UDS

ANTOLOGÍA

ESTÁTICA PARA LA ARQUITECTURA

ARQUITECTURA

3ER. CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Estática para la Arquitectura

Objetivo de la materia:

Conocer e identificar los materiales para la ejecución de cada una de las etapas que integran la construcción.

Analizar y calcular los comportamientos de los elementos de una armadura (métodos de nudos y de secciones), además de cables y sus esfuerzos.

INDICE

UNIDAD I 9
Estática 9
1.1 Conceptos, definiciones y leyes. 9
1.2 Fuerza y actividades de comprensión. 12
1.3 Momento. 17
1.4 Ejercicios de comprensión (momento). 19
1.5 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos. 20
1.6 Ejercicios de comprensión complejos (momento). 21
1.7 Condiciones y equilibrio en sistemas de fuerzas. 22
1.8 Resultantes de sistema de fuerzas concurrentes. 26
1.9 Ejercicios de comprensión (fuerzas concurrentes). 30
1.10 Ejercicios de comprensión complejos (fuerzas concurrentes). 32
1.11 Estructuras. 34
1.12 Armaduras planas y especiales. 36
UNIDAD II 40
CENTROS DE GRAVEDAD 40
2.1 Centro de gravedad y centro de masa. 40
2.2 Ejercicios de comprensión (centro de gravedad y centro de masa). 42
2.3 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos. 43
2.4 Ejercicios de compresión Complejos (centro de gravedad y centro de masa). 44
2.5 Centroides de líneas. 46
2.6 Ejercicios de comprensión (centroides de líneas). 47
2.7 Superficies, volúmenes y actividades de comprensión. 49
2.8 Figuras y cuerpos compuestos. 53
2.9 Ejercicios de compresión (Figuras y cuerpos compuestos). 54
2.10 Rozamiento. 55
2.11 Ejercicios de compresión (Rozamiento). 58
UNIDAD III 60
TRABAJO VIRTUAL 60
3.1 Introducción y conceptos. 60
3.2 Equilibrio de un cuerpo rígido. 62
3.3 Ejercicios de comprensión (Equilibrio de un cuerpo rígido). 64
3.4 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos. 65

3.5 Ejercicios de comprensión complejos (Equilibrio de un cuerpo rígido). 67
3.6 Sistemas con rozamiento. 69
3.7 Ejercicios de comprensión (Sistemas con rozamiento)..71
3.8 Estabilidad del equilibrio..73
3.9 Ejercicios de comprensión (estabilidad del equilibrio). 75
3.10 Centro de gravedad (aplicación digital)...77
3.11 Ejercicios de comprensión (aplicación digital). 77
3.12 Superficies y volúmenes (aplicación digital). 81
3.13 Ejercicios de comprensión (aplicación digital). 81
3.14 Figuras y cuerpos compuestos (aplicación digital). 83
3.15 Ejercicios de comprensión (aplicación digital). 83
UNIDAD IV...87
MOMENTOS DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE 87
4.1 Conceptos y definiciones. 87
4.2 Momento de inercia en superficies. 89
4.3 Ejercicios de comprensión (momento de inercia en superficies). 90
4.4 Momento de inercia en superficies compuestas. 92
4.5 Ejercicios de comprensión (momento de inercia en superficies compuestas)......93
4.6 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos. 95
4.7 Ejercicios de comprensión complejos (momento de inercia en superficies compuestas). 97
4.8 Momento de inercia en perfiles metálicos (IMCA). 99
4.9 Ejercicios de compresión (IMCA).. 102
4.10 Producto escalar. 105
4.11 Producto vectorial.. 107

UNIDAD I

Estática

Objetivo de la unidad

Conocer los conceptos básicos relacionados con la Estática en elementos estructurales y realizar los procedimientos para el cálculo de equilibrio y reacciones en elementos sometidos a fuerzas.

En arquitectura los conocimientos que tienen mayor importancia son los que se refieren a las estructuras, se puede considerar que una estructura es un sistema, y se entiende como sistema a un conjunto de partes ordenadas, para cumplir una función determinada.

La estática interviene en la estabilidad de las construcciones, y tiene como objetivo importante el de establecer el equilibrio de las fuerzas tanto externas como internas.

1.1 Conceptos, definiciones y leyes.

Estática: es la rama de la mecánica que estudia las fuerzas en equilibrio que actúan sobre los cuerpos rígidos. Contrariamente a la dinámica, la estática considera a los cuerpos sin movimiento, y sometidos a la acción de varias fuerzas que están en equilibrio.

Las ecuaciones que determinan el equilibrio en la estática, se relacionan con las fuerzas y los momentos. Para lograr el equilibrio de las fuerzas se consideran:

La suma de fuerzas con respecto al eje X = 0
La suma de fuerzas con respecto al eje Y = 0
La suma de momentos de las fuerzas = 0

La física: es la ciencia que estudia la materia y la energía. La física se puede subdividir en las siguientes ramas:

- Física
  - Óptica
  - Electricidad
  - Acústica
  - Hidráulica
  - Física del calor
  - Física atómica
  - Mécanica
    - Estática
    - Cinemática
    - Dinámica
    - Resistencia de los materiales

Mecánica: Estudia las leyes que rigen el movimiento y el equilibrio de los cuerpos, se subdivide en: estática, cinemática, dinámica, resistencia de los materiales.

Estática de los cuerpos rígidos: Estudia el equilibrio de las fuerzas externas en los cuerpos, sin considerar los efectos internos que las fuerzas producen.

Cinemática: La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, sin atender a las causas que lo produce.

La dinámica: Es la parte de la física que estudia la relación existente entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y los efectos que se producirán sobre el movimiento de ese cuerpo.

Fuerza: Es la acción mutua de un cuerpo sobre otro, ya sea por contacto o a distancia.

Cuerpo: Es una porción de materia cuya principal característica es su masa y ésta, a su vez, se definirá como la capacidad que posee cada cuerpo de oponerse a modificar su estado de movimiento al ser solicitado por una fuerza.

Movimiento: Por experiencia cotidiana se sabe que un cuerpo se encuentra en movimiento si después de hallarse en un lugar posteriormente ocupa otro, o sea que recorre cierta distancia val hacerlo tarda determinado tiempo.

Principios y leyes.

Como la Mecánica es la ciencia encargada del estudio del movimiento de los cuerpos es muy conveniente dividirla atendiendo exclusivamente a sus diversos estados fácticos y a sus Idealizaciones.

Leyes de Newton del movimiento

Primera Ley o Ley de Inercia

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme y en línea recta, salvo en cuanto mude su estado obligado por fuerzas exteriores. (Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que otros cuerpos actúen sobre él).

Segunda ley o Principio Fundamental de la Dinámica

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz imprimida y se efectúa según la línea recta en dirección de la cual se imprime dicha fuerza. (La fuerza que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a su aceleración).

Tercera ley o Principio de acción-reacción

A toda acción se opone siempre una reacción contraria e igual; es decir las acciones entre dos cuerpos son siempre iguales entre sí y dirigidas en sentido contrario. (Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce sobre el primero una fuerza igual y de sentido opuesto).

Ley de la gravitación universal

Imagínese un cuerpo de masa m colocado en la superficie terrestre, tal como se muestra en la figura:

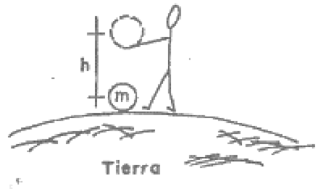


Fig 1.10

Al intentar levantarlo lo-primero que se siente es una resistencia u oposición al movimiento del cuerpo, el cual trata de permanecer en su posición original atraída por la Tierra. Por otra parte piénsese que uno es lo bastante fuerte como para levantarlo cierta altura "h". Una vez hecho todo este esfuerzo suéltese; ¿qué pasa con el cuerpo? Inmediatamente se percibe que es atraído en forma acelerada a su posición original sobre la superficie terrestre. Esto nos induce a razonar que la Tierra nunca deja de atraer hacia ella a dicho cuerpo.

1.2 Fuerza y actividades de comprensión.

Fuerza: toda acción capaz de modificar el estado de reposo o equilibrio de un cuerpo.

Vector: es una cantidad dirigida que tiene módulo o magnitud, dirección y sentido.

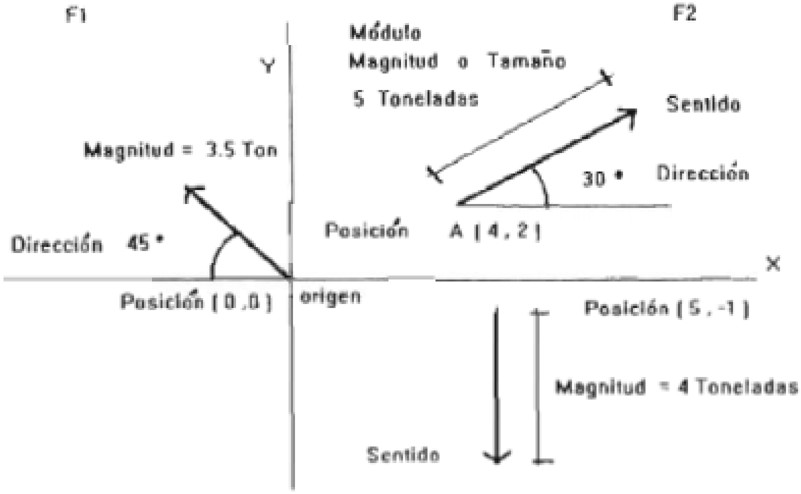


FIGURA 11. Las características de una fuerza se definen como: magnitud, dirección, sentido y posición.

La magnitud de una fuerza se relaciona con su tamaño, también se le puede llamar módulo.

Las unidades en que se expresa el módulo pueden ser: kilogramos, toneladas, libras, newtons, kilopounds, gramos.

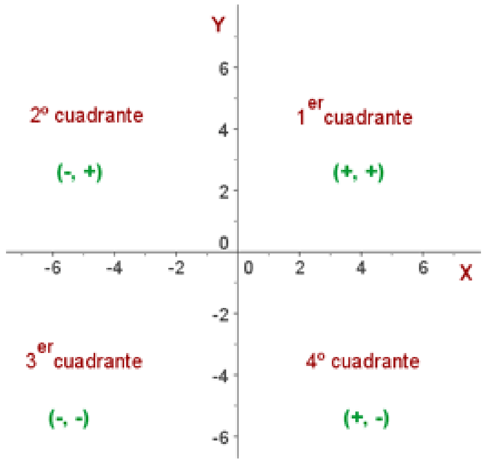
La dirección de una fuerza se relaciona con su ángulo de inclinación, respecto a un eje. Se puede expresar la dirección en grados o por la pendiente de la fuerza:

$$\alpha = 45°$$

$$\arctan \frac{3}{3} = 45°$$

El sentido de una fuerza está relacionado con la orientación que tiene en el plano (x,y), o en el espacio (tres dimensiones x,y,z).

Por ejemplo: en un plano se considera por convención de signos que el sentido de una fuerza es negativo si sigue la acción de la gravedad o positiva en caso contrario.



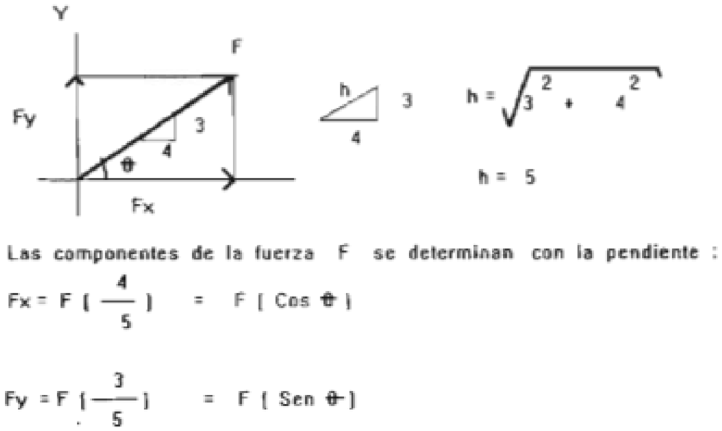
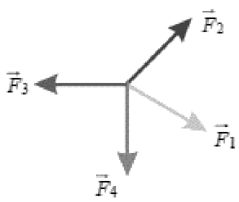


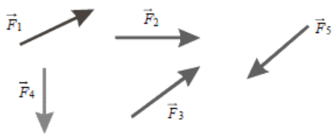
FIGURA 12. Dirección de una fuerza en relación con su pendiente.

En general las fuerzas que conforman un sistema pueden ser:

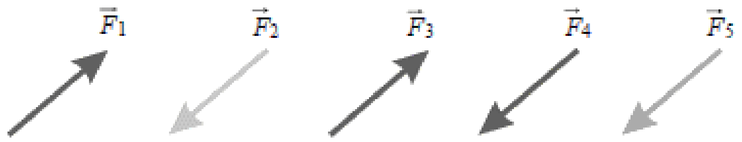
Concurrentes: cuando todas las líneas de acción se cortan o intersecan en un mismo punto.



No concurrentes: Cuando no todas las líneas de acción se intersecan en un mismo punto.

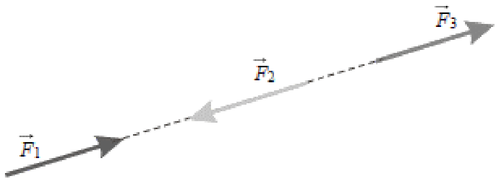


Paralelas: Cuando las líneas de acción de todas las fuerzas que conforman el sistema son paralelas.

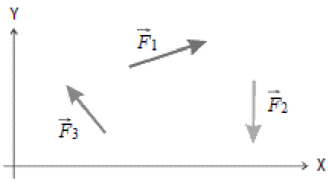


Además, los sistemas pueden ser:

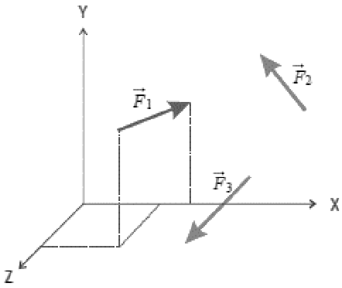
Colineales: Si las fuerzas del sistema actúan lo largo de una misma línea de acción.



