By + C = 0

Donde, A ,B C son coeficientes numéricos y las variables son x y y .

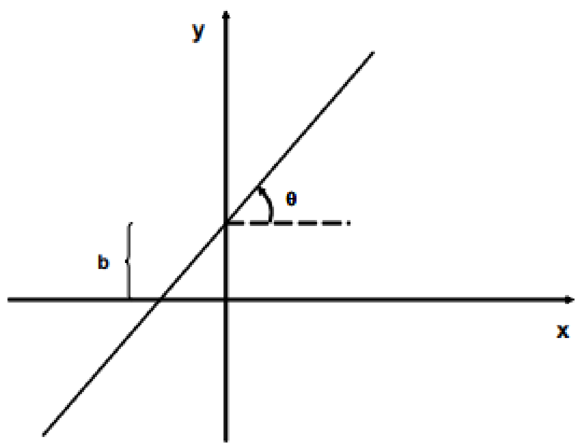
La recta es el lugar geométrico de los puntos P(y,x) que cumplen con la ecuación Ax + By + C = 0 .

Las características de una recta son la pendiente y la ordenada al origen.

• La pendiente (m) se define como su grado de inclinación y es la tangente del ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) que forma la recta con el eje x .

m = tan θ = CO / CA

• La ordenada al origen (b) es la distancia que existe del origen al punto donde la recta cruza al eje y .



De acuerdo a la figura anterior, una recta es el lugar geométrico de los puntos que poseen una misma pendiente.

2.8 Pendiente

Se sugiere que tengas una calculadora científica para que vayas siguiendo la secuencia de las operaciones que se van realizando.

Como ya se ha dicho, se requiere de 2 puntos, y tratándose de puntos en el plano cartesiano entonces se debe conocer sus coordenadas. Por lo tanto la formula a usar es:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Donde
(x_1, y_1) son las coordenadas del punto 1
(x_2, y_2) son las coordenadas del punto 2

Con el fin de obtener practica sobre la aplicación de la formula veamos el siguiente ejemplo. Es importante poner atención a la secuencia de los pasos para llegar al resultado. Ejemplo 1. Obtener la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2,-3) y B(-4,1) El primer paso es definir el cual es el punto 1 el que será A y el punto 2 el B, por lo que al sustituir en la formula tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{-4-2} = \frac{1+3}{-6} = \frac{4}{-6}$$

que simplificando y escribiendo el signo en el numerador resulta:

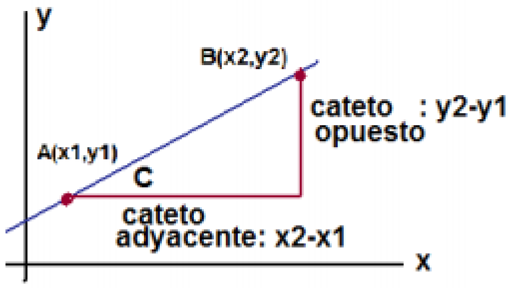
$$m = \frac{-2}{3}$$

Ahora lo que sigue es darle significado a nuestro resultado. Para esto debemos emplear los conocimientos de trigonometría, respecto a cálculo de ángulos. La función trigonométrica que nos permite obtener el ángulo de inclinación es: tangente ya que usando un sistema de coordenadas podemos ver que en un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es nuestra recta en cuestión, entonces los puntos1 y 2 forman los lados que se llaman catetos por lo que conocidas las coordenadas podemos usar la función tangente que se define como:

$$\tan C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

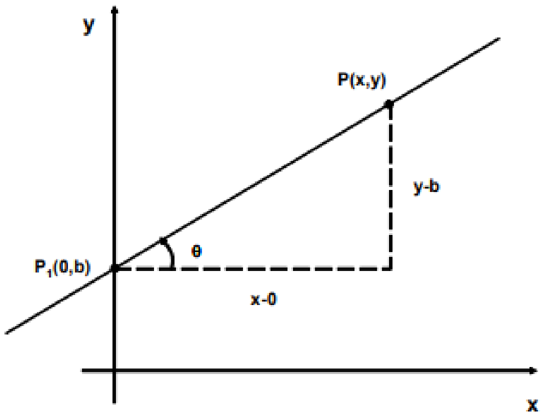
Que es la pendiente buscada.

Todo ello lo observamos en la figura siguiente:



2.9. Tipos de pendiente

Si en el caso anterior, el punto P1 se desplaza hasta que coincida con el eje y, se tiene:



Se advierte que el punto P1(x1 y1), se convierte en P (0 b,) , donde b es la ordenada al origen. Para este caso la pendiente es:

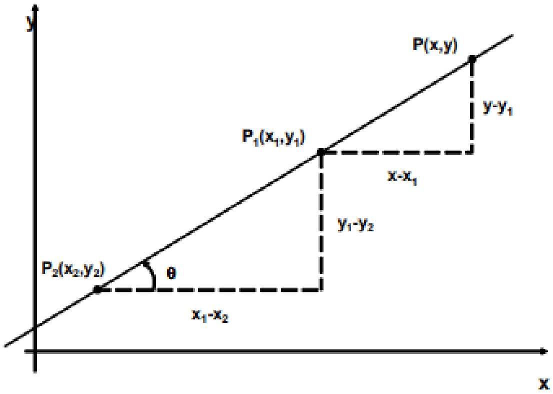
M = y – b / x – 0

Ahora, si se despeja $y - b$: $y - b = m(x - 0) \Rightarrow y - b = mx$, es decir: $y = mx + b$

Que es la ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta.

Dos Puntos (Cartesiana)

Dados los puntos P(y,x), ( ) P1(x1 y2) y P2(x2 y2), de una recta:



Se observa que la pendiente que une a los puntos P y P1 es:

$m = y - y1 \ / \ x - x1$

y que la pendiente que une a los puntos P1 y P2 es:

$m = y1 - y2 \ / \ x2 - x2$

Pero como la pendiente es la misma se pueden igualar:

$y - y1 \ / \ x - x1 = y - y2 \ / \ x - x2$, que equivale a:

$y - y1 = y1 - y2 \ / \ x2 - x2 \ (x - x1)$

Que es la ecuación conocida como de dos puntos o cartesiana de la recta.

2.10- Ecuación de la recta

Conociendo un punto cuyas coordenadas son (x, y) y si conocemos su pendiente; podemos encontrar su ecuación de la recta, la cual la podemos representar como ecuación particular y general, esta ecuación representa el movimiento realizado con las condiciones antes mencionado, tú puedes realizar tu ecuación cuando realizas un movimiento en línea recta, a continuación, te explico como:

Palabras clave

Inclinación: Un ángulo formado por una línea horizontal y una línea de visión por arriba de ella que mide menos de 90 grados.

Pendiente: se refiere a la inclinación de la tangente en un punto. Recta: es una sucesión infinita de puntos, situados en una misma dirección.

Trigonometría: Rama de las matemáticas que estudia a los triángulos por sus lados y ángulos.

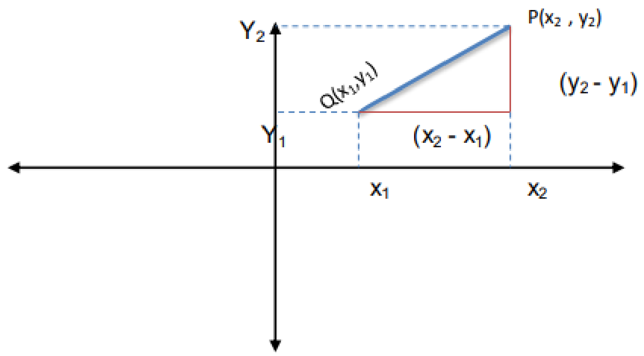
Segmento: es un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos.

Tangente: Se aplica a la línea o superficie que se toca en un único punto con otra línea o superficie sin llegarla a cortar.

Ecuación de la recta en forma de punto pendiente

Una recta está determinada por su pendiente (m) con sus coordenadas (x1 y1) de un punto de ella misma. Se determina la ecuación en X y Y que satisfaga las coordenadas (X, Y) de cualquier punto de la recta y que no satisfaga por ningún otro para cualquiera de números reales. Si P (x, y) es un punto cualquiera del plano x y:

Punto: es adimensional: no tiene longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional. No es un objeto físico. Describe una posición en el espacio.



La pendiente de la recta que une P con el punto dado Q (x_1 y_1) es: $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$
y esto es un m (pendiente), si P(x, y) está sobre la recta específica, por lo tanto tenemos que: $\boldsymbol{m} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

Y la ecuación de la recta es: $y - y_1 = \boldsymbol{m}(x - x_1)$

Recordar que la pendiente es igual a l grado de inclinación, se representa:

$$\boldsymbol{m} = tg\, \theta$$

Como la $\boldsymbol{tg}\, \theta = \frac{c.o}{c.a}$ y acorde a la figura anterior: $c.o = (y_2 - y_1)$ y se tiene: $c.a = (x_2 - x_1)$, se sustituye en la función tangente y nos queda:

$tg\, \emptyset = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ y como $\boldsymbol{m} = tg\, \theta$

La pendiente es: $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

2.11 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir.

Como se ha comentado anteriormente los modelos de equilibrio sirven para tomar decisiones principalmente con respecto a la producción. Cuando se trata de decidir si una empresa produce o compra algún artículo en particular deben tenerse en consideración los costos tanto fijos como variables de cada opción. Una vez considerados tales factores se determinan las funciones lineales que representarían la relación. Se determina el punto de equilibrio entre ambas funciones a través del método que se desee, ya sea el gráfico o el analítico. A partir del punto de equilibrio, la opción que tenga el costo por unidad menor será la mejor.

Ejemplo1: Suponga que un fabricante puede comprar un componente a un proveedor a un precio de \$8.00 por unidad o bien puede invertir \$ 40 000 en equipo y producir este componente a un costo \$4.00 por unidad. Decida cuál de las dos opciones es la mejor a un nivel de producción de 15 000 unidades.

El costo de comprar estaría determinado por: Comprar = (8.00) (x)
El costo de producir estaría determinado por: Producir = 40 000 + (4.00) (x)
Igualando ambas opciones se tiene: (8.00) (x)= 40 000 + (4.00) (x)
El equilibrio se encontraría al producir x unidades, despejando para x tenemos:
(4.00) (x) = 40 000
x = 10, 000 unidades

Por lo que, a partir de 10, 000 unidades la mejor opción será producir. Sí el nivel de producción es de 15 000 unidades la mejor opción es invertir en el equipo y producir en lugar de comprar.