Coplanares: Si todas las líneas de acción se encuentran contenidas en un mismo plano, (normalmente el plano xy).

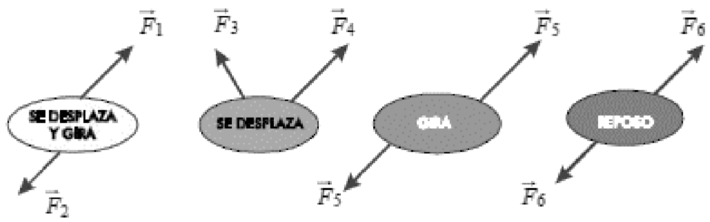


Espaciales: Cuando las líneas de acción no son ni colineales ni coplanares. (Normalmente se encuentran contenidas en un espacio tridimensional, xyz):

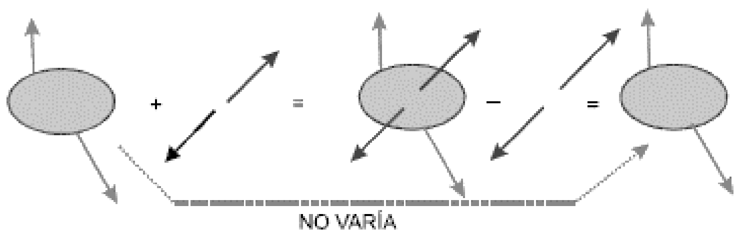


Principios

1. Cuando un cuerpo está sometido a dos fuerzas éste permanecerá en reposo o equilibrio estático solamente si las dos fuerzas son de igual magnitud, dirección opuesta y colineales.



2. A un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas se le puede agregar o quitar un sistema en equilibrio sin que se afecte su estado de reposo o movimiento.



3. Una fuerza que actúa sobre un cuerpo puede desplazarse a lo largo de su línea de acción sin que se altere su efecto externo sobre el cuerpo.

Ejemplos.

Formulario:

F= Fuerza	Fg= Fuerza Gravitacional
m= Masa	g= Gravedad
a= Aceleración	w=Peso

$$F = ma$$

$$F_g = \overbrace{\underset{\uparrow \atop masa\ (kg)}{m}g}^{peso\ (N)} = W \qquad g = 9.8m/s^2$$

1.- Calcula el peso de un balón lanzado en la tierra, con una masa de 0.6 kg.

$$m = 0.6\ kg$$

$$g = 9.8m/s^2$$

$$w = \underset{m/s^2}{(9.8)}\underset{kg}{(0.6)}$$

$$w = 5.88\ N$$

2.-

• ¿Cuál es el peso de una persona de 50kg de masa?

$\boxed{P = m \cdot g = 50 \cdot 9{,}81 = 490{,}5\,N}$

• ¿Cuál sería su peso en la luna?

$g_L = 1{,}62\ m/s^2$

$\boxed{P = m \cdot g = 50 \cdot 1{,}62 = 81\,N}$

1.3 Momento.

Concepto: El momento de una fuerza se define como el producto de su magnitud por una distancia perpendicular, con respecto a un eje.

En general, tal como decíamos, una fuerza intenta provocar un desplazamiento o deformación en el cuerpo sobre el que se aplica. La estructura tratará de impedir el movimiento o la deformación, contraponiéndole una fuerza del mismo valor (módulo), misma dirección y de sentido contrario. (Es lo que nos dice la tercera ley de Newton).
Sin embargo, en muchas ocasiones el punto de aplicación de la fuerza no coincide con el punto de aplicación en el cuerpo. En este caso la fuerza actúa sobre el objeto y su estructura a cierta distancia, mediante un elemento que traslada esa acción de esta fuerza hasta el objeto.

A esa combinación de fuerza aplicada por la distancia al punto de la estructura donde se aplica se le denomina momento de la fuerza F respecto al punto. El momento va a intentar un desplazamiento de giro o rotación del objeto. A la distancia de la fuerza al punto de aplicación se le denomina brazo.

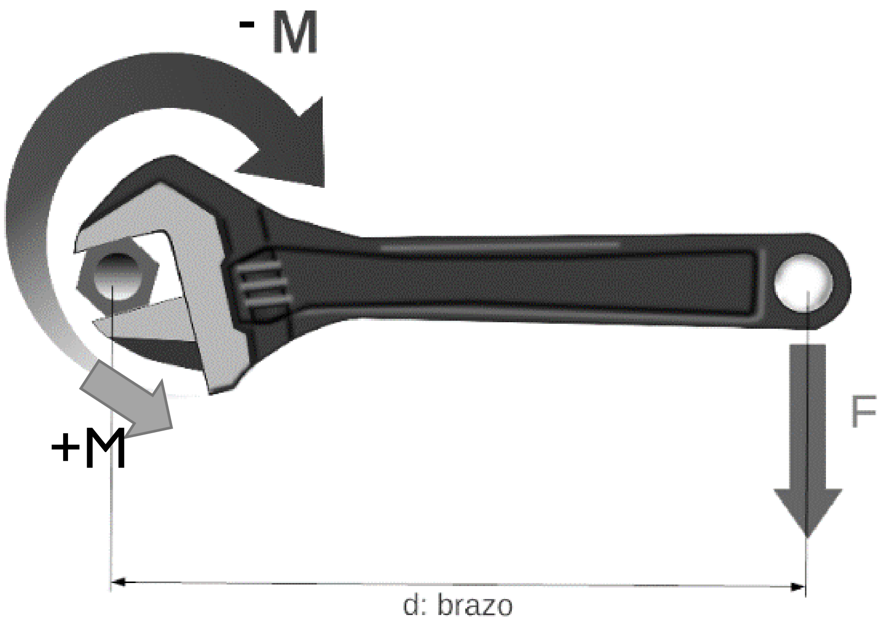
Matemáticamente se calcula mediante la expresión

$$M = F.d$$

Siendo F la fuerza en Newton (N), d la distancia en metros (m) y M el momento, que se mide en Newton por metro (Nm).

Existen muchos casos en los que aparecen momentos que producen o intentan producir movimientos de rotación, como en el caso de abrir una puerta, girar un volante, etc.

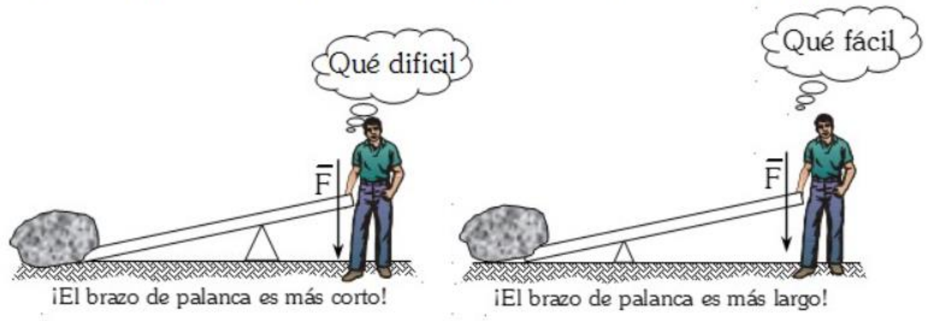
Cuando las fuerzas que provocan el momento son acciones, el momento es también una acción o solicitación. Siguiendo la misma condición de equilibrio, para que una estructura de un objeto esté en equilibrio, tiene que responder a la acción de un momento con otro del mismo valor y de sentido contrario. En este caso, si el momento que actúa busca la rotación hacia la derecha, la reacción será un momento que busque la rotación hacia la izquierda, y viceversa.



$$M = F * d$$

M: momento (N.m.)
F: fuerza aplicada (N)
d: brazo (m)

Nota: Un mismo momento de fuerza puede ser causado por una fuerza de módulo pequeño, cuyo brazo es grande y por una fuerza de módulo grande cuyo brazo es pequeño.



1.4 Ejercicios de comprensión (momento).

M = Fd

M: Momento
F: Magnitud de la fuerza en toneladas, kilogramos, libras.
d: Distancia perpendicular entre el eje y la fuerza en centímetros, metros, pies, pulgadas.

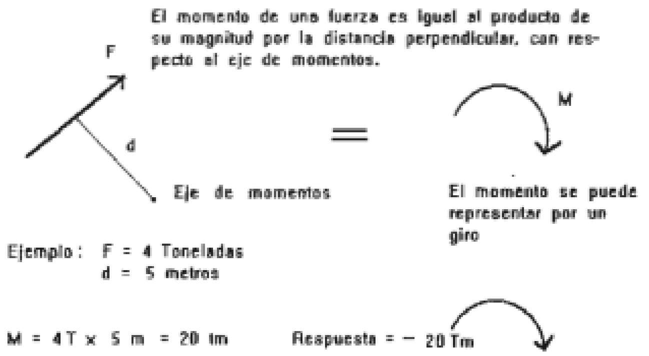


FIGURA 23. Convención de signos: Se considera negativo el momento de una fuerza cuando el giro de la fuerza es en sentido de las manecillas del reloj. Se considera positivo el momento de una fuerza cuando el giro de la fuerza es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

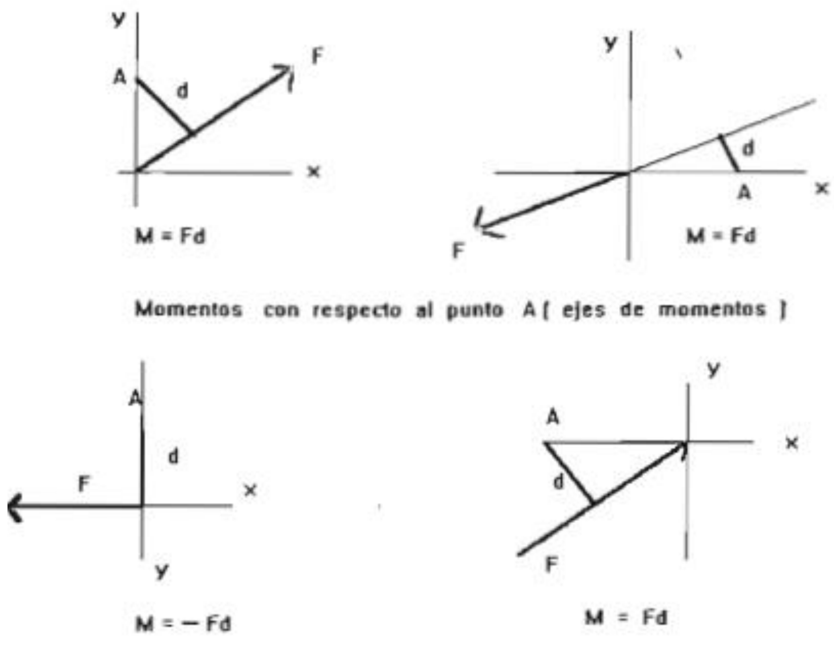
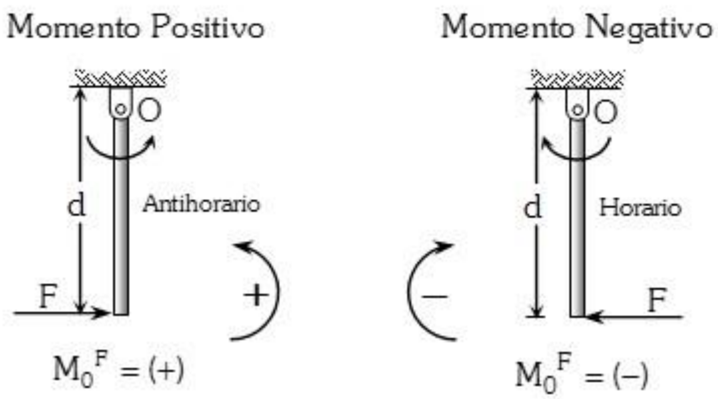
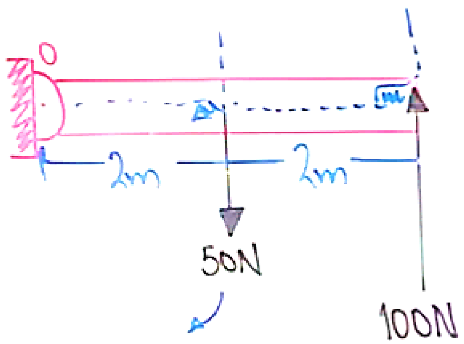


FIGURA 24. Ejemplos de representación de momentos de fuerzas.

1.5 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos.



1.- Hallar el momento resultante en los siguientes casos.



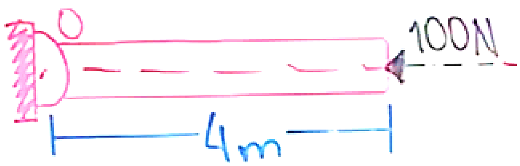
$\sum M_O = ?$

$M_O^{50} + M_O^{100} = ?$

$-50.2 + 100.4 = ?$

$-100 + 400$

$+300\ N.m$

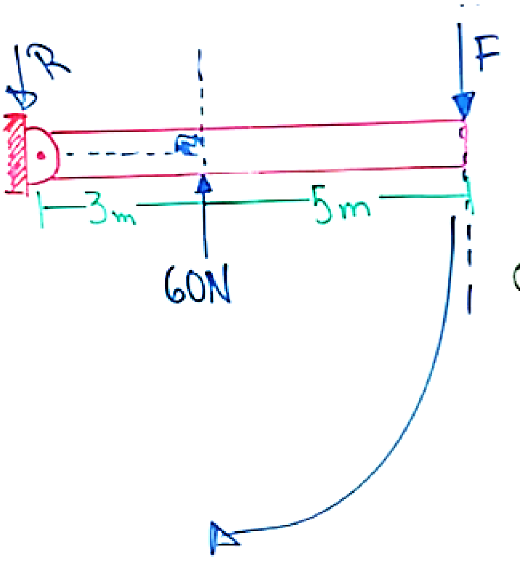


$\sum M_O = ?$

$M_O^{100} = ?$

$M_O^{100} = 0\ N.m$

2.- Hallar el módulo de la fuerza F, sabiendo que la barra esta en equilibrio.



1) $\Sigma F = 0$

2) $\Sigma M_O = 0$

$$M_O^R + M_O^{60} + M_O^F = 0$$

$$+60 \cdot 3 - F \cdot 8 = 0$$

$$180 = 8F$$

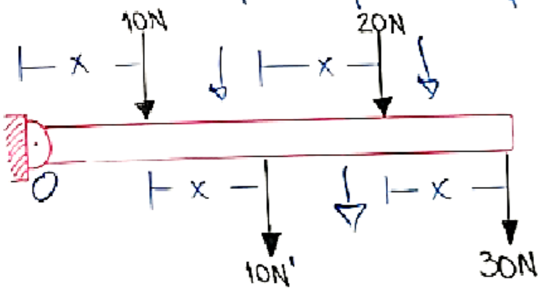
$$F = \frac{\cancel{180}^{\cancel{90}\,45}}{\cancel{8}_{\cancel{4}\,2}}$$

$$F = 22{,}5\,N$$

1.6 Ejercicios de comprensión complejos (momento).

Momento de fuerza

$\boxed{1}$ Determinar a que distancia del apoyo se encuentra la fuerza resultante de las fuerzas paralelas que se muestran.



1) $F_R = \Sigma F$

$$F_R = 10N + 10N + 20N + 30N$$

$$F_R = 70N \downarrow$$

2) $\Sigma M_O = M_O^R$

$$M_O^{10N} + M_O^{10N'} + M_O^{20N} + M_O^{30N} = M_O^{70N}$$

$$-10 \cdot x - 10 \cdot 2x - 20 \cdot 3x - 30 \cdot 4x = -70 \cdot d$$

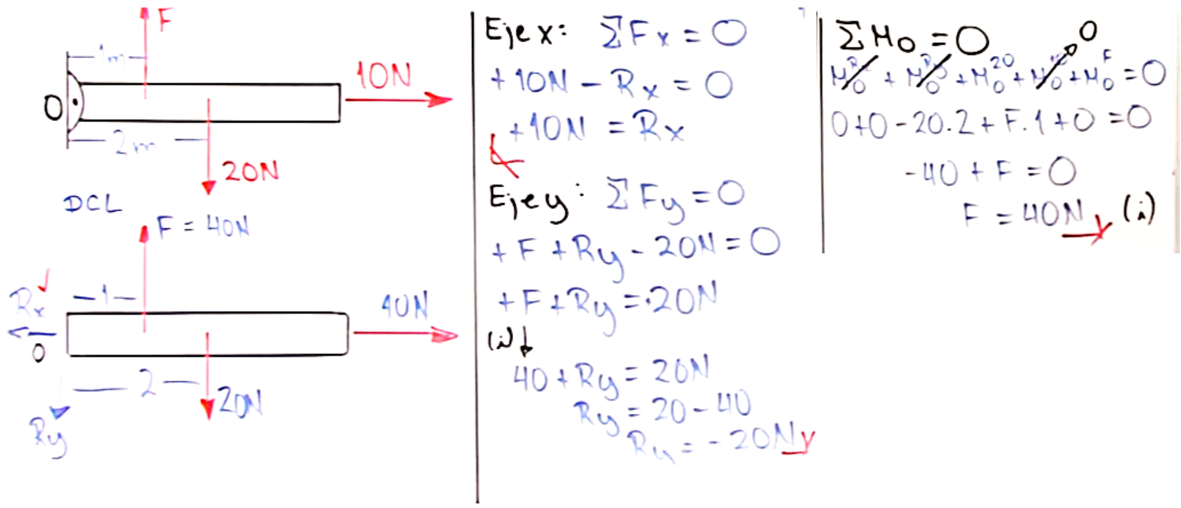
$$-10x - 20x - 60x - 120x = -70d$$

$$-210x = -70d$$

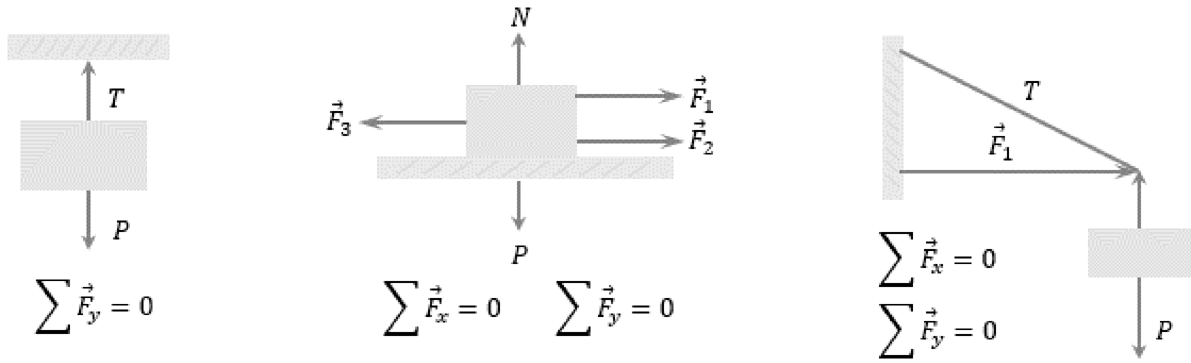
$$70d = 210x$$

$$d = \frac{\cancel{210}^{3}x}{\cancel{70}_{1}} = 3x$$

2.- Calcular las reacciones de la barra de un sistema en equilibrio.



1.7 Condiciones y equilibrio en sistemas de fuerzas.

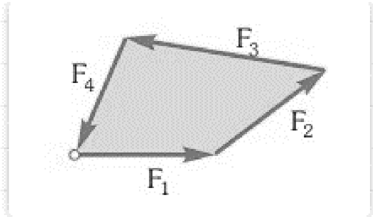


Primera condición de equilibrio: Diremos que un cuerpo se encuentra en equilibrio de traslación cuando la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula: ∑ F =0.

Desde el punto de vista matemático, en el caso de fuerzas coplanarias, se tiene que cumplir que la suma aritmética de las fuerzas o de sus componentes que están en la dirección positiva del eje X sea igual a las componentes de las que están en la dirección negativa. De forma análoga, la suma aritmética de las componentes que están en la dirección positiva del eje Y tiene que ser igual a las componentes que se encuentran en la dirección negativa:

$$\boxed{\sum F_{x+} = \sum F_{x-}} \qquad \boxed{\sum F_{y+} = \sum F_{y-}}$$

Por otro lado, desde el punto de vista geométrico, se tiene que cumplir que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio tienen un gráfico con forma de polígono cerrado; ya que en el gráfico de las fuerzas, el origen de cada fuerza se representa a partir del extremo de la fuerza anterior, tal y como podemos observar en la siguiente imagen.



El hecho de que su gráfico corresponda a un polígono cerrado verifica que la fuerza resultante sea nula, ya que el origen de la primera fuerza (F1) coincide con el extremo de la última (F4).

Segunda condición de equilibrio: Por otro lado, diremos que un cuerpo está en equilibrio de rotación cuando la suma de todas las fuerzas que se ejercen en él respecto a cualquier punto es nula. O dicho de otro modo, cuando la suma de los momentos de torsión es cero.

$$\boxed{\sum M_o^F \; (+) = \sum M_o^F \; (-)}$$

En este caso, desde el punto de vista matemático, y en el caso anterior en el que las fuerzas son coplanarias; se tiene que cumplir que la suma de los momentos o fuerzas asociados a las rotaciones anti horarias (en el sentido contrario de las agujas del reloj), tiene que ser igual a la suma aritmética de los momentos o fuerzas que están asociados a las rotaciones horarias (en el sentido de las agujas del reloj):

Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional y rotacional cuando se verifiquen de forma simultánea las dos condiciones de equilibrio. Estas condiciones de equilibrio se convierten, gracias al álgebra vectorial, en un sistema de ecuaciones cuya solución será la solución de la condición del equilibrio.

Equilibrio de sistemas de fuerzas

Para que una edificación sea capaz de resistir las acciones permanentes, accidentales, y variables será necesario que todos sus elementos estructurales: columnas, trabes, losas, muros y cimientos, cumplan con los requisitos de resistencia y servicios.

Desde el punto de vista resistencia, uno de los requisitos de mayor importancia es el que se refiere al equilibrio de las fuerzas externas e internas de cada elemento estructural.
Como, por ejemplo, si a una trabe se le aplican fuerzas que se derivan del peso propio de los materiales como losas de concreto, acero, muros u otros materiales, será necesario para establecer el equilibrio, aplicar fuerzas que se traducen en la resistencia del material de la trabe.

Esta resistencia es equivalente a las fuerzas internas. Así las fuerzas externas aplicadas serán contrarrestadas por las fuerzas internas. Si la trabe que debe cargar es de concreto reforzado con acero, por lo tanto, se tendrán dos fuerzas internas que van a resistir.

1) Una fuerza de compresión interna que aporta el concreto.
2) Una fuerza de tensión interna que aporta e l acero.

Estas dos fuerzas en la trabe proporcionan lo que llamaremos: Resistencia a momento flexionante.
También debemos considerar que, para dar resistencia en la trabe, es importante tomar en cuenta la forma de la sección recta.

a) Una trabe de sección rectangular.
b) Una trabe de sección cuadrada.
c) Una trabe de sección en forma de T.
d) U na trabe de sección en forma de I.
e) Una columna de sección circular.
f) Una columna de sección circular hueca.
g) Una columna en forma de canal I.
h) Una trabe de sección con dos canales soldados

Equilibrio de sistemas de fuerzas colineales coplanares

Para establecer el equilibrio en cualquiera de los sistemas de fuerzas deberán, aplicarse las siguientes ecuaciones que proporciona la estática:

$$\sum FX = 0$$
$$\sum FX = 0$$
$$\sum MF = 0$$

A estas ecuaciones les llamaremos condiciones de equilibrio. En un sistema de fuerzas concurrentes la suma de fuerza s deberá cumplir con las ecuaciones anteriores. Como en este sistema las fuerzas se encuentran sobre una misma línea, s610 se aplicará una de las ecuaciones anteriores.

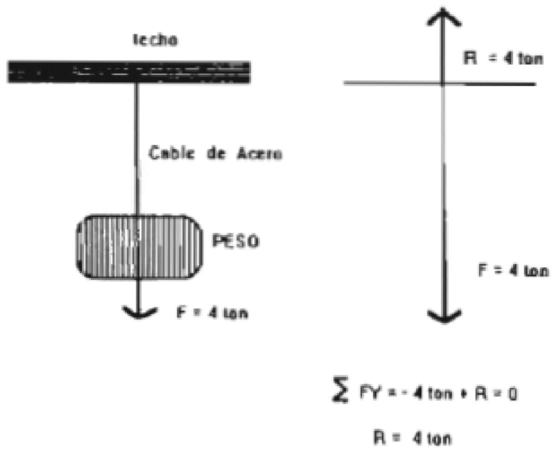


FIGURA 38. Equilibrio de sistema de fuerzas colineales coplanares.

Ejemplo 1:
(Fig.38)

Un cable de acero suspendido del techo soporta una carga de 4 tons. Determinar el equilibrio o reacción que debe aplicarse.

$$\sum F_Y = -4\ ton + R = 0$$

Al aplicar la ecuación de la suma de fuerzas con respecto a la vertical "Y" es necesario que en la ecuación se considere el valor de reacción como una incógnita llamada R. Además, deberá igualarse la ecuación a cero, para despejar la incógnita. Una vez planteada la ecuación de la suma de fuerzas verticales, se determina el valor R.

$$R = 4\ ton$$

Si al despejar la incógnita R, el resultado es positivo, quiere decir que el sentido de R está bien propuesto. De lo contrario, si el resultado es negativo será necesario cambiarle el sentido a la reacción.

1.8 Resultantes de sistema de fuerzas concurrentes.

La resultante de dos fuerzas se puede obtener también, con la aplicación de la ley del coseno: Aplicando las funciones trigonométricas

Ley del Paralelogramo

Considérense dos fuerzas perpendiculares entre sí dibujadas con una escala gráfica en toneladas (Fig. 16):

$$F_1 = 5\ ton$$
$$F_2 = 2\ ton$$
$$\theta = 90°$$

Por los extremos de las fuerzas, se trazan rectas paralelas a las fuerzas hasta intersectarse en un punto común. La resultante se obtiene uniendo el origen de las dos fuerzas con el punto de intersección de las paralelas. A esta definición se le conoce como la ley del paralelogramo.

Las características de la resultante se miden gráficamente. La magnitud se mide con la misma escala de las fuerzas. El ángulo entre la resultante y una de las fuerzas se puede medir con un transportador.

La ley del paralelogramo se aplica a dos o más fuerzas, para obtener una resultante total. Mediante la ley del paralelogramo se obtiene gráficamente la resultante de dos o más fuerzas. Para aplicarla será necesario dibujar las fuerzas con su magnitud a escala, y su dirección midiendo con el transportador. Las fuerzas deberán unirse por el origen, para calcular la resultante.