EJEMPLO2: La gerencia de la compañía de controles Robertson debe decidir entre dos procesos de producción de su termostato electrónico modelo C. El costo mensual del primer proceso está dado por $C1(x) = 20x + 10{,}000$ dólares, donde x es la cantidad de termostatos producidos, y el costo mensual del segundo proceso está dado por $C2(x)=10x+30{,}000$ dólares. Si las ventas proyectadas son de 800 termostatos a un precio unitario de \$40, ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia para maximizar las ganancias de la compañía?

Solución:

El nivel operativo de equilibrio con el primer proceso se obtiene resolviendo la ecuación

40x = 20x + 10,000

20x = 10,000

X = 500

Lo que da como resultado en el primer proceso que el punto de equilibrio esta cuando se producen 500 unidades.

En el segundo proceso se obtiene la ecuación

40x = 10x + 30,000

30x = 30,000

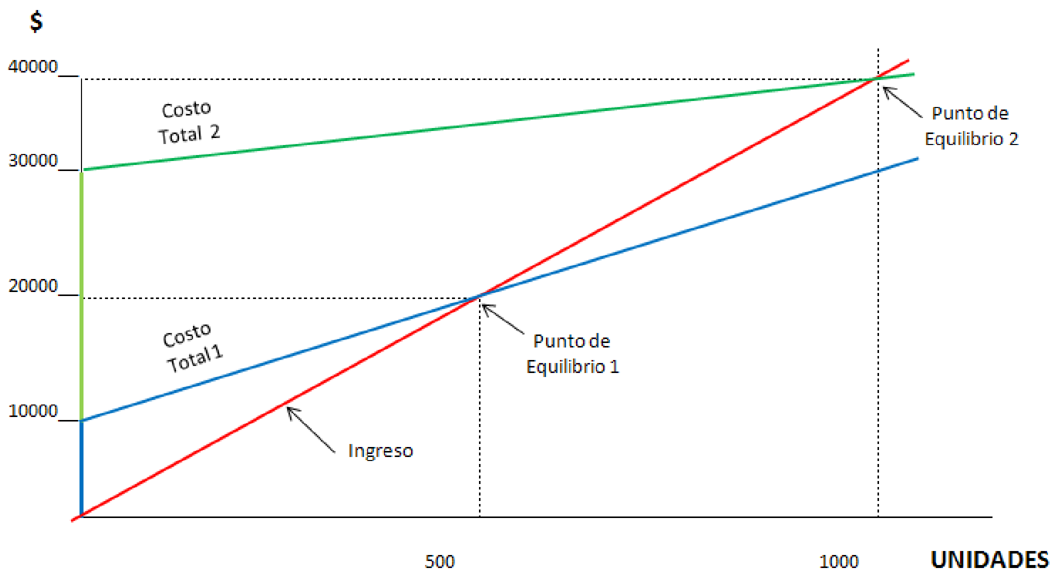
X = 1,000

Lo que da como resultado en el segundo proceso que el punto de equilibrio esta cuando se producen 1,000 unidades.

No perdamos de vista que el punto de equilibrio nos indica el número mínimo de unidades que se deben de producir para que la compañía deje de tener pérdidas.

Entonces analizando, el primer proceso empieza a ganar a partir de producir 501 unidades, y en el segundo proceso empieza a ganar hasta 1001 unidades, por lo tanto, si la gerencia decide producir 800 unidades, lógicamente se escoge el primer proceso ya que empieza a ganar desde 501 unidades.

	Ingreso	C. Total	P. Equilibrio	Producción propuesta	Viable
Proceso 1	40x	20x+10,000	500	800	ok
Proceso 2	40x	10x+30,000	1,000	800	



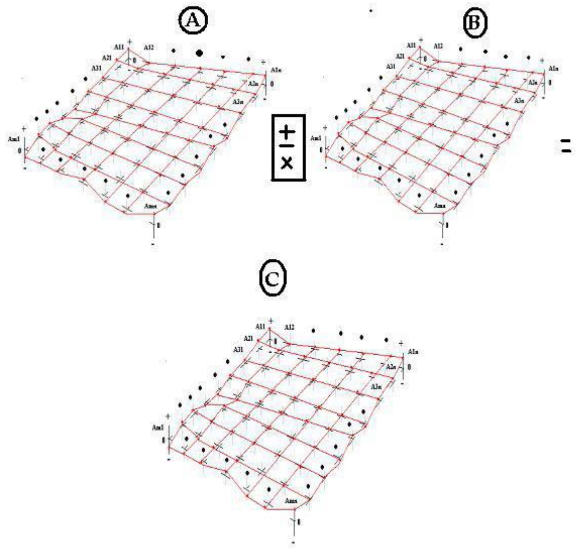
UNIDAD III
ÁLGEBRA MATRICIAL Y DETERMINANTES

3.1- Introducción y conceptos básicos

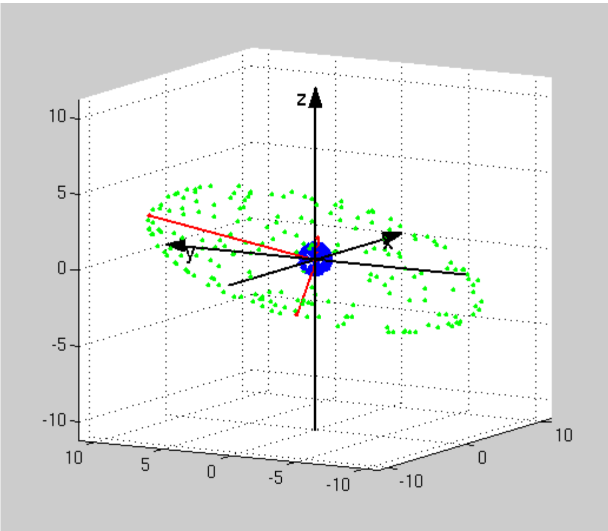
Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Una matriz es una tabla bidimensional de números en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse.

Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, y registrar los datos que dependen de varios parámetros.



Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices. Pueden descomponerse de varias formas.



Matrices : Una matriz es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados elementos) ordenados en filas y Columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales.

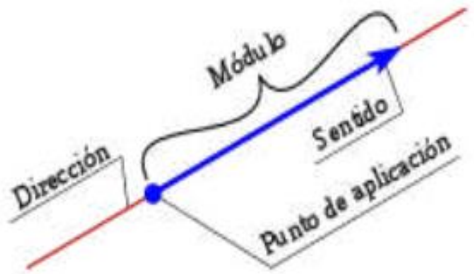
A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m-por-n(escrito m×n), y a m y n dimensiones de la matriz.

3.2 Vectores

Se llama vector de dimensión N a una tupla de N números reales (que se llaman componentes del vector). El conjunto de todos los vectores de dimensión N se representa como (formado mediante el producto cartesiano). Así, un vector v, perteneciente a un espacio se representa como:

$$v = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \qquad \text{donde } v \in \mathbb{R}^n$$

Componentes de un vector



En física, un vector es un tipo de representación geométrica para representar una magnitud física definida por un punto del espacio donde se mide dicha magnitud, además de un módulo, su dirección y su sentido

En Octave los vectores se pueden crear introduciendo una lista de valores separados por espacios o comas y encerrados entre corchetes. Veamos un ejemplo a continuación:

```
>>t = [4 8 -2 3 5]

t = 4 8 -2 3  5
```

En numerosas ocasiones, nos interesarán listas de valores en las que sus elementos guarden una cierta estructura, relación u orden. Por ejemplo, podríamos estar interesados en un vector con los enteros comprendidos entre 0 y 10:

≫t = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]

t = 0 1 2 3 4 5 6 7 8 910

Octave genera todos los enteros comprendidos entre ellos. Asi, podrıamos crear el vector t como

sigue:

≫t = [0:10] ;

Es decir, la orden [i:j] crea el vector [i i+1 i+2 ... j-2 j-1 j]. Si quisiéramos que el intervalo entre los elementos fuera distinto de 1, utilizaríamos tres números separados por ':', siendo el número central el incremento:

≫s = [0:2:10]

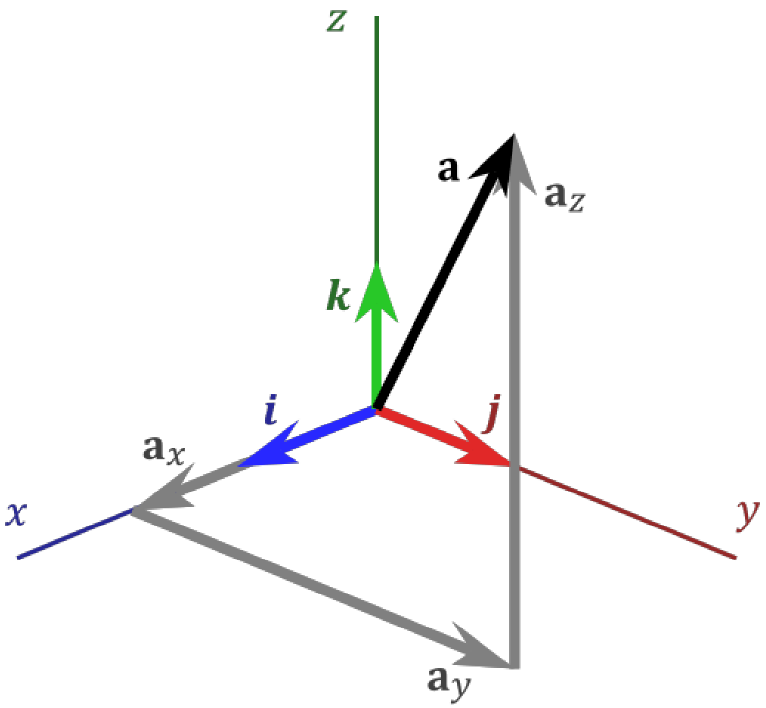
s = 0 2 4 68 10

En este ejemplo, el vector creado contiene los valores entre 0 y 10 separados por 2 Unidades. Este valor de incremento puede poseer cualquier valor entero, real e incluso Negativo:

≫s = [10:-2:0

s = 10 8 6 4 2 0

Los valores de los elementos de t los hemos introducido uno a uno porque no son muchos pero, ¿y si hubiéramos querido introducir una lista de valores de 0 a 100?. Para facilitar esta tarea, Octave introduce la notación de dos puntos (:). Si escribimos dos números enteros separados por dos puntos,



Consideremos que tenemos tres vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

En cada vector tenemos tres elementos en forma de columna, en el vector $\vec{}$ el subindice del elemento nos representa la posición que ocupa, por ejemplo el lo que nos indica es que este elemento ocupa, la primera posición de la columna o que es parte del primer renglón, el nos indica que estamos hablando de un elemento del renglón 2 y el que esta ubicado en el renglón 3 y así se considera respectivamente para cada vector tomando en cuenta los subíndices.