La magnitud de la resultante, se determina midiendo con la misma escala empleada para las fuerzas, y el ángulo de la resultante con transportador.

$$R = \sqrt{(Rx)^2 + (Ry)^2}$$

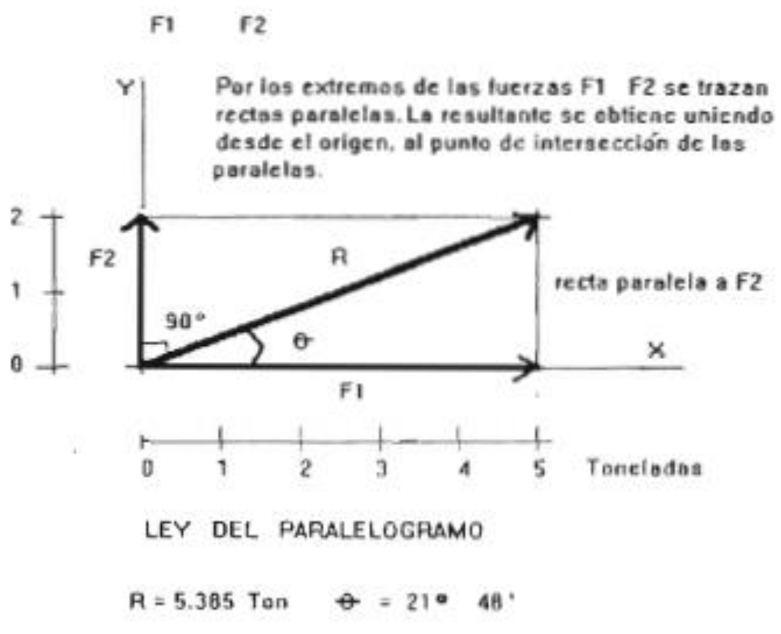


FIGURA 16. Resultante de dos fuerzas.

$$\sin\ \alpha = \frac{l}{Q} \qquad \cos\ \alpha = \frac{m}{Q}$$

$$l = Q\ \sin\ \alpha \qquad m = Q\ \cos\ \alpha$$

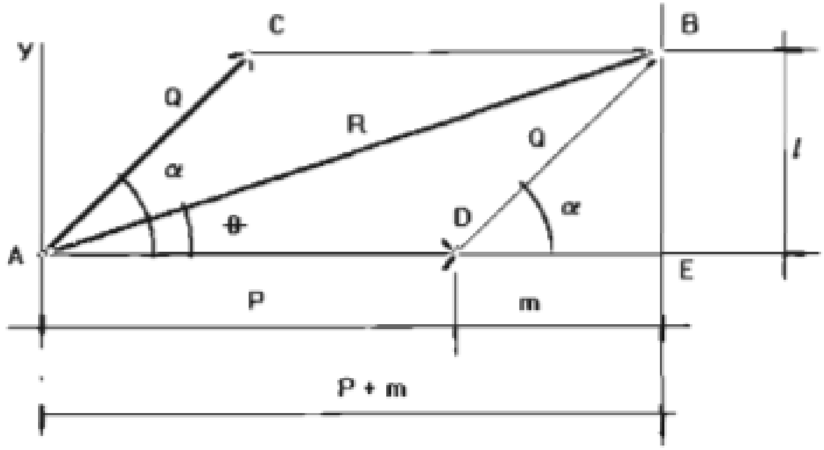


FIGURA 21. Ley del coseno. Paralelogramo de fuerzas.

Equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes coplanares

Para determinar el equilibrio del sistema de fuerzas concurrentes, se aplican las condiciones de equilibrio con respecto a los ejes perpendiculares X, Y.

$$\Sigma F_X = 0$$
$$\Sigma F_Y = 0$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan el equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes para varias fuerzas concurrentes, se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\Sigma F_X = F1_X + F2_X + F3_X + F4_X + Fn + \ldots FX = 0$$

$$\Sigma F_Y = F1_Y + F2_Y + F3_Y + F4_Y + Fn + \ldots + FY = 0$$

La ecuación de momentos para este sistema no se aplicaría, por tener las fuerzas un punto común o de concurrencia. Para darle solución al problema de este sistema, podemos considerar los siguientes pasos:

a) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje X.
b) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje Y.
c) Se suman las componentes de las fuerzas en X, proponiendo para esta ecuación la incógnita que va a equilibrar estas fuerzas.
d) Se despeja la incógnita FX de la ecuación anterior, y se revisa su signo.
e) Se suman las componentes de las fuerzas en Y, proponiendo para esta ecuación la incógnita que va a equilibrar estas fuerzas

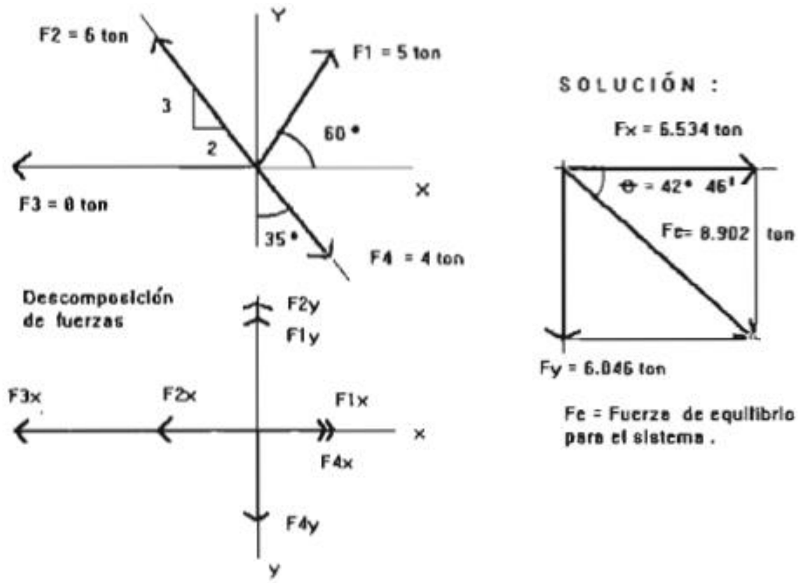


FIGURA 39. Equilibrio de fuerzas concurrentes.

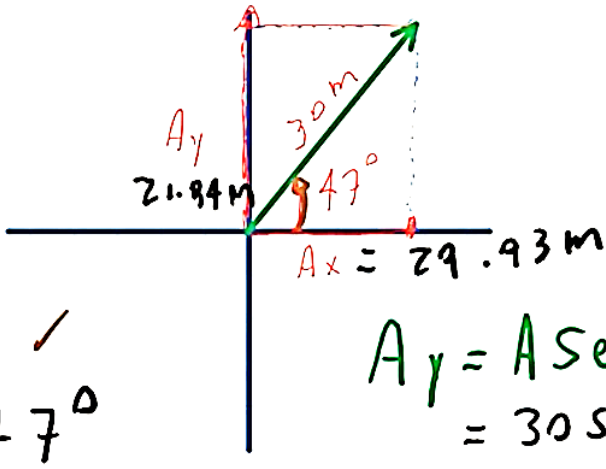
1.9 Ejercicios de comprensión (fuerzas concurrentes).

1.-

Hallar los Componentes de un vector $\vec{A}$ cuya magnitud es 30 m y su dirección es $\theta = 47^\circ$.

$A = 30\,m$

$\theta = 47^\circ$



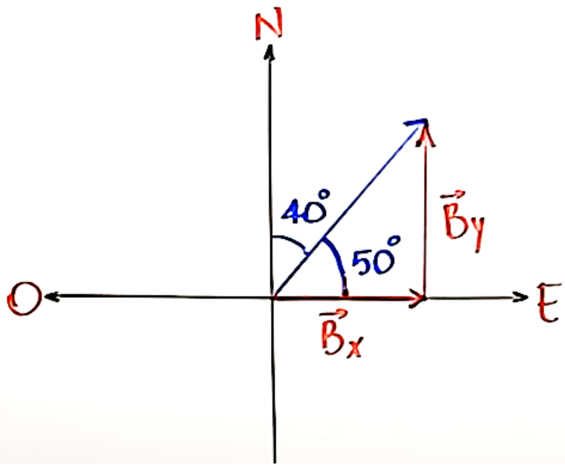
$$A_x = A\cos\theta$$
$$= 30\cos 47^\circ$$
$$= 29.93\,m$$

$$A_y = A\,\mathrm{Sen}\,\theta$$
$$= 30\,\mathrm{sen}\,47^\circ$$
$$= 21.94\,m$$

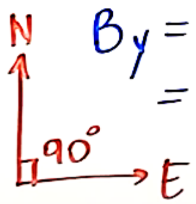
2.- Hallar los componentes rectangulares del siguiente vector.

$\vec{B} = 12cm \quad \overset{+y}{N}\ 40^\circ\ \overset{+x}{E}$

$$\vec{V}_x = |\vec{V}|\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$
$$\vec{V}_y = |\vec{V}|\,\mathrm{Sen}\,\alpha$$

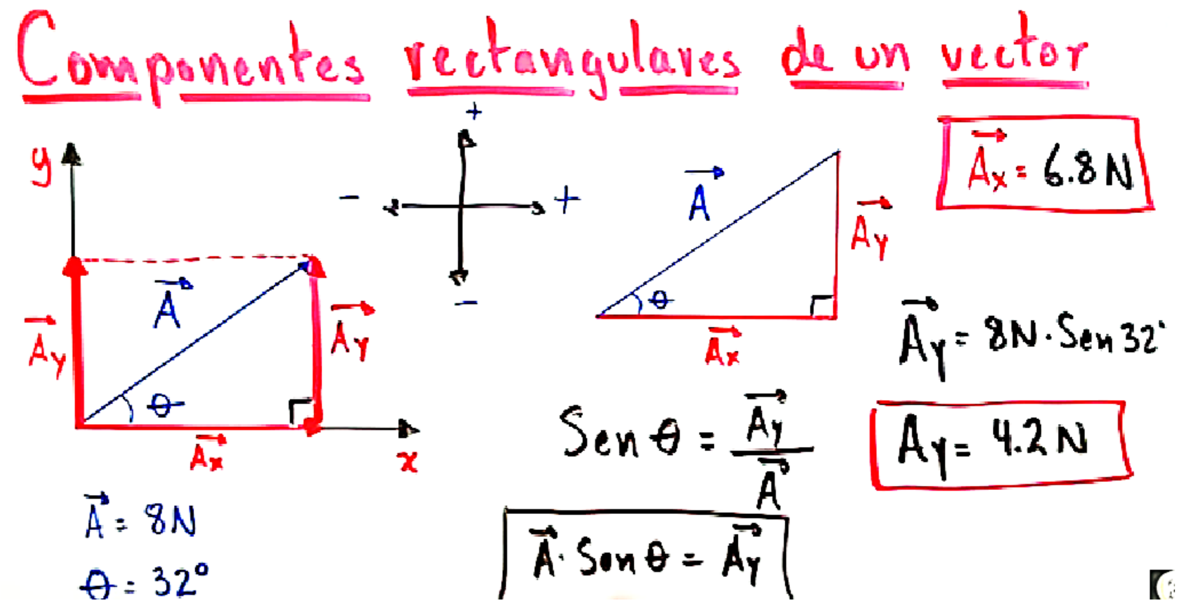


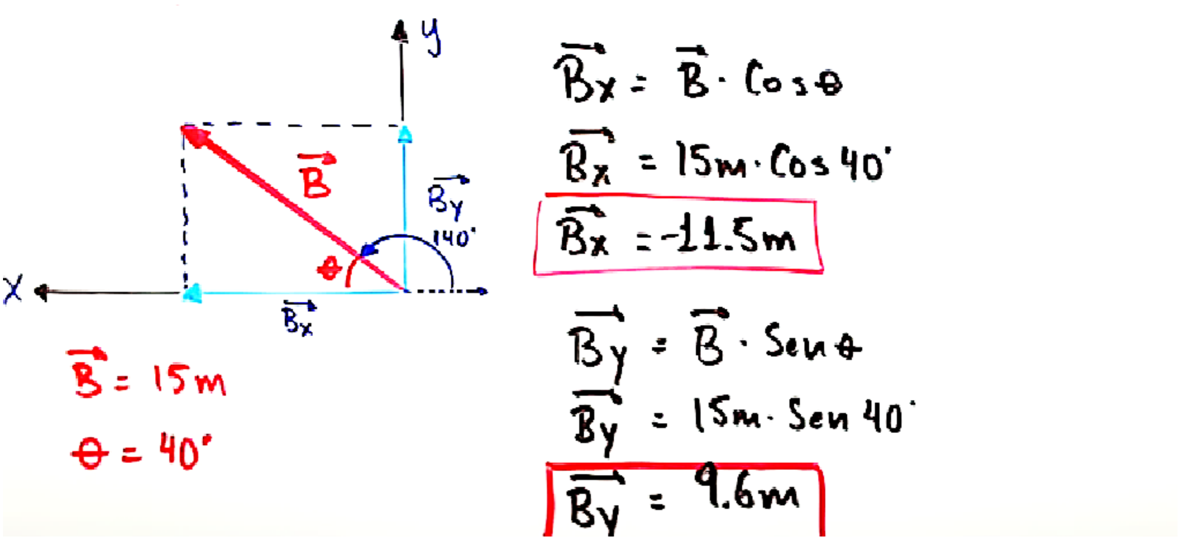
$$\vec{B}_x = 12cm\,\mathrm{Cos}\,50^\circ$$
$$= 7{,}71cm$$



$$\vec{B}_y = 12cm\,\mathrm{Sen}\,50^\circ$$
$$= 9{,}19cm$$

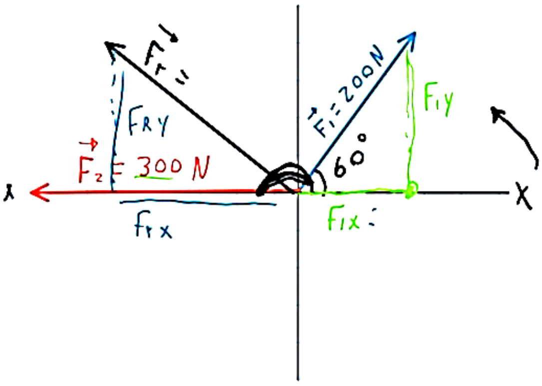
3.- Hallar los componentes rectangulares del siguiente vector.





1.10 Ejercicios de comprensión complejos (fuerzas concurrentes).

1.- Hallar la fuera resultante del siguiente caso.