3.3 Introducción a las matrices

Definicion

Es un conjunto rectangular ordenado de elementos en el cual cada elemento toma en cuenta el renglón y la columna a la que pertenece para ubicar su posición.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz A tiene una dimensión de 2x3 pero ¿Por qué? Bueno el número de renglones es 2 y el número de columnas es 3, recordemos que siempre para dimensionar una matriz, se considera primero el número de renglones y después el número de columnas.

Recordemos que un vector se representa con letras minusculas y una flecha en la parte superior v,u ,a b, c........ sin embargo las matrices se representan por letras mayusculas A,B,C,D..........

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

En este caso para la matriz B la dimencion es de 3x2, sabemos que el numero de renglones es 3 y el numero de columnas es 2 Analizando la posicion de cada elemento en la matriz B, cada numero tiene un orden ya establecido, por ejemplo el 5 es el a_{11}, lo cual que me indica que esta en la posicion del primer renglon y la primera columna, esto hace referencia a considerar que en todo elemento a_{ij}, tiene dos sub-indices en donde i representa el renglon en el que se encuentra y j representa la columna.

Por ejemplo el -2 es el a_{32}, lo cual me indica que pertenece al renglon 3 y a la columna 2, es necesario que se entienda la importancia de ubicar cada elemento da una matriz, por que en algunas operaciones que se veran mas adelante, por ejemplo para sumas o restas veremos que se suman o se restan elementos de iguales posiciones, o matrices de iguales dimenciones.

3.4- Tipos especiales de matrices

Matriz diagonal

Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es (nxn)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

En álgebra lineal, la matriz identidad es una matriz que cumple la propiedad de ser el elemento neutro del producto de matrices. Esto quiere decir que el producto de cualquier matriz por la matriz identidad (donde dicho producto esté definido) no tiene ningún efecto. La columna i-ésima de una matriz identidad es el vector unitario de una vectorial inmersa en un espacio Euclídeo de dimensión n. Toda matriz representa una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. La matriz identidad se llama así porque representa a la aplicación identidad que va de un espacio vectorial de dimensión finita a sí mismo.

Matriz nula

Se llama matriz nula a la que tiene todos los elementos cero, Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada

Es aquella matriz en la cual el numero de renglones es igual al numero de columnas

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal

Es la diagonal que esta esta formada por los elementos en los cuales el renglón es igual a la columna por ejemplo a11, a22, a33, …….. ann, es decir son todos los elementos en los cuales el sub-indice i es igual al sub-indice j

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad

Una Matriz Identidad es aquella en la cual, todos los elementos de la Diagonal Principal son 1 y todos los demas elementos de la matriz son 0, se representa por la letra I y siempre son cuadradas

3.5 Operaciones con matrices

Suma y resta de matrices: Dadas dos matrices de la misma dimensión, A = (aij) y B = (bij), se define la matriz suma como:

A + B = (aij + bij)

La matriz suma se obtiene sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición. Si tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{A + B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 5+4 & 1+3 \\ 4+1 & 7+5 & 2+6 \\ 6+0 & 1+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A - B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 5-4 & 1-3 \\ 4-1 & 7-5 & 2-6 \\ 6-0 & 1-1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Producto de un número real por una matriz

Dada una matriz A = (aij) y un número real k , se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz de la misma dimensión que A, en la que cada elemento está multiplicado por k.

k · A = (k · aij)

Propiedades

1 a · (b · A) = (a · b) · A

2 a · (A + B) = a · A + a · BA

3 (a + b) · A = a · A + b · A

4 I · A = A

Multiplicación de matrices

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B y la dimensión de la Matriz C nos la da el número de renglones de la Matriz A y el número de columnas de la Matriz B Am x n x Bn x p = Cm x p El elemento cij de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1 + 0.1 + 1.1 & 2.0 + 0.2 + 1.1 & 2.1 + 0.1 + 1.0 \\ 3.1 + 0.1 + 0.1 & 3.0 + 0.2 + 0.1 & 3.1 + 0.1 + 0.0 \\ 5.1 + 1.1 + 1.1 & 5.0 + 1.2 + 1.1 & 5.1 + 1.1 + 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1 Asociativa:

A · (B · C) = (A · B) · C

2 Elemento neutro:

A · I = A

Donde I es la matriz identidad del mismo orden que la matriz A.

3 Distributiva del producto respecto de la suma: A · (B + C) = A · B + A · C

4 No es Conmutativa: A · B ≠ B · A

3.6 Representación matricial de ecuaciones

Si tenemos un sistema de ecuaciones como el siguiente

$$\begin{aligned}3x + 5y &= 3\\ 2x - 5y &= 1\end{aligned}$$

De los valores numéricos que acompañan a las variables se forma la primera matriz A= A[3/2 5/-5], de las variables se forma la matriz B en forma de columna B=[X/Y] y la matriz C que está formada por los valores numéricos que completan la ecuación C [3/1], de tal manera que el producto de las matrices A y B es igual a la matriz C.

$$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

y así aplicando las propiedades del producto matricial nos damos cuenta que llegamos al sistema de ecuaciones de donde partimos.

En el siguiente sistema de 3x3 se sigue la misma metodología.

$$\begin{aligned}2x - 3y + 4z &= 1\\ 4x + 2y - 2z &= 3\\ 5x - 4y + 7z &= 5\end{aligned}$$

La matriz A = $\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & 2 & -2\\ 5 & -4 & 7\end{bmatrix}$ la matriz B = $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ y la matriz C = $\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$

Finalmente

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & 2 & -2\\ 5 & -4 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$$

Y es así como se representa en forma matricial un sistema de ecuaciones

3.7 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante de 2x2, 3x3 por método de columnas aumentadas y cofactores

A cada matriz cuadrada A se le asigna un escalar particular denominado determinante de A, denotado por |A| o por det (A).

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Determinante de orden 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - [(-1) \cdot 3] = 4 + 3 = 7$$

Determinante de orden 3

Consideremos una matriz 3x3 arbitraria A = (aij). El determinante de A se define como sigue:

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

Obsérvese que hay seis productos, cada uno de ellos formado por tres elementos de la matriz. Tres de los productos aparecen con signo positivo (conservan su signo) y tres con signo negativo (cambian su signo).

Ejemplo

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 \cdot 4 - 3 \cdot (-5) \cdot 1 =$$

$$= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) =$$

$$= 44 + 4 + 15 = 63$$

Regla De Sarrus :

Pierre Sarrus (1798, 1861) fue un matemático francés que estableció una regla para calcular determinantes de orden 3.

Los términos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los términos con signo − está formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) =$$

$$= 5 - 4 + 0 - 6 - 10 + 0 = -15$$

Menores y cofactores

Se llama menor complementario de un elemento aij al valor del determinante de orden n − I que se obtiene al suprimir en la matriz la fila i y la columna j.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \boxed{5} & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Se llama cofactor del elemento aij a su menor complementario anteponiendo:

El signo es + si i + j es par.

El signo es − si i + j es impar.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

El valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una fila (o una columna) por sus adjuntos correspondientes:

De tal manera que que si tomamos en cuenta el primer renglon y sus cofactores el Determinante de A sera:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}' - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Donde se multiplican los tres elementos del primer renglón por su respectivo cofactor, tomando en cuenta los signos.

3.8 Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz A y el de su traspuesta At son iguales.

|A|= |A

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad A^t = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = |A^t| = -2$$

2. Si Posee dos filas (o columnas) iguales, entonces

|A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si todos los elementos de una fila (o una columna) son nulos.

|A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si los elementos de una fila (o una columna) son combinación lineal de las otras.

|A| = 0

R1 + R2 = R3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

5. El determinante de una Matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

6. Si en un determinante se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), su valor sólo cambia de signo, si el total de cambios de renglones y/o columnas es par el signo queda

igual, pero si el total de cambios de renglones y/o columnas es impar entonces su valor solo cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

7. Si a los elementos de una fila (o una columna) se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Es decir, si una fila (o una columna) la transformamos en una combinación lineal de las demás, el valor del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16 \quad C_3 = 2C_1 + C_2 + C_3 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 16$$

8. Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila (o cualquier columna), pero sólo una.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 1 & 2 \\ 1\cdot 2 & 2 & 0 \\ 3\cdot 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

9. Si todos los elementos de una fila (o columna) están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes en los que las demás filas (o columnas) permanecen invariantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a+b & a+c & a+d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & a & a \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ b & c & d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

10. El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

3.9 Solución de la inversa de una matriz de 2x2, 3x3

a) Método de eliminación gaussiana

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos:

1.- Construir una matriz del tipo M = (A | I), es decir, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha. Consideremos una matriz 3x3 arbitraria:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ampliamos con la matriz identidad de orden 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2.- Utilizando el método Gauss vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}

R2 = R1(-1) +R2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R3 = R3 + R2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

R2 = R3(-1) +R2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

R1 = R1 + R2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

R2 = (−1)R2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

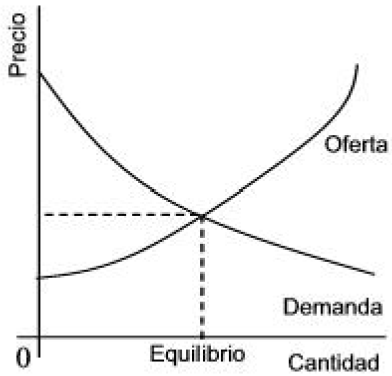
La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.10- Modelos de equilibrio para la determinación del precio de la oferta y la demanda.

En una situación normal, el mercado se encuentra equilibrado. Se oferta tanto como se demanda.

Es decir que todo lo que hay para vender se vende (nadie demanda más ni menos de ese determinado bien o servicio de lo que está ofertado en el mercado).

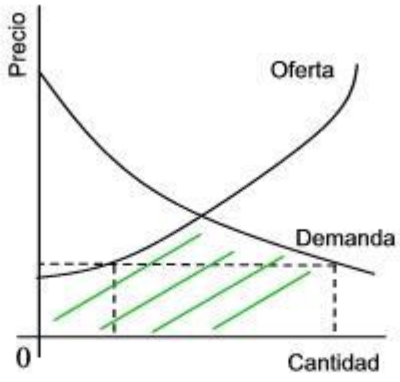


Exceso de demanda

Si por ejemplo bajase mucho el precio de un bien, aumentaría su demanda (más interesados sobre el mismo) y al mismo tiempo también descendería la cantidad ofrecida (sería menos rentable y por lo tanto habría menos interesados en ofrecerlo).

Se produce entonces un exceso de demanda, es decir muchos compradores interesados en comprar y al mismo tiempo un mercado que ofrecerá menos cantidad.

En ese caso no estará equilibrado hasta que se llegue a un nuevo punto de equilibrio del mercado.

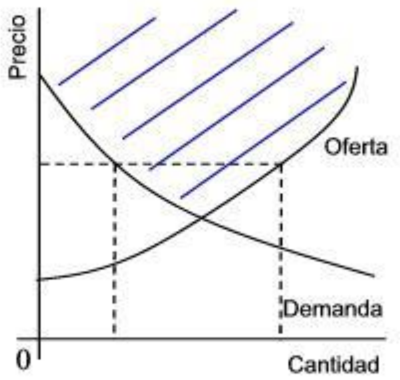


Exceso de oferta

Si el precio de un bien sube, nuevamente se deja el equilibrio. Habrá más vendedores interesados en vender (ya que la rentabilidad será mayor) pero al mismo tiempo menos compradores interesados en comprar (porque el precio es más alto).

Esta situación se conoce como exceso de oferta.

De la misma manera que en el caso anterior el mercado no estará equilibrado hasta llegar a un nuevo punto de equilibrio en el que se oferte tanto como se demanda.



3.11- Modelo para la determinación del punto de equilibrio de las ventas y los gastos.

La determinación del punto de equilibrio es uno de los elementos centrales en cualquier tipo de negocio pues nos permite determinar el nivel de ventas necesarias para cubrir los costes totales o, en otras palabras, el nivel de ingresos que cubre los costes fijos y los costes variables. Este punto de equilibrio (o de apalancamiento cero), es una herramienta estratégica clave a la hora de determinar la solvencia de un negocio y su nivel de rentabilidad. Parte de esta importancia la daremos a conocer en el Concepto de Economía de esta semana.

Para comenzar, definiremos algunos aspectos básicos. Por Coste Fijo, denotaremos todos aquellos costes que son independientes a la operación o marcha del negocio. Aquellos costes en los que se debe incurrir independientemente de que el negocio funcione, por ejemplo, alquileres, gastos fijos en agua, energía y telefonía; secretaria, vendedores, etc. Exista o no exista venta, hay siempre un coste asociado.

Por costes variables, denotaremos todo aquello que implica el funcionamiento vivo del negocio, por ejemplo, la mercadería o las materias primas. A diferencia de los costes fijos, los costes variables cambian en proporción directa con los volúmenes de producción y ventas. Para que el negocio tenga sentido, el precio de venta debe ser mayor que el precio de compra. Esta diferencia es lo que se conoce como margen de contribución.

Como muestra la gráfica, los costos fijos (CF) tienen un importe constante en el tiempo (línea horizontal) dado que los factores involucrados en este ítem se han fijado por contrato : arriendos, salarios, depreciaciones, amortizaciones, etc. El coste variable (CV), se incrementa de acuerdo a la actividad del negocio (parte desde el origen y tiene pendiente positiva). La suma de ambos costos (CF+ CV) corresponde a los Costos Totales (CT). Nótese que en el origen del diagrama cartesiano, tanto las ventas totales como los costos variables son iguales a cero. Sin embargo, para ese nivel de actividad igual a cero, tenemos la existencia de los Costos Fijos.

Es de interés hacer esta distinción porque una vez iniciada la operación del negocio comienza la carrera por cubrir los costes fijos primero (alquileres, salarios) y luego los costes variables (mercadería, materias primas). En la parte izquierda de la gráfica los costes totales son mayores a los ingresos totales, de ahí que la denominemos “área deficitaria” (color naranja). Cuando los ingresos alcanzan el punto en que se cubren todos los costes (fijos y variables) se dice que se está en el punto de equilibrio. Este punto también se conoce como punto de quiebre, dado que al cruzarlo abandonamos el área deficitaria y pasamos al área de beneficios (área verde). Para obtener el Punto de Equilibrio o punto de quiebre podemos emplear las siguientes fórmulas:

Determinación del Punto de equilibrio en Valor:

A

$$P.E. \equiv \frac{\text{Costos Fijos}}{1 - \dfrac{\text{Costos Variables}}{\text{Ventas Totales}}}$$

Determinación del Punto de Equilibrio en Volumen:

B

$$P.E. \equiv \frac{\text{Costos Fijos}}{\text{Ventas Totales - Costos Variables}}$$

www.elblogsalmon.com

En el primer caso, obtenemos el punto de equilibrio en Valor (eje vertical), mientras que en el segundo obtenemos el Punto de Equilibrio en Volumen de ventas. Nótese que esta segunda ecuación presenta en el denominador el Margen de Contribución (la diferencia entre el Precio de Venta y el Costo del producto). Esta segunda ecuación nos ofrece una forma sencilla de conocer el punto de equilibrio para toda empresa o negocio que aplica un margen de contribución estandarizado. Aquí la fórmula se reduce a PE=CF/Mg, donde Mg es el margen de contribución. Si el margen de contribución del producto es el 30% de su valor (se compra a 70 euros y se vende a 100 euros), y los costos fijos son de 5.000 euros, el punto de equilibrio se obtiene de esta sencilla manera: PE=5.000/0,3: es decir, cuando se alcanza la venta de 16.667 euros (o 167 unidades), se ha llegado al Punto de Equilibrio.

De acuerdo a este ejemplo, y a como consideremos la información, podemos calcular el punto de equilibrio en volumen de ventas, o el punto de equilibrio en términos de valor, o el punto de equilibrio para proyectos de largo plazo. Sin embargo, más allá de estas consideraciones, hay un aspecto que, como en toda actividad económica, tiene particular relevancia: el factor tiempo. Si en el eje de las absisas (Volumen de ventas) consideramos el factor Tiempo, podemos ver que la realidad de un negocio es muy diferente dependiendo del momento en que llegue al punto de equilibrio. En el caso del ejemplo, este punto se alcanza cuando se venden 167 unidades. El elemento que hay que tener en cuenta es ¿en qué momento se alcanza el punto de equilibrio?. Este dato nos permite conocer la solvencia del negocio: si el negocio alcanza el punto de equilibrio a mediados de mes (vendiendo, según el ejemplo, a razón de 12 unidades diarias), obtendrá utilidades bastante mayores que si lo alcanza en los últimos días del mes. Puede también darse el caso que termine el mes y que no alcance a cubrir plenamente los costos totales. En este caso, deberá recurrir al crédito para financiarse y no enfrentar dificultades de liquidez.

La determinación del punto de equilibrio permite comprobar la viabilidad del negocio. Si hay constancia en el ritmo de los ingresos también lo habrá en el rango o momento en que se alcanzará el punto de equilibrio (o "punto de quiebre"). Si la actividad económica se desestabiliza y se hace más volátil, también el punto de equilibrio tendrá volatilidad, desplazándose hacia fuera del rango habitual y provocando problemas de liquidez que obligarán a postergar o refinanciar los créditos o los pagos de materias primas. Todas estas señales de comportamiento son posibles de determinar con el análisis del punto de equilibrio.

Para terminar, el punto de equilibrio le permite conocer el nivel de beneficios. En el caso del ejemplo, una vez alcanzado el punto de equilibrio, no todo lo que se venda es utilidad neta. De cada nueva unidad vendida (desde la unidad número 168 en adelante, siguiendo con el ejemplo) la utilidad neta es solo el margen de contribución, el 30% que ya está determinado. Este margen de contribución se llama así porque contribuye al financiamiento de los costos fijos. Una vez cubiertos los costes fijos, este margen de contribución se convierte en utilidad neta. Es decir que si se venden 100 unidades adicionales al mes, la utilidad neta es de 3.000 euros.

3.12- Modelo para la determinación del punto de equilibrio de las ventas y los gastos

El punto de equilibrio es un indicador necesario para calcular no solo la eficiencia de las operaciones de una empresa, sino el volumen de ventas netas necesarias para que en un negocio no se gane ni se pierda.

Recordemos que el punto de equilibrio es considerado un indicador necesario para calcular no solo la eficiencia de las operaciones de una empresa, sino el volumen de ventas netas necesarias para que en un negocio no se gane ni se pierda. Con ello se puede fijar, por ejemplo, el margen de ganancia que tendrá el precio del producto o servicio ofrecido.

Gino administra Misouvenir.pe, un portal de ventas online de souvernirs tecnológicos que los oferta a S/ 50 cada uno. El manufacturar, promocionar, facturar (vía electrónica) y enviar por courier a los clientes estos souvenirs cuesta por unidad unos S/ 35 y durante el mes tiene costos fijos totales por (luz, Internet, agua, alquileres, sueldos de administrativos) gasta S/7,500. El mes pasado vendió 1,000 souvenirs con amplias expectativas de crecimiento. Calculemos el punto de equilibrio de la empresa de nuestro amigo.

- ☐ IT= Ingresos totales
- ☐ CT= Costos totales
- ☐ Pv = Precio de venta unitario
- ☐ Cv= Costo variable unitario
- ☐ CF= Costos fijos
- ☐ X = CF / Pv-Cv = Punto de Equilibrio

Para el caso de análisis

Costos Fijos	S/ 7,500
Costo variable unitario	S/ 35
Precio de venta unitario	S/ 50
Punto de equilibrio	500

Para ventas de 500 unidades al mes, la utilidad antes de intereses e impuestos debe ser igual a cero, si produce menos de 500 tiene 'pérdida operativa' y si produce y vende más de 500 unidades va a comenzar a obtener utilidades.

Nuestro amigo Gino reporta ventas de 1,000 souvenirs al mes, por lo que sus ingresos ascienden a S/ 50,000 (1,000 souvenir x S/ 50), pero sus costos totales ascienden a S/ 42,500 (S/ 35x1,000 + S/ 7,500), es decir obtendría una utilidad operativa antes de impuestos y pago de intereses de deudas de S/ 7,500.

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 50 = S/ 50,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x1,000 + S/ 7,500 = S/ 42,500

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 50,000 – S/ 42,500 = S/ 7,500

Llegó la competencia :Como el negocio es tan bueno, la competencia no tardó en llegar al segmento donde operaba tranquilamente Gino. Al mes siguiente apareció Turegalitotecnologico.pe, con una campaña muy agresiva y con un costo promedio de souvenirs de S/ 40 más el costo de envío y otras promociones. El impacto se sintió inmediatamente y las ventas de Gino con Misouvenir.pe bajaron a 750 unidades, es decir 25% menos y más de un cliente le advirtió inclusive que los diseños de la competencia eran má innovadores.