$\vec{F_1} = 200\,N,\ 60°$

$\vec{F_2} = 300\,N,\ 180°$

$\vec{F_x} = F\cos\theta$

$\vec{F_y} = F\,sen\,\theta$

$F_{1x} = 200\cos 60° = 100\,N$

$F_{1y} = 200\,sen\,60° = 173.21$

$F_{2x} = 300\cos 180 = -300\,N$

$F_{2y} = 300\,sen\,180 = 0$

$F_{rx} = -200\,N$

$F_{ry} = 173.21\,N$

$F_{rx} = -200\,N$

$F_{ry} = 173.21\,N$

$F_{1y} = 200\,sen\,60° = 173.21$

$F_{2x} = 300\cos 180 = -300\,N$

$F_{2y} = 300\,sen\,180 = 0$

$\vec{F_R} = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}$

$\vec{F_R} = \sqrt{(-200)^2 + (173.21)^2}$

$= 264.6\,N$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{rY}}{F_{rX}}\right)$

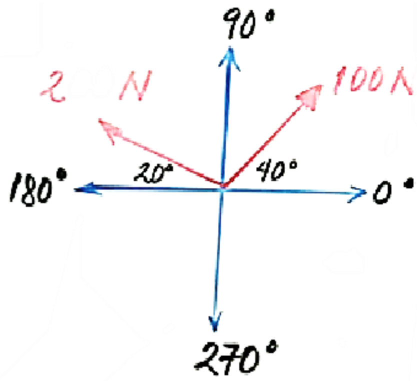
$= \tan^{-1}\left(\frac{173.21}{-200}\right)$

$= -40.89 + 180$

$= 139.1$

2.- Hallar la fuera resultante del siguiente caso.

$$F_x = 100 \cos 40° = 76.60$$
$$200 \cos 160° = -187.93$$



$$F_y = 100 \operatorname{Sen} 40 = 64.27$$
$$200 \operatorname{Sen} 160° = 68.40$$

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$$

$$F_x = 100 \cos 40° = 76.60$$
$$200 \cos 160° = -187.93$$

$$F_x = -111.33$$

$$F_y = 100 \operatorname{Sen} 40° = 64.27$$
$$200 \operatorname{Sen} 160° = 68.40$$

$$F_y = 132.67$$

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$$

$$F = \sqrt{(-111.33)^2 + (132.67)^2}$$

$$F = \sqrt{12,394 + 17,601}$$

$$F = \sqrt{29,995}$$

$$V_R = \quad F_R = \quad 173\ N$$

1.11 Estructuras.

"Entidad física de carácter unitario, concebida como una organización de cuerpos dispuestos en el espacio de modo que el concepto del todo domina la relación entre las partes"

Tipos de estructuras:

Se reconocen dos tipos de estructuras:

- Reticulares
- Estructuras tipo placa o cascaron

Estructuras reticulares. Se componen por barras rectas o curvas unidos en sus extremos por pasadores o soldadura.

Placa o cascarón. Se construye de losas continuas curvas o planas con apoyos por lo general en forma continua en sus bordes.

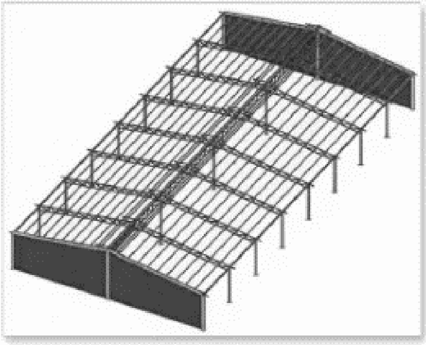


Ilustración 4. Estructura reticular (Nave Explahsa, Amarateca)

Principales sistemas estructurales:

Armaduras.

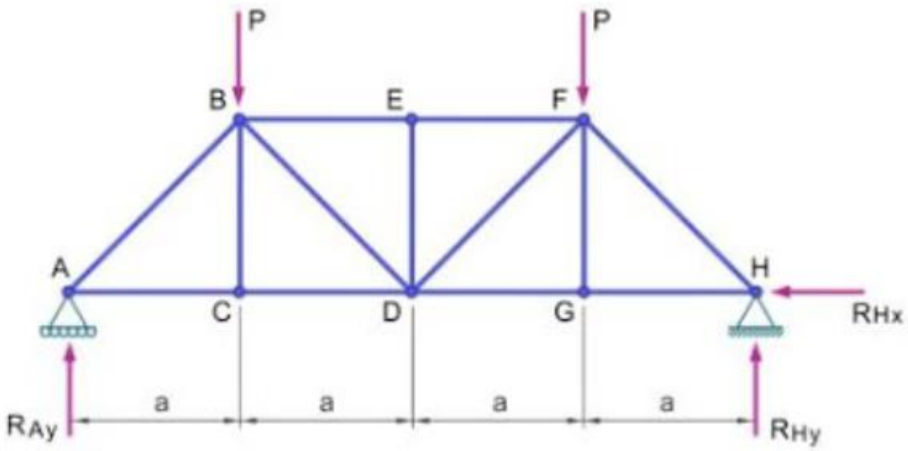
Uno de los elementos estructurales más usados en Instalaciones Agrícolas son las cerchas o armaduras, las cuales soportan cargas elevadas y cubren grandes luces, generalmente se utilizan en cubiertas de techos y puentes. El análisis de las condiciones de estabilidad que deben cumplir cuando sobre ellas son aplicadas cargas de trabajo

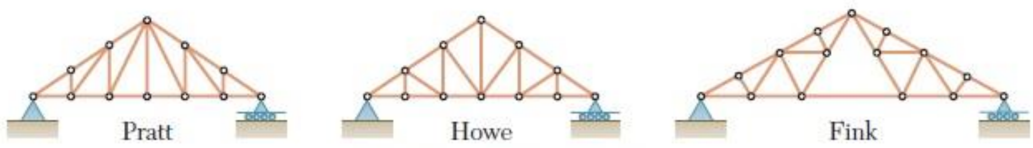
Marcos o pórticos: Este sistema conjuga elementos tipo viga y columna. Su estabilidad está determinada por la capacidad de soportar momentos en sus uniones. Pueden ser planos y espaciales.

Entre otros podemos mencionar: Sistemas de pisos, sistemas de muros, sistemas combinados para edificaciones, sistemas masivos (presas o elementos en tres dimensiones).

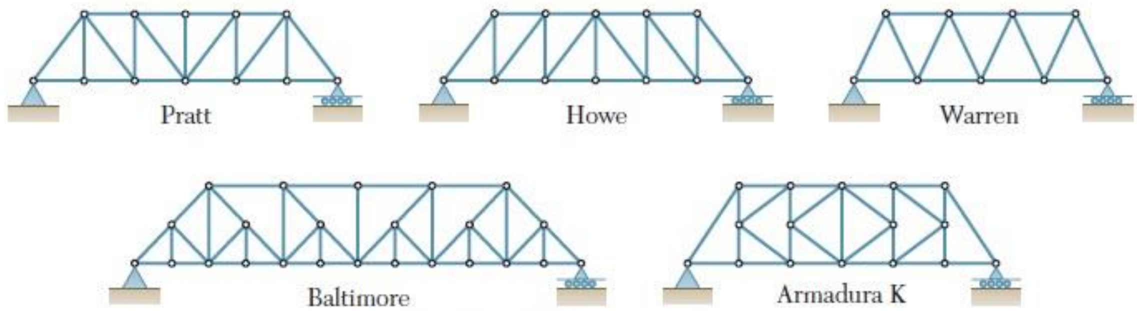
¿Qué es una armadura?

Las armaduras están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento.

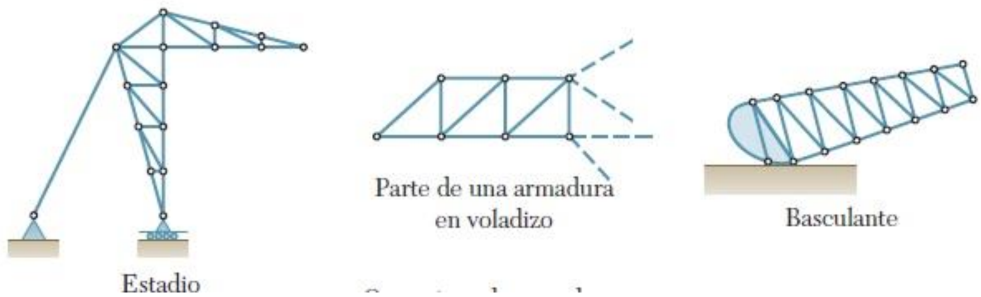




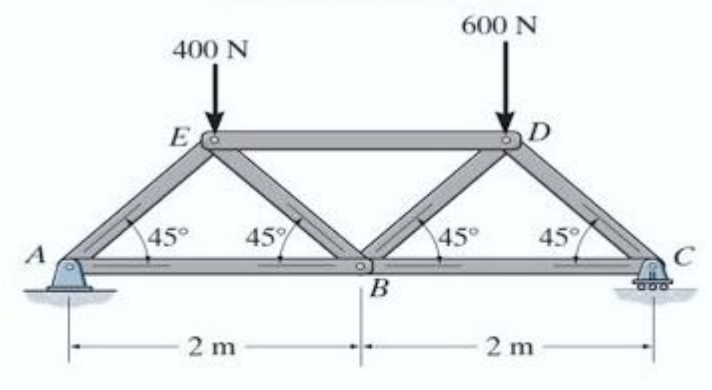
Armaduras típicas para techo



Armaduras típicas para puentes



1.12 Armaduras planas y especiales.



Definición e idealización de las armaduras planas.

Se dice que una armadura es plana si todos sus miembros y las cargas aplicadas se encuentran en un solo plano.

Para simplificar el análisis de las armaduras planas se hacen las siguientes hipótesis:

1. Los elementos de las armaduras están conectados por medio de pasadores sin fricción.

2. Los elementos de la estructura son rectos. (Si no lo fuesen, las fuerzas axiales ocasionarían en ellos momentos flexionantes).

3. Las deformaciones de una armadura cargada, causadas por los cambios en la longitud de los elementos individuales, no son de suficiente magnitud para ocasionar cambios apreciables en la forma y dimensiones generales de la armadura. Debe darse atención especial a las armaduras muy largas y flexibles.

4. Los elementos están dispuestos de manera que las cargas y las reacciones se aplican sólo en los nudos de las armaduras.

La razón para establecer estas hipótesis es obtener una armadura ideal, cuyos miembros sólo estén sujetos a fuerzas axiales. Un elemento sujeto sólo a fuerza axial está sometido a tensión o bien a compresión, pero no a flexión (ver Fig. 2.1.).

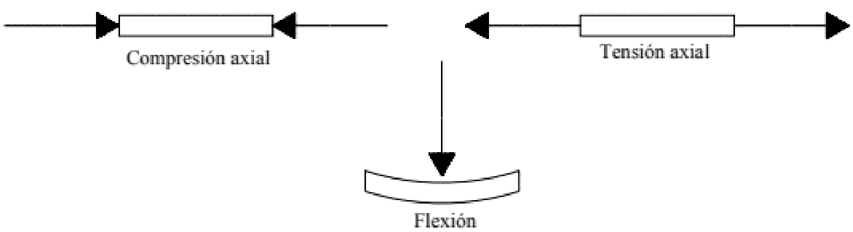


Fig. 2.1 Acciones en una barra

Las fuerzas obtenidas con base en esas hipótesis simplificadas son, en la mayoría de los casos, muy satisfactorias y se denominan fuerzas primarias. Las fuerzas causadas por condiciones no consideradas en el análisis de fuerzas primarias se denominan fuerzas secundarias.

Rigidez y flexibilidad de una barra de armadura

Considérese una barra recta de armadura, cuyo módulo de elasticidad E y su sección transversal A son constantes en toda su longitud L (Fig. 2.2). Dicha barra está referida a los ejes x y y . El sistema coordenado así definido se llama sistema local de coordenadas.

Esta barra está sometida a la acción de fuerzas internas $\overline{Fi}$ y $\overline{Fj}$, aplicadas en los nudos i y j, respectivamente; la acción de estas fuerzas provoca desplazamientos en los nudos, llamados $\overline{u}_i$ y $\overline{u}_j$, mostrados en la Fig. 2.2.

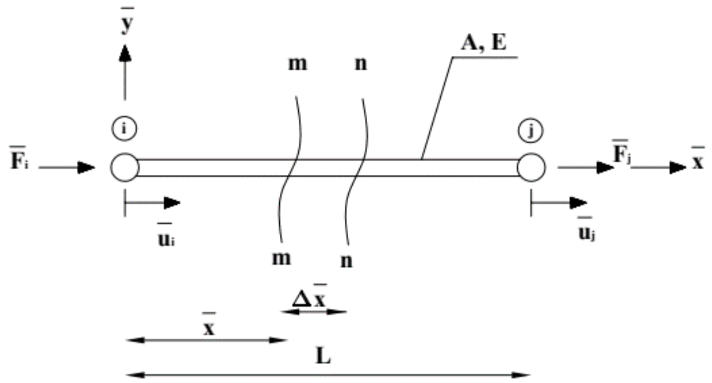


Fig. 2.2 Barra i- j de armadura en referencia local

L = Longitud de la barra.

A = Área de la sección transversal.

E = Módulo de elasticidad del material constitutivo de la barra.

i, j = Nudos inicial y final de la barra i – j, respectivamente.

$\overline{x}, \overline{y}$ = Sistema de coordenadas local para la barra.

$\overline{F_i}$, $\overline{F_j}$ = Fuerzas axiales aplicadas sobre los nudos i y j, respectivamente, en referencia local.