Gino inmediatamente hizo cuentas y determinó que sus ingresos en el mes se redujeron de S/ 50,000 a S/ 37,500 y si bien aún operaba por encima del punto de equilibrio y obtenía utilidades (S/ 3,750), estas se habían reducido en 50% (desde S/ 7,500). ¿Qué debía hacer?

Ingresos Totales = Pv(X) = 750 souvenir x S/ 50 = S/ 37,500

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x750 + S/ 7,500 = S/ 33,750

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 37,500 – S/ 33,750 = S/ 3,750

Lo primero que pensó Gino es equiparar sus precios con los de la competencia, reducirlos de S/ 50 a S/ 40 y con ello espera recuperar a su clientela pérdida, es decir lograr nuevamente 1,000 productos vendidos. Veamos cómo cambian sus ingresos, costos, utilidades y su punto de equilibrio.

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 40 = S/ 40,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x1,000 + S/ 7,500 = S/ 42,500

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 40,000 – S/ 42,500 = - S/ 2,500

Gino se da cuenta que aunque ha recuperado su clientela, ahora obtiene pérdidas (-S/ 2,500) Calculemos su nuevo punto de equilibrio.

Punto de equilibrio: X = CF / Pv-Cv

Costos Fijos	S/ 7,500
Costo variable unitario	S/ 35
Precio de venta unitario	S/ 40
Punto de equilibrio	1,500

El punto de equilibrio de Misouvenir.pe ha aumentado de 500 a 1,500 unidades. Es decir la empresa d Gino tendría que vender más de 1,500 unidades (500 más que su venta normal) para conseguir utilidad.

¿Qué hacer? A nuestro amigo le quedan entonces dos caminos inmediatos para no seguir perdiendo más ventas.

Bajar costos sin sacrificar calidad

Diferenciar totalmente su producto de la competencia para mantener el precio de S/ 50 y evitar que las ventas por lo menos no caigan más. Como se trata de souvenirs para regalo, la calidad del producto y el tiempo de envío no pueden sacrificarse. Si apuesta a una política de reducción de costos, debe apuntar a lo más duro de reducir, los costos fijos. Haciendo una rápida revisión de su flujo de caja y el detalle de sus facturas de servicios, ve con mucho esfuerzo puede reducir sus costos fijos en 15%, es decir de S/ 7,500 a S/ 6,375. Veamos cómo cambian sus utilidades para ventas proyectadas de 1,000 unidades, a un precio de venta de S/ 40 y el nuevo punto de equilibrio.

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 40 = S/ 40,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x1,000 + S/ 6,375 = S/ 41,375

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 40,000 – S/ 41,375 = - S/ 1,375

Aún seguiría reportando perdidas (-S/ 1,375). El nuevo punto de equilíbrio es: 1,275 unidades, 275 más de las que vendería normalmente.

3.13- Casos en que no se puede determinar o encontrar un punto de equilibrio

El punto de equilibrio

En términos de contabilidad de costos, es aquel punto de actividad (volumen de ventas) donde los ingresos totales son iguales a los costos totales, es decir, el punto de actividad donde no existe utilidad ni pérdida. Hallar el punto de equilibrio es hallar el número de unidades a vender, de modo que se cumpla con lo anterior (que las ventas sean iguales a los costos). Pasos para hallar el punto de equilibrio

Veamos a continuación los pasos necesarios para hallar y analizar nuestro punto de equilibrio:

1. Definir costos

En primer lugar debemos definir nuestros costos, lo usual es considerar como costos a todos los desembolsos, incluyendo los gastos de administración y de ventas, pero sin incluir los gastos financieros ni a los impuestos.

2. Clasificar los costos en Costos Variables (CV) y en Costos Fijos (CF)

Una vez que hemos determinados los costos que utilizaremos para hallar el punto de equilibrio, pasamos a clasificar o dividir éstos en Costos Variables y en Costos Fijos:

Costos Variables: Son los costos que varían de acuerdo con los cambios en los niveles de actividad, están relacionados con el número de unidades vendidas, volumen de producción o número de servicios realizado, por ejemplo, materia prima, combustible, salario por horas, etc.

Costos Fijos: Son costos que no están afectados por las variaciones en los niveles de actividad, por ejemplo, alquileres, depreciación, seguros, etc.

3. Hallar el costo variable unitario:

En tercer lugar, determinamos el Costo Variable Unitario (Cvu), el cual se obtiene al dividir los Costos Variables totales entre el número de unidades a producir (Q)

4. Aplicar la fórmula del punto de equilibrio

La fórmula para hallar el punto de equilibrio es:

(P x U) – (Cvu x U) – CF = 0

Dónde:

P: precio de venta unitario.
U: unidades del punto de equilibrio, es decir, unidades a vender de modo que los ingresos sean iguales a los costos.
Cvu: costo variable unitario.
CF: costos fijos.

El resultado de la fórmula será en unidades físicas, si queremos hallar el punto de equilibrio en unidades monetarias, simplemente multiplicamos el resultado por el precio de venta.

5. Comprobar resultados .Una vez hallado el punto de equilibrio, pasamos a comprobar el resultado a través del uso del Estado de Resultados.

6. **Analizar el punto de equilibrio**. Y, por último, una vez hallado el punto de equilibrio y comprobado a través del Estado de Resultados, pasamos a analizarlo, por ejemplo, para saber cuánto necesitamos vender para alcanzar el punto de equilibrio, cuánto debemos vender para lograr una determinada utilidad, cuál sería nuestra utilidad si vendiéramos una determinada cantidad de productos, etc

Ejemplo de cómo hallar el punto de equilibrio. Una empresa dedicada a la comercialización de camisas, vende camisas a un precio de US$ 40, el costo de cada camisa es de US$ 24, se paga una comisión de ventas por US$ 2, y sus gastos fijos (alquiler, salarios, servicios, etc.), ascienden a US$ 3.500. ¿Cuál es el punto de equilibrio en unidades de venta?

1. Hallando el punto de equilibrio:

P = 40 Cvu: 24 + 2 = 26

CF = 3500

Aplicando la fórmula:

(P x U) – (Cvu x U) – CF = 0
40X – 26X – 3500 = 0
14X = 3.500
Qe = 250 und.
Qe = US$ 10.000
Comprobando:
Ventas (P x Q): 40 x 250 = 10000
(-) C.V (Cvu x Q): 26 x 250 = 6500
(-) C.F 3500
Utilidad Neta US$ 0

Conclusiones: nuestro punto de equilibrio es de 250 unidades, es decir, necesitamos vender 250 camisas para que las ventas sean iguales a los costos; por tanto, a partir de la venta de 251 camisas, recién estaríamos empezando a obtener utilidades.

3.14- Criterios para aplicar un modelo de equilibrio adecuado

Toda empresa se desenvuelve entre dos mercados: de proveedores y de consumidores; se encarga de transformar insumos en productos, generando valor agregado que justifique la inversión realizada. La estructura de costos y gastos durante la operación de la empresa permite visualizar, en un mercado definido, el esfuerzo mínimo que es necesario desarrollar para cubrir dicho esfuerzo, de modo que toda producción adicional constituirá una ganancia monetaria. Dicho nivel mínimo es el punto de equilibrio, el cual depende del costo de los insumos y el precio de venta de los productos.

El efecto de la variación de los factores que determinan el punto de equilibrio no es uniforme, depende de la estructura de costos y gastos y del margen de contribución variable unitario, la sensibilidad del volumen de equilibrio facilita priorizar las decisiones que la empresa debe tomar en forma adecuada y oportuna.

La concepción de una empresa industrial puede simplificarse mediante un conjunto de actividades que permita transformar los insumos en productos. Los insumos son proporcionados a la empresa por los proveedores, según las condiciones de cantidad y precio del mercado. Los productos son colocaciones por la empresa en volumen y precio que fije el mercado, según las condiciones de la oferta y demanda del período analizado. La diferencia entre los ingresos por ventas y el costo de los insumos representa la utilidad del negocio. Este tipo de análisis es igualmente válido para una empresa de servicios.

El costo de los insumos se refleja en la estructura de los costos y gastos de la empresa, la cual a su vez depende de las condiciones del mercado, la tecnología y la gestión aplicada. Igualmente, los ingresos por ventas dependen de la mixtura de los productos que se comercializan y del precio de venta que se obtiene según las condiciones del mercado.

Si bien el objetivo básico de una empresa es maximizar las utilidades, existen situaciones en que el empresario debe adoptar decisiones que en el corto plazo impliquen trabajar con pérdidas, pero que permitirán la permanencia competitiva del negocio en el mediano y largo plazo.

En este contexto, lo que a continuación se desarrolla es un modelo que permite representar la situación económica mínima que permita a la empresa generar utilidades a una determinada fecha, y que a su vez permita simular diferentes escenarios de comportamiento futuro del negocio, lo cual facilita la toma de decisiones efectiva y eficiente.

Dicho instrumento de análisis se denomina "Modelo de Punto de Equilibrio", el cual es una aproximación, que se basa en premisas o supuestos, los mismos que en cada situación en particular se debe revisar.

La ventaja de este modelo es que permite predecir los resultados futuros del negocio en forma anticipada, lo cual es un soporte fundamental para la gestión de los negocios. El artículo se desarrolla acompañado de un ejemplo hipotético, con la finalidad de mostrar de manera objetiva los alcances de un instrumento de gestión útil en todo tipo de actividad empresarial, sea productora de bienes o de prestación de servicios.

Factores a considerar:

El análisis de un negocio utilizando el modelo de punto de equilibrio considera los siguientes factores: capacidad instalada, estructura de costos y gastos y precio de ventas. En este análisis, los costos y precios unitarios se llevan a cabo sin considerar el impuesto general a las ventas (IGV), toda vez que el impuesto pagado por la empresa al realizar las compras se recupera al concretarse la venta de la producción, proceso que se define como crédito fiscal. En el caso que la empresa no esté obligada a retener el IGV resultante de sus ventas, el IGV pagado en las compras se constituye en costo.

En esta última situación, debido a normas del comercio internacional, el Estado a sus empresas exportadora le devuelve el impuesto pagado, facilitando que las mismas sean competitivas en el exterior.

3.15-Repercusión de los costos en la obtención del punto de equilibrio

Según los datos de nuestro ejemplo, se puede observar que la utilidad del negocio depende del volumen de ventas que demande el mercado, pudiendo registrarse resultados positivos o negativos. A continuación, con los datos del ejemplo, se presenta una simulación de diferentes volúmenes de ventas, desde cero hasta la capacidad instalada: Se tiene que para volúmenes menores de producción, los resultados netos son desfavorables, por ejemplo para producción de 100 unidades anuales el margen de pérdida representa el 67% de las ventas del período; pero, para mayores volúmenes, dichos resultados son satisfactorios, tal es el caso de operar a plena capacidad, en que la utilidad del año equivale al 30% de las ventas. Para alcanzar una utilidad nula, de modo que los ingresos totales cubran la totalidad de los costos, la producción anual debe superar a 200 unidades y según, los valores simulados, ser menor de 400 unidades; pero más cerca al primero de ellos.

En la gráfica inferior, se puede apreciar la evolución de los ingresos totales y los costos totales para los diferentes volúmenes de producción anual.

Gráficamente, se puede observar que para una producción de 250 unidades anuales, la utilidad es nula y dicha cantidad de producción representa el volumen de equilibrio. Si esta cifra se relaciona con la capacidad instalada (750 unidades / año), se tiene que para cubrir la totalidad de costos la empresa debe operar al 33,3% de dicha capacidad. Si la empresa opera a un ritmo menor a la tercera parte de la capacidad instalada, se registran pérdidas; para obtener ganancias, debe operar por encima de dicho nivel.

Otro manera de determinar el volumen de equilibrio es a base del margen de contribución variable unitario (mcvu), el cual es la diferencia entre el precio de ventas (p) y el costo variable unitario (cvu); este margen, en nuestro ejemplo, es de 400 nuevos soles por cada unidad de producto terminado.

MCVU = P - CVU = 900 - 500 = 400 S/. / Unidad

Dicho margen, toda vez que está expresado sólo en términos variables, permite que la empresa cubralos costos fijos y genere ganancias, lo cual depende del volumen de producción. Para llegar al equilibrio, debe cubrir costos fijos (S/.100 000 al año), para lo cual se tendría la siguiente relación:

1 unidad	________	S/. 400
Xo unidades	________	S/.100 000

De donde, se obtiene que Xo es igual a 100 000 / 400 = 250 unidades anuales, que es el valor del volumen de equilibrio.

Otra manera de expresar la condición de equilibrio (utilidad igual a cero), es que los ingresos totales:

p (X), sean iguales al costo total: CF + cvu (X); de donde:

el cálculo del punto de equilibrio es uno de los métodos más importantes para un buen control financiero de cualquier negocio. Con él es posible entender la cantidad de ventas que necesitan ser realizadas para que los ingresos igualen los costos y gastos, resultando en beneficio cero.

Sin embargo, existen 3 variaciones del cálculo de punto de equilibrio que puede ser importante conocer. Vea abajo:

- ☐ Punto de equilibrio contable
- ☐ Punto de equilibrio financiero
- ☐ Punto de Equilibrio Económico

Para calcular estos 3 métodos, puede tomar en cuenta sus datos contables o gerenciales, de acuerdo con su realidad y disponibilidad de información.

Antes de entrar en las diferencias de cada uno, vale la pena recordar el concepto de margen de contribución, esencial para el cálculo de esas 3 variaciones punto de equilibrio, que es el precio de venta unitario menos los costes directos para la producción de un producto o la prestación de un servicio.

Vamos a ver las características de cada uno ahora:

Punto de equilibrio contable

Este es el método más utilizado y muestra para usted la cantidad de ventas necesarias para que su beneficio sea cero.

- ☐ Lucro = Cero
- ☐ Fórmula: PEC = Gastos fijos / márgenes de contribución
- ☐ Vantagem: Tenga en cuenta sus estados financieros para mostrarle exactamente cuánto necesita vender para obtener un beneficio cero. Es decir, cualquier cantidad por debajo de ese valor deberá ser inaceptable para su negocio, ya que resultará en perjuicio.

Punto de equilibrio financiero o de caja

También es conocido como punto de equilibrio de caja por algunos autores y no toma en consideración la depreciación y la amortización, factores que disminuyen el beneficio contable, pero que de manera gerencial no representan la salida de caja de su negocio.

- ☐ Lucro = Cero - Depreciación
- ☐ Fórmula: PEF = (Gastos fijos - Gastos no desembolsables) / Margen de contribución
- ☐ Vantagem: El cálculo no tiene en cuenta gastos que no van a salir de su caja,

mostrándole exactamente cuánto usted necesita vender para quedarse con el beneficio cero. El único problema de este enfoque es que no te prepara para momentos de cambio de máquinas o equipos que necesitará ser cambiados en el futuro.

Punto de Equilibrio Económico

En este caso, la empresa determina una ganancia mínima deseada para incrustarse en el cálculo, representando una remuneración al capital invertido en ella. En la práctica, ese cálculo siempre debería ser utilizado en conjunto con el punto de equilibrio contable, ya que existen siempre dos parámetros de análisis financiero, como vender para no tener perjuicio y cuánto vender para lucrar lo deseado.

- ☐ Lucro = Cero + Remuneración del Capital Propio
- ☐ Fórmula: PEE = (gastos fijos + beneficio deseado) / Margen de contribución
- ☐ Vantagem: El cálculo ya tiene en cuenta cuánto quiere de lucro, ayudándole a entender la cantidad de productos o servicios que necesitan ser vendidos para que usted tenga retorno.

UNIDAD IV

OPERACIONES DE MATRICES Y APLICACIONES

4.1 Adición y sustracción de matrices

Suma.

Dadas dos matrices del mismo orden, A y B, se define su suma como otra matriz, C, del mismo orden que las matrices sumando cuyos elementos se obtienen sumando a cada elemento de la primera matriz,

A, el correspondiente elemento de la segunda matriz sumando, B:

$$A = [a_{ij}]_{mxn};\ B = [b_{ij}]_{mxn} \Rightarrow C = A + B = [c_{ij}]_{mxn}$$

$$\text{con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 & 3+(-1) & 0+0 \\ -1+0 & (2/3)+(1/3) & 3+5 \\ 0+2 & 3+3 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

La resta de dos matrices del mismo orden A y B, se define como la suma de A más la matriz opuesta de B, por lo que resultará ser otra matriz del mismo orden, D, cuyos elementos se obtienen de restar a cada elemento de la primera matriz A (minuendo) el elemento correspondiente de la matriz que resta, B (sustraendo). A

$$A = [a_{ij}]_{mxn};\ B = [b_{ij}]_{mxn} \Rightarrow D = A - B = [d_{ij}]_{mxn}$$

$$\text{con } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 & 3-(-1) & 0-0 \\ -1-0 & (2/3)-(1/3) & 3-5 \\ 0-2 & 3-3 & 4-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1/3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.2 Producto de matrices

Dada una matriz A = [aij]mxn y número real α∈R, se define el producto de un número por esa matriz como otra matriz B del mismo orden cuyos elementos se obtienen de multiplicar cada uno de los elementos de A por el número α:

$$\alpha \cdot A = B = [b_{ij}]_{mxn}$$

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i = 1,2,\ldots,m; \forall j = 1,2,\ldots,m$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ \alpha = -2$$

$$\alpha \cdot A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 7 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 0 \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot(2/3) & (-2)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -6 & 0 \\ 2 & -4/3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Para poder multiplicar dos matrices A y B, (B A ·), el número de columnas de la matriz que Multiplica en primer lugar, A, debe ser igual al número de filas de la matriz que multiplica en segundo lugar, B. Así pues, dadas dos matrices Amxn, Bnxp, el resultado de multiplicar A por B, B A · , es otra matriz C = B A · , con tantas filas como la matriz que multiplica en primer lugar y tantas columnas como la matriz que aparece en el producto en segundo lugar, Cmxp. Los elementos de la matriz C se obtienen de multiplicar las filas de la primera matriz por las columnas de la segunda matriz. Ese producto consiste en multiplicar un elemento de la fila por el correspondiente de la columna y sumar el resultado al resto de productos de elementos de esa fila por esa columna.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, p$$

Este producto de vectores fila por vectores columna se ilustra con el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} ; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{13} \\ b_{23} \end{matrix}} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

4.3 Transpuesta de una matriz

A partir de conocer las operaciones básicas con matrices y el concepto de matriz traspuesta, está demostrado lo siguiente:

1.- La matriz traspuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de las matrices traspuestas de las matrices sumando:

(A + B)’ = (A’ + B’)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 3+0 \\ 0+2 & 1-1 \\ 1+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0+2 & 1+0 \\ 3+0 & 1-1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.4.- Matrices particionadas

Este capítulo consta de tres secciones. Las dos primeras versan sobre matrices particionadas. La tercera sección trata sobre la traza de una matriz. En este capítulo se consignarán los principales resultados sobre la traza de una matriz. Existen razones para querer particional una matriz A, algunas de ellas son:

(i) La partición puede simplificar la escritura de A. (ii) La partición puede exhibir detalles particulares e interesantes de A. (iii) La partición puede permitir simplificar cálculos que involucran la matriz A.

A veces es necesario considerar matrices que resultan de eliminar algunas filas y/o columnas de alguna matriz dada, como se hizo por ejemplo, al definir el menor correspondiente al elemento aij de una matriz A = [aij] m×n (véase el apartado 1.1.3 del capítulo 1). 2.1. Definición. Sea A una matriz. Una submatriz de A es una matriz que se puede obtener al suprimir algunas filas y/o columnas de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (suprimiendo en A la fila 2 y la columna 3)

$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (suprimiendo en A la fila 3)

$S_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ (suprimiendo en A la fila 3 y las columnas 1 y 4). □

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; mediante un sistema de rectas horizontales o verticales se puede "particionarla" en submatrices de A (Matriz particionada), como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right]$$

4.5.- Determinantes de una matriz

Cada matriz cuadrada A tiene asociado un número real llamado determinante de A, que representaremos por |A| o det A. No vamos a dar una definición explicita de determinante, sino que en su lugar daremos criterios para calcularlos en la práctica

Matrices 1 × 1 Simplemente, $|a| = a$. Por ejemplo, $|-5| = -5$.

Matrices 2 × 2 La fórmula es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Matrices 3 × 3 La fórmula para calcular determinantes 3 × 3 se conoce como *regla de Sarrus:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

4.6.- Inversa de una matriz

Para algunas matrices se puede identificar otra matriz denominada matriz inversa multiplicativa, o más simplemente, la inversa. La relación entre una matriz A y su inversa (representada por A1) es que el producto de A y A1, en cualquier orden, da como resultado la matriz identidad, es decir:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

La inversa es similar al recíproco en el álgebra de los números reales. Multiplicar una cantidad b por su recíproco 1/b da como resultado un producto igual a 1. En el álgebra matricial, multiplicar una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad.