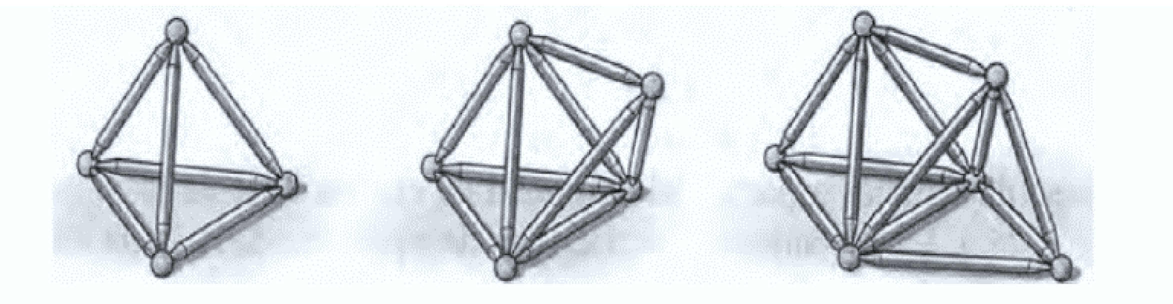
$\overline{u_i}$, $\overline{u_j}$ = Desplazamientos lineales nodales de los extremos i y j, respectivamente, en referencia local.

m, n = Elemento diferencial longitudinal de la barra.

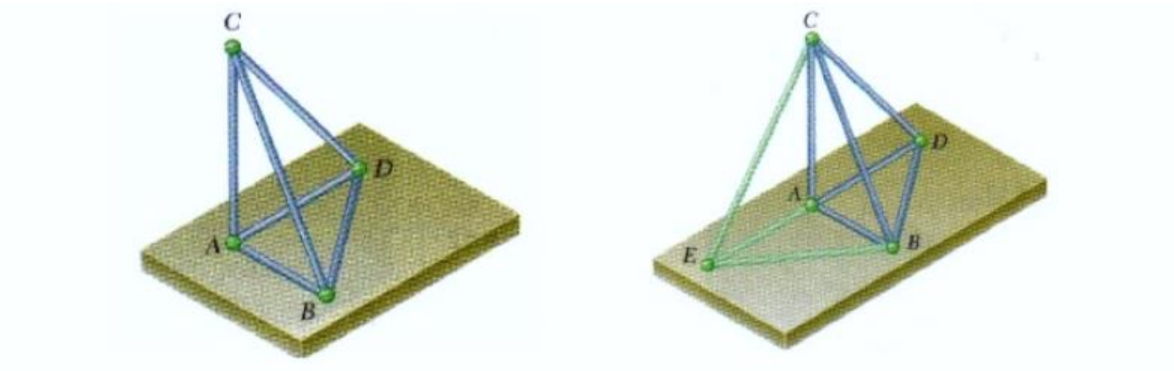
Las fuerzas aplicadas $\overline{Fi}$ y $\overline{Fj}$, en el interior de la barra, originan la fuerza interna $\overline{F}(\overline{x})$, tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la barra (Fig. 2.3), para la que se han realizado varios cortes transversales.

Armaduras especiales

Una armadura espacial consiste en miembros unidos en sus extremos para formar una estructura estable tridimensional.



El elemento más simple de una armadura espacial es un tetraedro, formado al conectar seis miembros entre sí. ¡Una armadura espacial simple puede construirse agregando tres elementos a la conjuración básica como los elementos AE, BE Y CE como en la figura uniéndolos a los tres nudos existentes! conectándolos en un nuevo nudo.



Recurso:

http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/7721/COMPILACION%20DE%20EJERCICIOS%20DE%20ESTATICA.pdf?sequence=1

UNIDAD II

CENTROS DE GRAVEDAD

Objetivo de la unidad

Conocer y realizar los procedimientos para encontrar los centros y centroides en líneas y superficies de los elementos estructurales, para determinar los puntos críticos de equilibrio en dichos elementos.

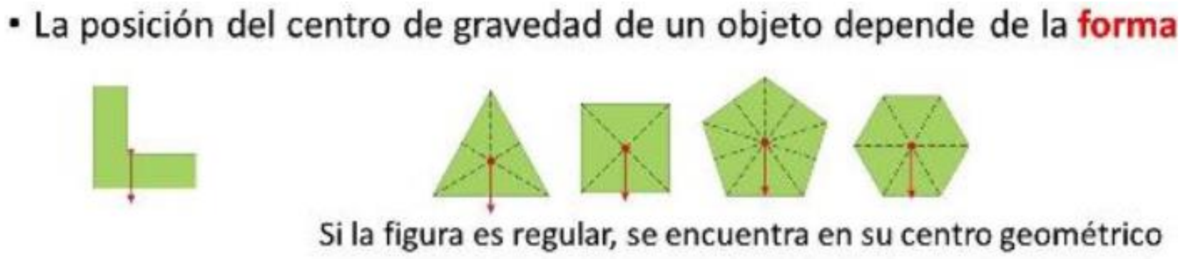
2.1 Centro de gravedad y centro de masa.

El centro de gravedad. Es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de la gravedad que actúan sobre las distintas masas materiales de un cuerpo. En física, el centro de gravedad, el centroide y el centro de masas pueden, bajo ciertas circunstancias, coincidir entre sí. En estos casos se hace válido utilizar estos términos de manera intercambiable.

El centroide es un concepto geométrico mientras que los otros dos términos se relacionan con las propiedades físicas de un cuerpo.

Para que el centroide encaje con el centro de masa, el objeto debe tener densidad uniforme, o la distribución de materia a través del objeto debe tener ciertas propiedades, tales como simetría.

Para que un centroide encaje con el centro de gravedad, el centroide debe coincidir con el centro de masa y el objeto debe estar bajo la influencia de un campo gravitatorio uniforme.



Centro de masa. Generalmente se le abrevia como C.M. y se define como el punto geométrico donde la resultante de las fuerzas gravitatorias ejercidas por todos los cuerpos del sistema se anula. De similar forma, en un sistema continuo es el punto donde la resultante de las fuerzas ejercidas por cada diferencial de masa se anula.

En un tratamiento de los sistemas de masas puntuales el centro de masas es el punto donde se presume concentrada toda la masa del sistema. El concepto se utiliza para análisis físicos en los cuales no es importante considerar la distribución de masa. Por ejemplo, en las órbitas de los planetas.

El centro de gravedad de un cuerpo no corresponde necesariamente a un punto material del cuerpo. Así, el c.g. de una esfera hueca está situado en el centro de la esfera que, obviamente, no pertenece al cuerpo

En física, además del centro de gravedad aparecen los conceptos de centro de masa y de centro geométrico o centroide que, aunque pueden coincidir con el centro de gravedad, son conceptualmente diferentes.

Centro de masa y centro de gravedad: El centro de masas coincide con el centro de gravedad sólo si el campo gravitatorio es uniforme; es decir, viene dado en todos los puntos del campo gravitatorio por un vector de magnitud y dirección constante.

Centro geométrico (Centroide) y centro de masa: El centro geométrico de un cuerpo material coincide con el centro de masa si el objeto es homogéneo (densidad uniforme) o cuando la distribución de materia en el sistema es simétrica.

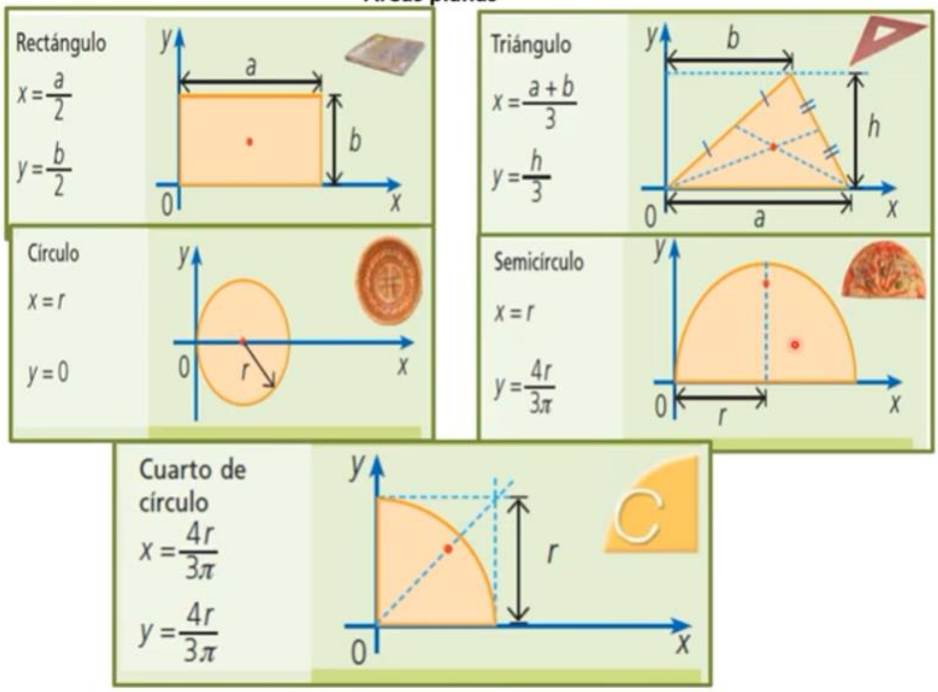
2.2 Ejercicios de comprensión (centro de gravedad y centro de masa).

Fórmula

$$x_{CG} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i w_i}{w}$$

$$y_{CG} = \frac{y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_n w_n}{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i w_i}{w}$$

Áreas planas



2.3 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos.

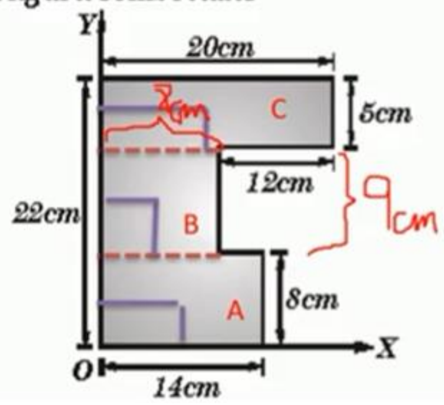
$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Ejercicios de Centro de Gravedad

Determinar coordenadas de *C.G.* de la figura sombreada.



A)(7; 11,2) cm B)(7,2; 11,3) cm
C)(7,3; 11,6) cm D)(8; 12) cm
E) (10; 11) cm

Centro de A: X=7cm y Y=4 cm

Centro de B: X=4cm y Y=(4,5 + 8) cm

Centro de C: X=10cm y Y=(2,5 + 17) cm

Área de A = 14 x 8 = 112 cm^2
Área de B = 9 x 8 = 72 cm^2
Área de C = 20 x 5 = 100 cm^2

$$x_{CG} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n}{w}$$

$$y_{CG} = \frac{y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots + y_nw_n}{w}$$

$$X_{CG} = \frac{(7x112)+(4x72)+(10x100)}{112+72+100} = 7{,}28 \cong 7{,}3$$

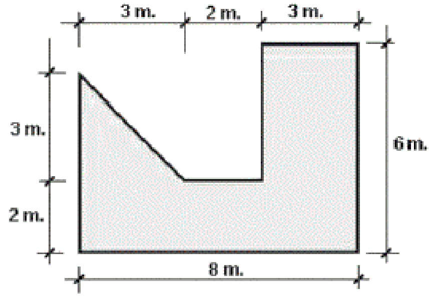
$$Y_{CG} = \frac{(4x112)+(12{,}5x72)+(19{,}5x100)}{112+72+100} = 11{,}61 \cong 11{,}6$$

Respuesta: C.G.=(7,3 ; 11,6)
Letra C

2.4 Ejercicios de compresión Complejos (centro de gravedad y centro de masa).

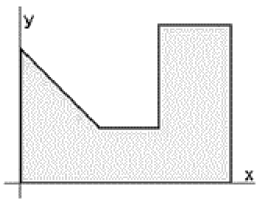
Método de las áreas :

Ejercicio 1 : *Calcular la ubicación del Centroide de la siguiente figura geométrica.*

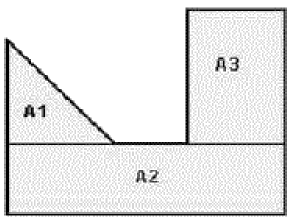


Solución:

Como primer paso se fija el sistema de coordenadas rectangulares que nos servirá de referencia:



Posteriormente dividimos la figura en áreas más simples de centroides conocidos.



Calculamos las áreas de las tres figuras conocidas:

Area A1 (Triángulo) : Base por altura entre dos.

$$A_1 = \frac{b.h}{2} = \frac{(3)(3)}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Area A2 (Rectángulo) : Base por altura.

$$A_2 = (8)(2) = 16$$

Area A3 (Rectángulo) : Base por altura.

$$A_3 = (3)(4) = 12$$

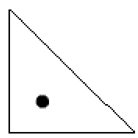
Los ejes centroidales de una figura plana vienen dados por las siguientes formulas :

$$Xcentroide = \frac{A_1.X_1 + A_2.X_2 + A_3.X_3 + \cdots + A_n.X_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}$$

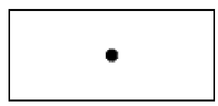
$$Ycentroide = \frac{A_1.Y_1 + A_2.Y_2 + A_3.Y_3 + \cdots + A_n.Y_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}$$

Donde "Ai" es el área de la figura simple estudiada, "Xi" es la abscisa del centroide de dicha figura simple y "Yi" la ordenada del centroide de la misma figura simple.

Es bueno recordar que el centroide de un triangulo rectángulo está ubicado a un tercio de su base y a un tercio de su altura.

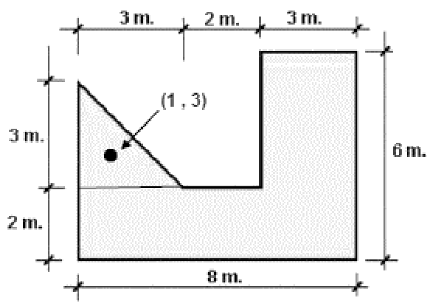


El centroide de un rectángulo está ubicado a un medio de su base y a un medio de su altura.



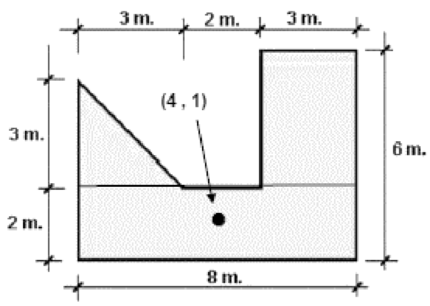
Luego, resulta más cómodo determinar los valores de "X" y "Y" del centroide de cada una de las figuras simples para incluirlas en la fórmula respectiva, tomando en cuenta el sistema de coordenadas de referencia.