Observaciones importantes acerca de la inversa

I Para que una matriz A tenga una inversa, ésta debe ser cuadrada.

II La inversa de A también será cuadrada y tendrá la misma dimensión que A.

III No todas las matrices cuadradas tienen una inversa.

Una matriz cuadrada tendrá una inversa siempre y cuando todas las filas o columnas sean linealmente independientes; es decir, ninguna fila (o columna) es una combinación lineal (múltiplo) de las filas (o columnas) restantes. Si cualquiera de las filas (o columnas) es linealmente dependiente [son combinaciones lineales (múltiplos) de otras filas (columnas)], la matriz no tendrá una inversa. Si una matriz tiene una inversa, se dice que es una matriz no singular. Si una matriz no tiene una inversa, se dice que es una matriz singular.

4.7 Aplicaciones de matrices

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Para administración y finanzas es necesario si se conoce que para las ventas hay que llegar a un punto de equilibrio dado por la suma de utilidad - costos de producción, a groso modo. Además, si de los costos de producción se conoce que es igual a la suma de los gastos operacionales y los gastos no operacionales.

De los cuales se derivan muchas variables, por tanto, usando las matrices se puede calcular el valor de cada variable en el sistema de ecuaciones simultáneas que se requiera por más complejo que este sea y aplicadas en todos los ámbitos que sean necesarios.

Describir movimientos hasta ubicar puntos en espacios tridimensionales. Los sistemas de ecuaciones lineales por lo general representan líneas rectas en un sistema de coordenadas, son miles las aplicaciones que le puedes dar a la ingeniería aunque sin duda las telecomunicaciones, la ingeniería civil, dependen más de las representaciones cartesianas, pero además es sumamente importante la aplicación que se presenta en el área de la Economía, la Administración. En Ingeniería Eléctrica: Una aplicación puede ser el uso de matrices en la resolución de redes resistivas redes resistivas, capacitivas e (incluso capacitivas. También puedes usar las matrices en la teoría de Redes de Dos puertos (CUADRIPOLOS)

Ejemplo:

El precio para los productos A, B, C y D por unidad son los siguientes: \$3.80, \$4.90, \$6.50 y \$10.80; y las cantidades que se adquieren de cada producto son: A = 500, B = 600, C = 850 y D = 720. Determina el costo de las adquisiciones.

Solución aplicando matrices.

$$P_{1x4} = [3.80, \quad 4.90 \quad 6.50 \quad 10.80] \quad C_{4x1} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 850 \\ 720 \end{bmatrix}$$

Se cumple la condición de que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz y que la dimensión obtenida del producto de las matrices P y C = R, es de 1x1y se obtiene tomando en cuenta el número de renglones de la primera matriz por el número de columnas de la segunda matriz.

En donde:

R = [(3.80)(500) + (4.90)(600) +(6.50)(850) + (10.80)(720)] = 18141

$$(P_{1x4})(C_{4x1}) = R_{1x1}$$

Por lo tanto el costo total es de **$18,141**

Ejemplo:

Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0'04	0'08	0'12
Color F	0'03	0'05	0'08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

Nos piden que organicemos la información anterior en dos matrices de tamaño concreto. "si nos fijamos en las tablas, es sencillo obtener las matrices:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\text{ ud} & 5\text{ ud} & 10\text{ ud} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{N} \\ \text{F} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{N} & \text{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'04 & 0'03 \\ 0'08 & 0'05 \\ 0'12 & 0'08 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2\text{ ud} \\ 5\text{ ud} \\ 10\text{ ud} \end{array}$$

Otras matrices son las llamadas matrices de relación, que indican si ciertos elementos están o no relacionados entre sí. En general, la existencia de relación se expresa con un1 en la matriz y la ausencia de dicha relación de expresa con un 0.

Estas matrices se utilizan cuando queremos trasladar la información dada por un grafoy expresarla numéricamente.

En Matemáticas, un grafo es una colección cualquiera de puntos conectados por líneas. Existen muchos tipos de grafos. Entre ellos, podemos destacar:

- Grafo simple: Es el grafo que no contiene ciclos, es decir, líneas que unan un punto consigo mismo, ni líneas paralelas, es decir, líneas que conectan el mismo par de puntos.
- Grafo dirigido: Es el grafo que indica un sentido de recorrido de cada linea, mediante una flecha.

Construcción de una matriz a partir de un grafo

1. Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.
2. Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz. Si tal arista es un bucle y el grafo es no dirigido, entonces se suma 2 en vez de 1.

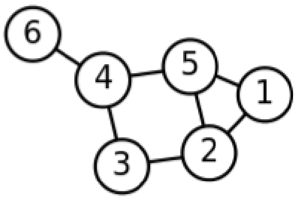
Finalmente, se obtiene una matriz que representa el número de aristas (relaciones) entre cada par de nodos (elementos). Existe una matriz de adyacencia única para cada grafo (sin considerar las permutaciones de filas o columnas), y viceversa.

Ejemplo

La siguiente tabla muestra dos grafos y su respectiva matriz de adyacencia. Note que en el primer caso, como se trata de un grafo no dirigido, la matriz obtenida es simétrica:

Estos tipos de gafo puede verse e la figuras:

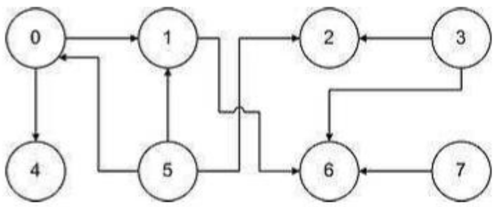
Grafo no dirigido



Matriz de adyacencia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo dirigido



4.8 Límite de las funciones

El límite de una función en un punto es único. (Se puede decir lo mismo diciendo: Una función no puede tener dos límites diferentes en un mismo punto).

Sean f y g dos funciones. Si el límite de la función f, en el punto x = a, es l, y el límite de la función g, en el punto x = a, es m, entonces el límite de la función f + g, en el punto x= a, es l + m. (Esto se expresa de manera rápida diciendo: El límite de la suma es igual a la suma de los límites).

Lim (f(x) + g(x)) = lim f(x) + lim g(x)

Sean f y g dos funciones. Si el límite de la función f, en el punto x = a, es l, y el límite de la función g, en el punto x = a, es m, entonces el límite de la función f * g, en el punto x = a, es l * m. (Esto se expresa de manera rápida diciendo:

El límite del producto es igual al producto de los límites).

Lim (f(x).g(x)) = lim f(x) . Lim g(x)

Sean f y g dos funciones. Si el límite de la función f, en el punto x = a, es l, y el límite de la función g, en el punto x = a, es m (distinto de cero), entonces el límite de la función f / g, en el punto x = a, es l / m.

(Esto se expresa de manera rápida diciendo.

El límite del cociente es igual al cociente de los límites).

Lim (f(x)/g(x)) = Lim f(x) / Lim g(x)

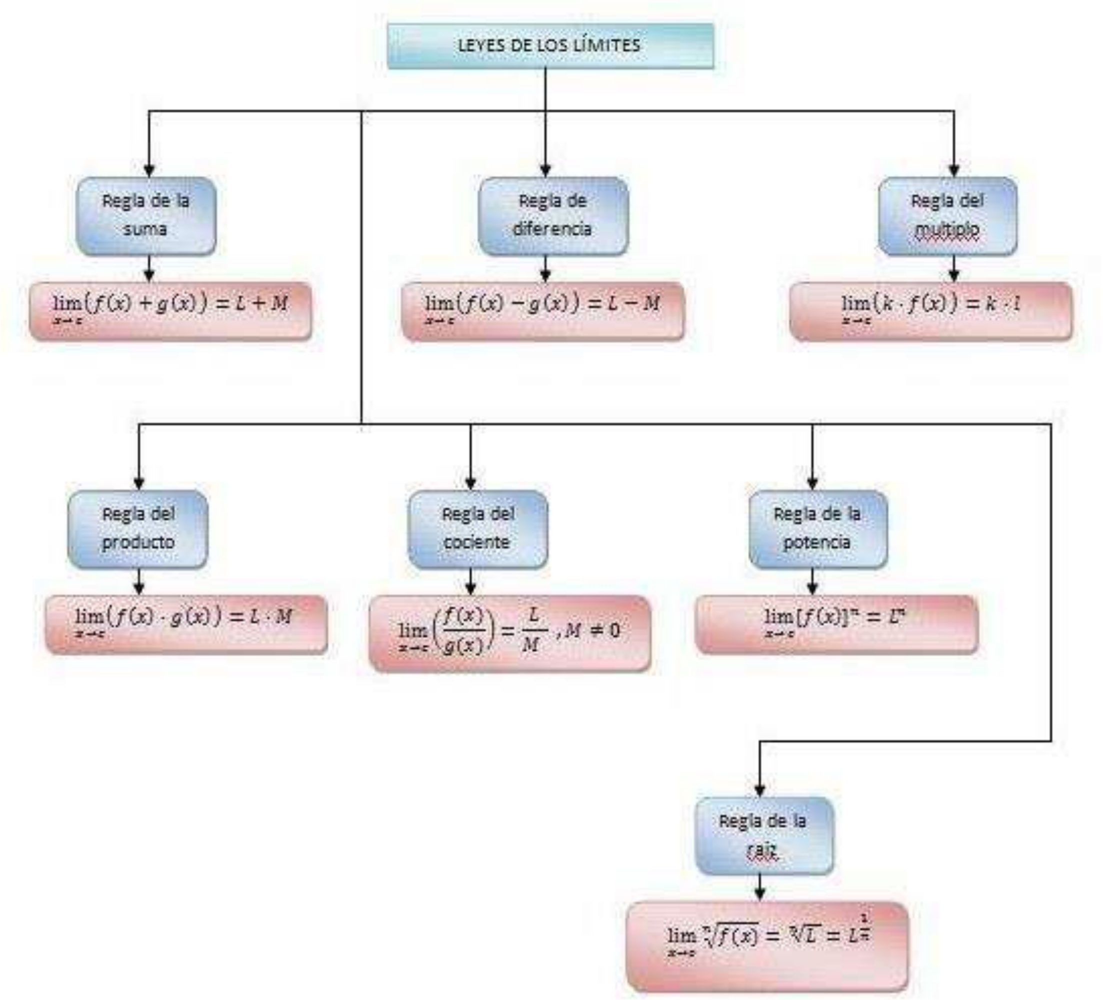
Sean f y g dos funciones. Si el límite de la función f, en el punto x = a, es l, y el límite de la función g, en el punto x = a, es m, entonces el límite de la función f(g) , en el punto x = a, es l*m

Lim (f(x).g(x)) = Lim (f(x). Lim g(x)

Sean f y g dos funciones. Si el límite de la función f, en el punto x = a, es l, y el límite dela función g, en el punto x = a, es m, entonces el límite de la función f(g(x)).