Estudiando la figura 1 (Triangulo) :



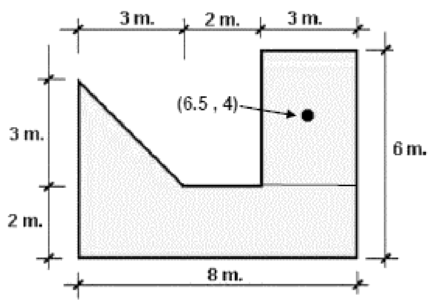
$X_1 = 1$
$Y_1 = 3$

Estudiando la figura 2 (Rectángulo) :



$X_2 = 4$
$Y_2 = 1$

Estudiando la figura 3 (Rectángulo) :



$X_3 = 6,5$
$Y_3 = 4$

Con toda esta información el problema se limita a introducir estos valores en las dos fórmulas:

$$Xcentroide = \frac{A_1.X_1 + A_2.X_2 + A_3.X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$Ycentroide = \frac{A_1.Y_1 + A_2.Y_2 + A_3.Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

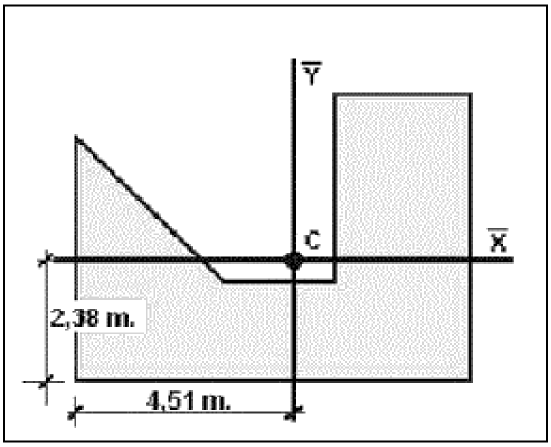
$$Xcentroide = \frac{(4{,}5)(1)\ + (16)(4) +\ (12)(6{,}5)}{4{,}5 + 16 + 12}$$

$$= \frac{4{,}5 + 64 + 78}{32{,}5} = \frac{146{,}5}{32{,}5} = 4{,}51$$

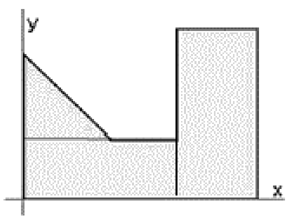
$$Ycentroide = \frac{(4{,}5)(3)\ + (16)(1) +\ (12)(4)}{4{,}5 + 16 + 12}$$

$$= \frac{13{,}5 + 16 + 48}{32{,}5} = \frac{77{,}5}{32{,}5} = 2{,}38$$

El Centroide de la figura completa estará ubicado en :



SUGERENCIA: *Divida la figura como se muestra a continuación y aplique los pasos anteriores. El resultado debe ser el mismo.*



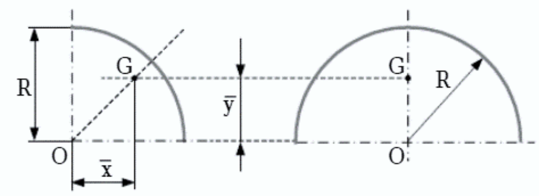
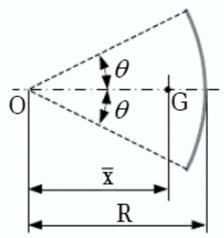
2.5 Centroides de líneas.

Esta propiedad permite determinar de inmediato el centroide de áreas como círculos, elipses, cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros u otras figuras simétricas, así como el centroide de líneas que tienen la forma de la circunferencia de un círculo etc.

Se dice que un área A es simétrica con respecto a un centro O si cada elemento de área dA de coordenadas x y y existe un elemento de área dA’ de igual superficie con coordenadas –x y –y, por lo tanto Qx=Qy= 0

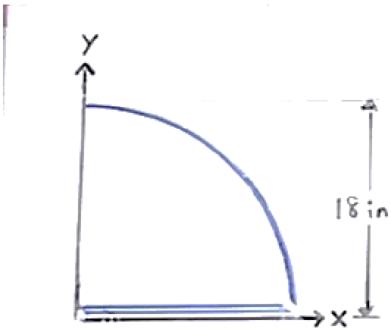
Se debe señalar que una figura con centro de simetría no necesariamente posee un eje de simetría. Sin embargo, si una figura posee dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí, en el punto de intersección de dichos ejes es un centro de simetría.

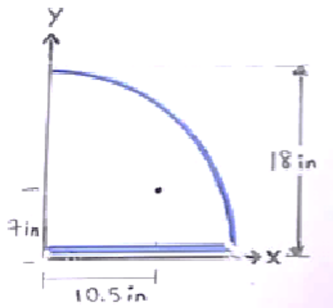
II.- Líneas

Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Cuarto de circunferencia		$\frac{2R}{\pi}$	$\frac{2R}{\pi}$	$\frac{\pi R}{2}$
Semi-circunferencia		0	$\frac{2R}{\pi}$	πR
Arco de circunferencia		$\frac{R\operatorname{sen}\theta}{\theta}$	0	$2\theta R$

2.6 Ejercicios de comprensión (centroides de líneas).

1.- Hallar el centroide en el eje X y Y de la siguiente línea.





$$l_1 = \frac{\pi r}{2}$$

$$l_1 = \frac{\pi(18)}{2}$$

$$l_1 = 28.27\,in$$

$$\bar{x} = \frac{2r}{\pi} = \frac{2(18)}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} = \frac{2(18)}{\pi}$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{matrix}\right\} 11.46\,in$$

Figura	l [in]	$\bar{x}$ [in]	$\bar{y}$ [in]	$\bar{x}l$ [in²]	$\bar{y}l$ [in²]
	28.27	11.46	11.46	324	324
	18	9	0	162	0
	46.27 Σl			486 $\Sigma \bar{x} l$	324 $\Sigma \bar{y} l$

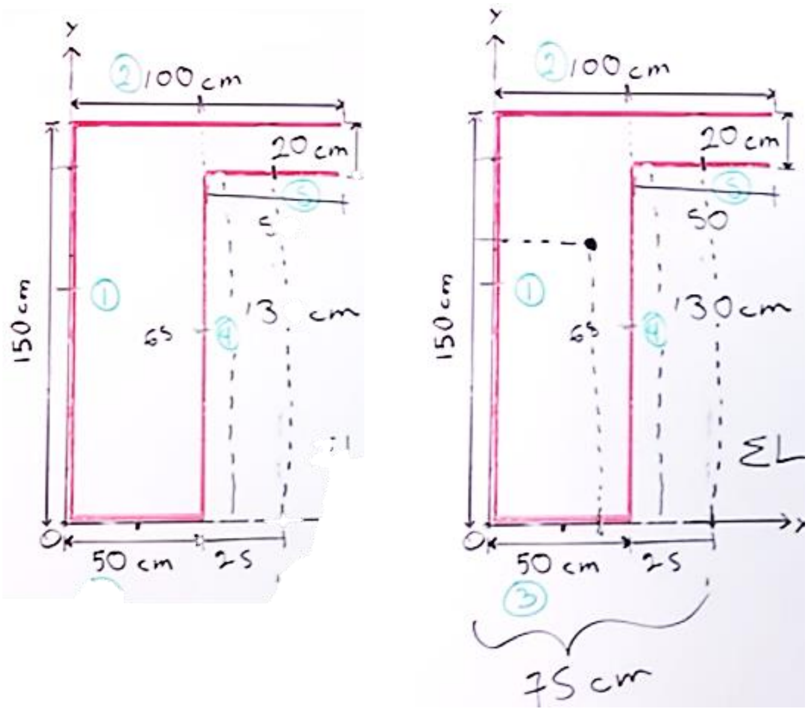
$$\bar{x} = \frac{486}{46.27}$$

$$\bar{y} = \frac{324}{46.27}$$

$$\boxed{\bar{x} = 10.5\,in}$$

$$\boxed{\bar{y} = 7\,in}$$

2.- Hallar el centroide en el eje X y Y de la siguiente línea.



$\bar{X} = 34.375 cm$
$\bar{y} = 85.83 cm$

Longitud	x	y	xL	y'
150	0	75	0	11,250
100	50	150	5,000	15,000
50	25	0	1,250	0
130	50	65	6,500	8,450
50	75	130	3,750	6500
$\Sigma L = 480$			$\Sigma xL = 16,500$	$\Sigma yL = 41,200$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xL}{\Sigma L} = \frac{16,500}{480} = 34.375 cm$$

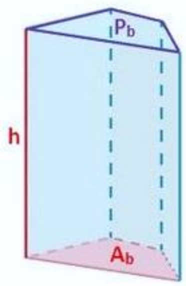
$$\bar{y} = \frac{\Sigma yL}{\Sigma L} = \frac{41,200}{480} = 85.83 cm$$

2.7 Superficies, volúmenes y actividades de comprensión.

Área. La magnitud de área es la medida de la región o superficie encerrada por de una figura geométrica.

Volumen. La medida que permite describir al grosor o tamaño que posee un determinado objeto, (lo que ocupa en el espacio el cuerpo). Asimismo, el término sirve para identificar a la magnitud física que informa sobre la extensión de un cuerpo en relación a tres dimensiones (alto, largo y ancho).

En matemáticas (especialmente geometría) y ciencias, a menudo necesitarás calcular el área de la superficie, el volumen o el perímetro de una variedad de formas. Ya sea una esfera o un círculo, un rectángulo o un cubo , una pirámide o un triángulo, cada forma tiene fórmulas específicas que debes seguir para obtener las medidas correctas.



- **Áreas:**

$$\boxed{A = A_l + 2 \cdot A_b}$$

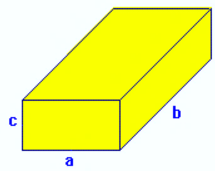
$$\boxed{A_l = P_b \cdot h}$$

- **Volumen:**

$$\boxed{V = A_b \cdot h}$$

- **Elementos:**
  A_b : Área de la base.
  A_l : Área lateral.
  P_b : Perímetro de la base.
  h : altura.

Como sabemos, un **ortoedro** es un prisma recto de base rectangular o cuadrada.



- **Área:**

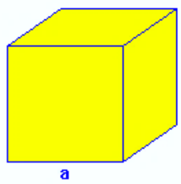
$$\boxed{A = 2ab + 2ac + 2bc}$$

- **Volumen:**

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

- **Elementos:**
  $a,\ b,\ c$: aristas.

Un caso particular de ortoedro es el **cubo** cuyas caras son todas cuadradas.



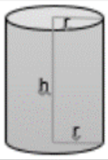
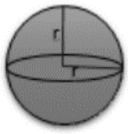
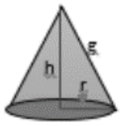
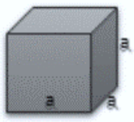
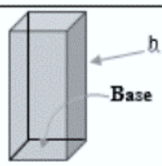
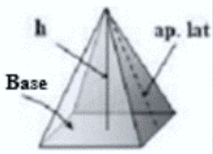
- **Área:**

$$\boxed{A = 6a^2}$$

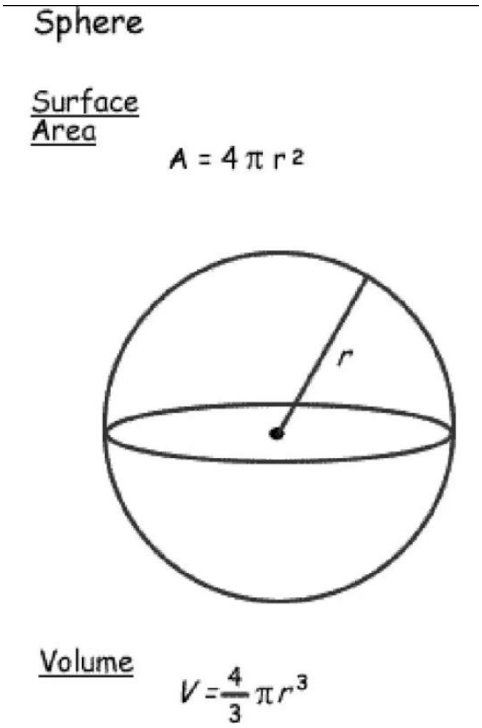
- **Volumen:**

$$\boxed{V = a^3}$$

- **Elementos:**
  a : arista.

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A = 2\pi * r * (h + r)$	$V = \pi * r^2 * h$
Esfera		$A = 4 * \pi * r^2$	$V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$
Cono		$A = \pi * r^2 + \pi * r * g$	$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$
Cubo		$A = 6 * a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (perim.base * h) + 2 * \acute{a}rea\ base$	$V = \acute{a}rea\ base * h$
Pirámide		$A = \frac{perim.base * ap.lat}{2} + \acute{a}rea\ base$	$V = \frac{\acute{a}rea\ base * h}{3}$

Actividades de compresión.



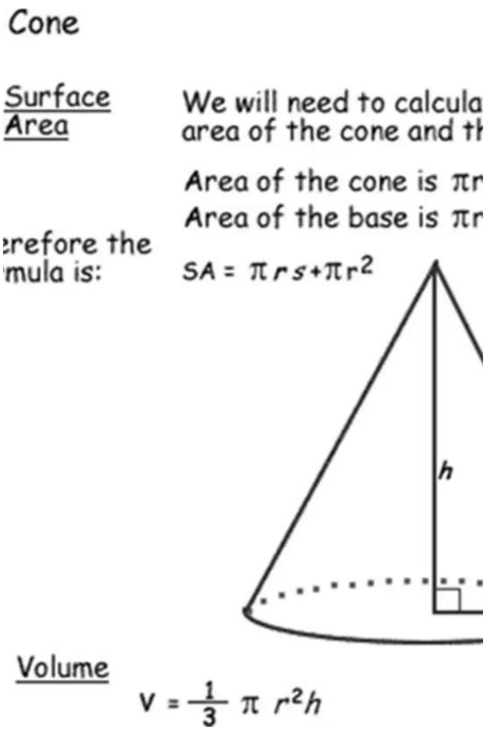
Un círculo tridimensional se conoce como esfera. Para calcular el área de la superficie o el volumen de una esfera, necesita conocer el radio (r). El radio es la distancia desde el centro de la esfera hasta el borde y siempre es el mismo, sin importar desde qué puntos del borde de la esfera midas.