(suponiendo que tenga sentido) en el punto x = a, es l.

4.9 Propiedades de los límites.



Límite de una variable.

La noción de una variable que se aproxima a un límite se encuentra, en la geometría elemental, el establecer o deducir la fórmula que le da el área al círculo. Se considera el área de un polígono regular inscrito con un numero n cualquiera de lados, y se supone, después, que n crece infinitamente. El área variable tiende así hacia un límite este límite se define como el area del círculo. En este caso, las variables v (área) aumenta indefinidamente, y la diferencia a – v siendo a el área del circulo) va disminuyendo hasta que, finalmente, llega a ser menor que cualquier numero positivo escogido de antemano, sin importar lo pequeño que este se haya elegido.

El concepto de límite se precisa mediante la siguiente definición: Se dice que la variable v tiende a la constante "l" como límite, cuando los valores sucesivos de v

Son tales que el valor numérico de la diferencia v-l puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier numero positivo predeterminado tan pequeño como se quiera , La relación así definida se escribe, Por conveniencia, nos serviremos de la notación , que se leera v tiende hacia el límite l o, más brevemente, v tiende a l

$$2 + 1\,, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}, \ldots . 2 + 1/2^{n}$$

Es evidentemente que u $\rightarrow$ 2 al crecer "n" es decir, lim u=2 "

Si sobre una línea recta, se señalaba el punto "L" que corresponde al limite "l" y se coloca a ambos lados de "L" la logitud de ε , sin importar lo pequeño que este sea, entonces se observará que los puntos determinados por "v" caerán todos, finalmente, dentro del segmento que corresponde al intervalo

Consideremos algunos ejemplos

$$_{x \to 2}(x^2 + 4x) = 12$$

1.- Demostrar que el

Demostración : La función dada es la suma de x2 y 4x, En primer lugar hallaremos los límites de estas dos funciones.

$\lim_{x\to 2}(x^2) = 4\ puesto\ que\ x.x = x^2$

$\lim_{x\to 2}(4x) = 4\lim_{x\to 2}(x) = 8$

Entonces el límite buscado es igual a 4+8 = 12

$$\lim_{z\to 2}\frac{z^2-9}{z+2} = -\frac{5}{4}$$

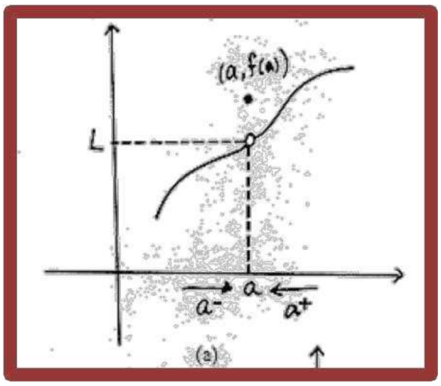
4.10 Continuidad, tasa de cambio

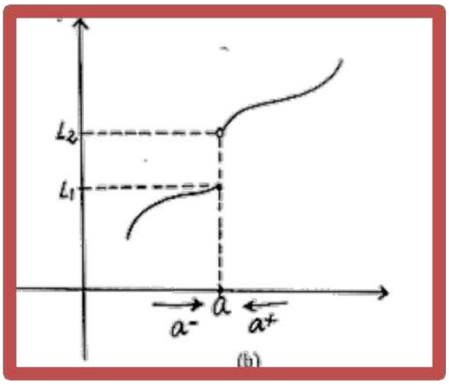
Continuidad

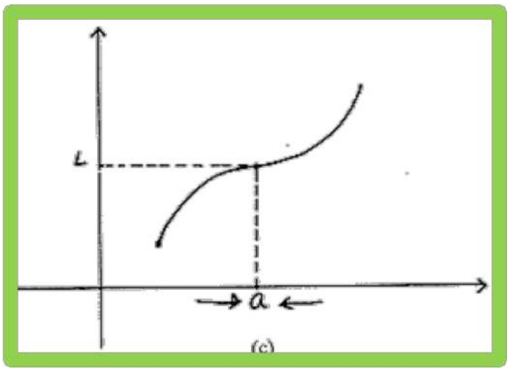
Intuitivamente se puede decir que una función es continua cuando en su gráfica no aparecen saltos o cuando el trazo de la gráfica no tiene "huecos". En las siguientes gráficas de tres funciones: dos de ellas no continuas (discontinuas) en el punto x = a de su dominio fig. (a) y (b) y la otra fig. (c) continúa en todo su dominio

Intuitivamente, la comunidad significa que un pequeño cambio en la variable ´´x´´ implica solo un pequeño cambio en el valor de f(x), es decir, la gráfica consiste en un solo trozo de la curva

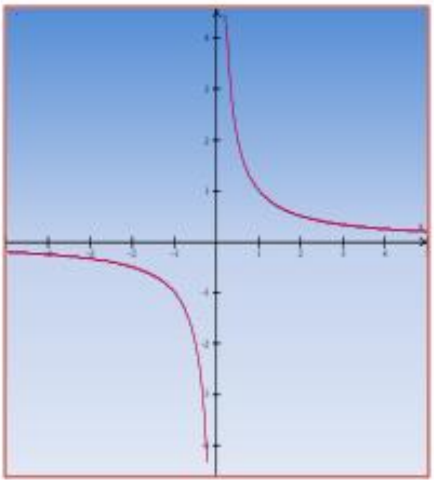
La continuidad de la función   para un valor que significa que f(x) difiere arbitrariamente poco del valor de   cuando está suficientemente cerca   de a:







Consideremos ahora la función 1/X:



Esta ecuación da un valor de y para cada valor de x, con excepción de x = 0; ¿Por qué?, si se fijan en la gráfica en el eje de las y en donde x = 0, nunca va a haber ningún valor y eso lo comprobamos en la función, en donde vemos que el denominador nunca va a tomar el valor de cero por que nos daría una indeterminación.

La grafica es una hipérbola equilátera, si x aumenta continuamente en cualquier intervalo (a, b) que no incluya x = 0, entonces y decrecerá continuamente desde 1/a, hasta 1/b y el punto P (x, y), describirá la curva entre los puntos correspondientes (a,1/a), (b, 1/b).

Infinito (∞)

Si el valor numérico de una variable v llega a ser y permanece mayor que cualquier número positivo asignado de antemano, por grande que éste sea, decimos que v se vuelve infinita. Si v toma solamente valores positivos, se hace infinita positivamente;

Si solamente toma valores negativos, se hace infinita negativamente La notación que se emplea para los tres casos es:

$$\lim v = \infty, \qquad \lim v = +\infty, \qquad \lim v = -\infty,$$

$$\lim_{v \to 0} \frac{c}{v} = \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{c}{0} = \infty$$

$$\lim_{v \to \infty} cv = \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \infty = \infty$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{v}{c} = \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\infty}{c} = \infty$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{c}{v} = \infty \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{c}{\infty} = 0$$

Estos límites particulares son útiles para hallar el límite del cociente de dos polinomios cuando la variable se hace infinita.

Ejemplo_

Demostrar que el $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x^2+4}{-7x^3-x^2+5x} = -\frac{2}{7}$

Primero dividir numerador y denominador entre x3 porque es la mayor potencia que entra en la fracción. Entonces tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x^2+4}{-7x^3-x^2+5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}{-7-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

El límite de cada término que contiene a x. tanto en el numerador como en el denominador del segundo miembro. Es cero. Por consiguiente.

En cualquier caso, análogo se procede, por lo tanto, como sigue: Se dividen numerador y denominador por la mayor potencia de la variable que entre en la fracción.

4.11 Derivadas algebraicas con fórmulas

Entiéndase la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado, lo anterior implica que la función debe existir en ese punto para poder trazar una recta tangente en él.

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada. Símbolos para representar las derivadas

$1.-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad 2.-\frac{dy}{dx}$ $\quad 3.-f'(x)$ $\quad 4.-D_x$

La regla general para derivación, es fundamental, puesto que se deduce directamente de la definición de derivada, y es muy importante que el lector se familiarice completamente con ella. Sin embargo, el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas es largo o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla general, a fin de facilitar la tarea, reglas especiales para derivar ciertas formas normales que se presentan con frecuencia.

Es cómodo expresar estas reglas especiales por medio de fórmulas, de las cuales se da a continuación una lista. El lector no sólo debe aprender de memoria cada fórmula cuando se ha deducido, sino también poder enunciar en palabras la regla correspondiente.

En estas fórmulas u, v, w representan funciones derivables de x.

Formulario de derivadas básicas

1.- $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2.- $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3.- $\frac{d}{dx}(cx) = c$

4.- $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$

5.- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

6.- $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

7.- $\frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

8.- $\frac{d}{dx}(u/v) = \left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)/v^2$

Exponenciales y logarítmicas

9.- $\frac{d}{dx}(Lnv) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$

10.- $\frac{d}{dx}(Logv) = Log(e)\frac{\frac{dv}{dx}}{x}$

11.- $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v\frac{dv}{dx}$

12.- $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v\,Lna\,\frac{dv}{dx}$

Trigonométricas

13.- $\frac{d}{dx}(sen\ v) = cos\ v\ \frac{dv}{dx}$

14.- $\frac{d}{dx}(cos\ v) = -sen\ v\ \frac{dv}{dx}$

15.- $\frac{d}{dx}(Tan\ v) = sec^2\ v\ \frac{dv}{dx}$

16.- $\frac{d}{dx}(cot\ v) = -csc^2\ v\ \frac{dv}{dx}$

17.- $\frac{d}{dx}(sec\ v) = sec\ v\ tan\ v\ \frac{dv}{dx}$

18.- $\frac{d}{dx}(csc\ v) = -csc\ v\ cot\ v\ \frac{dv}{dx}$

Propiedades de los logaritmos

1.- $Ln(AB) = LnA + LnB$
2.- $Ln(A/B) = LnA - LnB$
3.- $Ln\ (A^n) = nLnA$

Bibliografía básica y complementaria:

- Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales, Frank, S, Budnik. Editorial Mc- Graw-Hill

- Matemáticas Aplicadas a la Administración, Autor: Juan Ramon Chaparro Meraz (MAYO DEL 2012).

- Matemáticas para Administración y Economia, Autor: Richard S. Paul Emest F. (Editorial Pearson)

- Matematicalia: Revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española, 3(2). Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla recerca in Matematica Educativa: un programma emergente. La matemática e la sua didattica, 3, 258 – 270.