Una vez que tenga el radio, las fórmulas son bastante simples de recordar. Al igual que con la circunferencia del círculo, tendrá que utilizar pi (π).

Generalmente, puede redondear este número infinito a 3,14 o 3,14159 (la fracción aceptada es 22/7).

Superficie = $4 \pi r^2$

Volumen = $4/3 \pi r^3$



Un cono es una pirámide con una base circular que tiene lados inclinados que se encuentran en un punto central. Para calcular su área de superficie o volumen, debe conocer el radio de la base y la longitud del lado.

Si no lo sabe, puede encontrar la (s) longitud(es) de los lados usando el radio (r) y la altura del cono (h).

s = √ (r2 + h2)

Con eso, puede encontrar el área de superficie total, que es la suma del área de la base y el área del lado.

Área de la base: πr^2

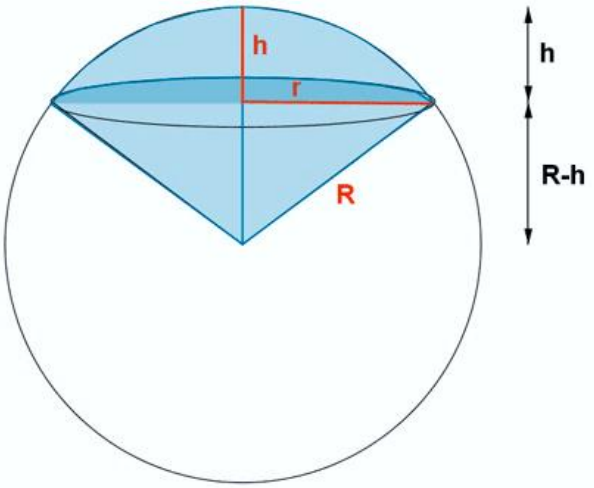
Área del lado: $\pi r s$

Superficie total = $\pi r^2 + \pi r s$

2.8 Figuras y cuerpos compuestos.

Se denominan cuerpos geométricos a aquellos elementos que, ya sean reales o ideales que existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente, ocupan un volumen en el espacio desarrollándose por lo tanto en las tres dimensiones de alto, ancho y largo; y están compuestos por figuras geométricas.

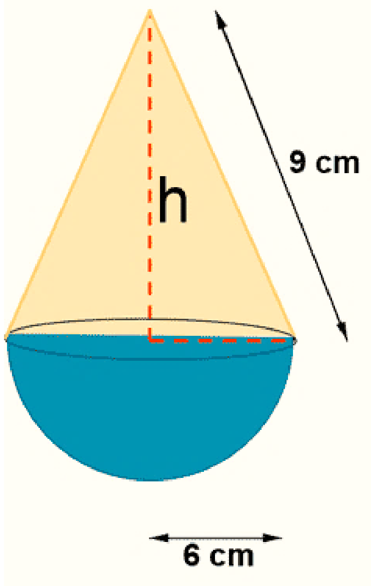
El volumen de un sector esférico es igual al ovlumen de un casquete esférico más el volumen del cono.



$$V = V_{\text{casquete esférico}} + V_{\text{cono}}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\,(3R-h) + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\,(R-h)$$

$$V = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h$$



$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \quad \Leftrightarrow \quad V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 6^3\right) = 144\pi\ \text{cm}^3$$

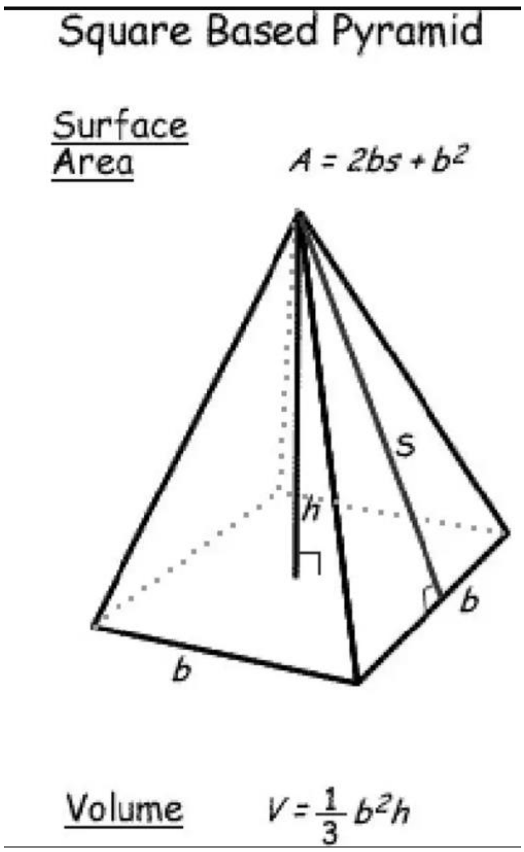
$$9^2 = h^2 + 6^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{9^2 - 6^2} \approx 6{,}7\ \text{cm}$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Leftrightarrow \quad V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 6{,}7 = 252{,}584\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cono}}$$

$$V_{\text{total}} = 144\pi + 252{,}584 = 704{,}97\ \text{cm}^3$$

2.9 Ejercicios de compresión (Figuras y cuerpos compuestos).



Es relativamente fácil trabajar con una pirámide con una base cuadrada y caras hechas de triángulos equiláteros.

Necesitará conocer la medida de una longitud de la base (b). La altura (h) es la distancia desde la base hasta el punto central de la pirámide. El(los) lado(s) es la longitud de una cara de la pirámide, desde la base hasta el punto superior.

Superficie = $2bs + b^2$

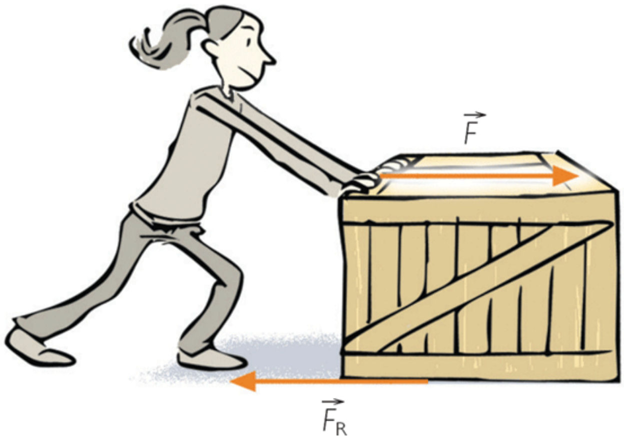
Volumen = $1/3\ b^2\ h$

Otra forma de calcular esto es usar el perímetro (P) y el área (A) de la forma base. Esto se puede usar en una pirámide que tenga una base rectangular en lugar de cuadrada.

Área de superficie = (½ x P xs) + A

Volumen = 1/3 Ah

2.10 Rozamiento.



La fuerza de rozamiento es una fuerza de resistencia al movimiento relativo de dos cuerpos en contacto. Un sólido que reposa sobre una superficie plana y horizontal está sometido a una reacción normal a la superficie que equilibra su fuerza peso; al aplicarle una fuerza horizontal creciente en intensidad, el cuerpo está en reposo pues tal fuerza queda equilibrada por una reacción tangencial del plano sobre el cuerpo; aumentando la intensidad de dicha fuerza, llega un instante en que el sólido empieza a deslizarse sobre la superficie: la resistencia de la superficie en este momento es proporcional a la reacción normal siendo μe el coeficiente de proporcionalidad, también llamado, coeficiente de rozamiento estático. Por analogía la fuerza de resistencia en este punto también lleva el nombre de fuerza de rozamiento estática.

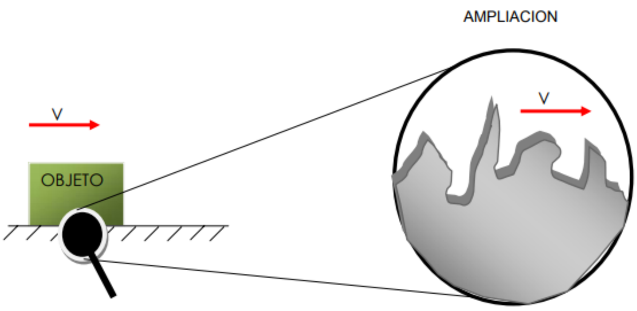
Si se supone que el movimiento ya está iniciado, se tiene que el rozamiento es también proporcional a la fuerza normal, pero el coeficiente de proporcionalidad μd, en este caso de rozamiento dinámico, es menor que el estático. Por tanto el rozamiento en el instante en que se inicia el movimiento es mayor que el valor que alcanza una vez que el movimiento está establecido.

Fenómeno de rozamiento

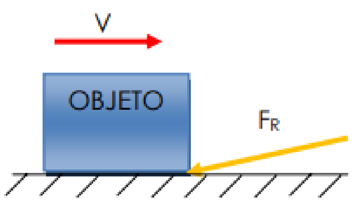
La mayoría de las superficies, aun las que se consideran pulidas son extremadamente rugosas a escala microscópica. Los picos de las dos superficies que se ponen en contacto determinan el área real de contacto que es una pequeña proporción del área aparente de contacto (el área de la base del bloque).

El área real de contacto aumenta cuando aumenta la presión (la fuerza normal) ya que los picos se deforman. Los metales tienden a soldarse en frío, debido a las fuerzas de atracción que ligan a las moléculas de una superficie con las moléculas de la otra. Estas soldaduras tienen que romperse para que el deslizamiento se produzca. Además, existe siempre la incrustación de los picos con los valles. Este es el origen del rozamiento estático.

Cuando el bloque desliza sobre el plano, las soldaduras en frío se rompen y se rehacen constantemente. Pero la cantidad de soldaduras que haya en cualquier momento se reduce por debajo del valor estático, de modo que el coeficiente de rozamiento cinético es menor que el coeficiente de rozamiento estático.



Es aquella fuerza que surge entre dos cuerpos cuando uno trata de moverse con respecto al otro. Esta fuerza siempre es contraria al movimiento o posible movimiento.



Las causas de la fricción son muy complejas para intentar un estudio teórico a partir del cual deducir expresiones para su evaluación, por ello se prefieren tratamientos empíricos, es decir, se realizan estudios experimentales, los cuales proveen ecuaciones para la determinación de la fricción. Estos estudios indican que la fuerza de fricción (f), es proporcional a la normal(N). Reacción del piso sobre el objeto.

La fuerza de rozamiento también se debe a:

- **Afinidades Moleculares.**
- **Atracción electroestática**

f a N

La fuerza de Rozamiento es directamente proporcional a la Normal

La igualdad de eta expresión se logra introduciendo una constante de proporcionalidad μ, denominada coeficiente de fricción o de rozamiento, entonces:

$$f = \mu N$$

Siendo μ una magnitud adimensional conocida como coeficiente de rozamiento estático. Su valor depende de los dos materiales que estén en contacto:

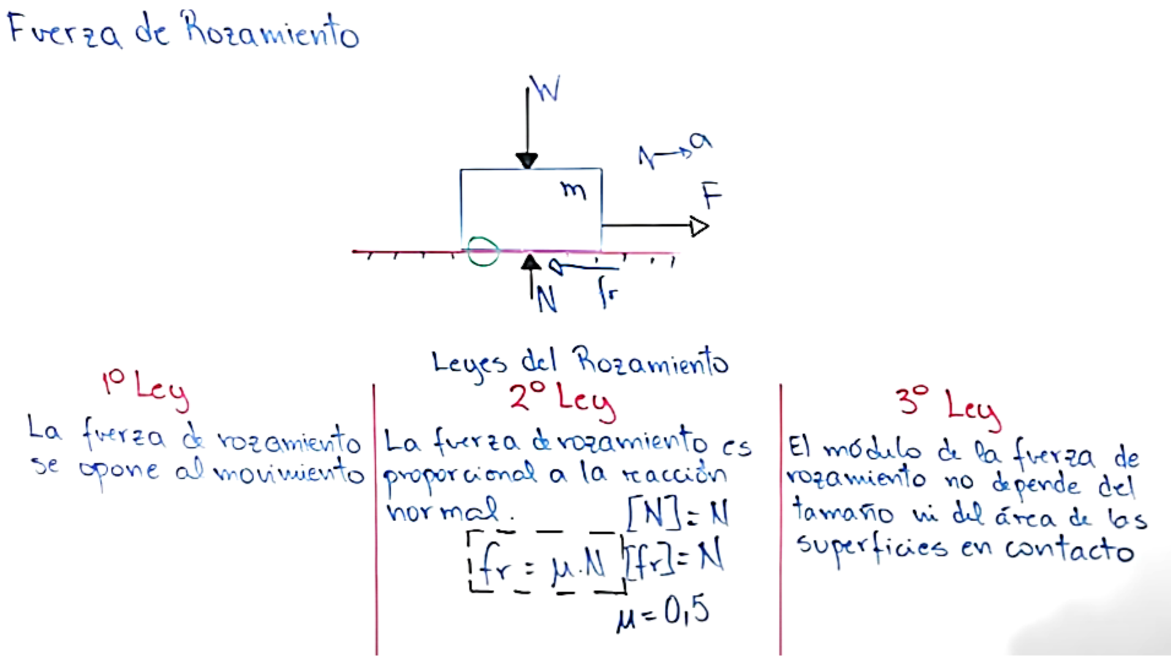
Coeficientes de rozamiento estático

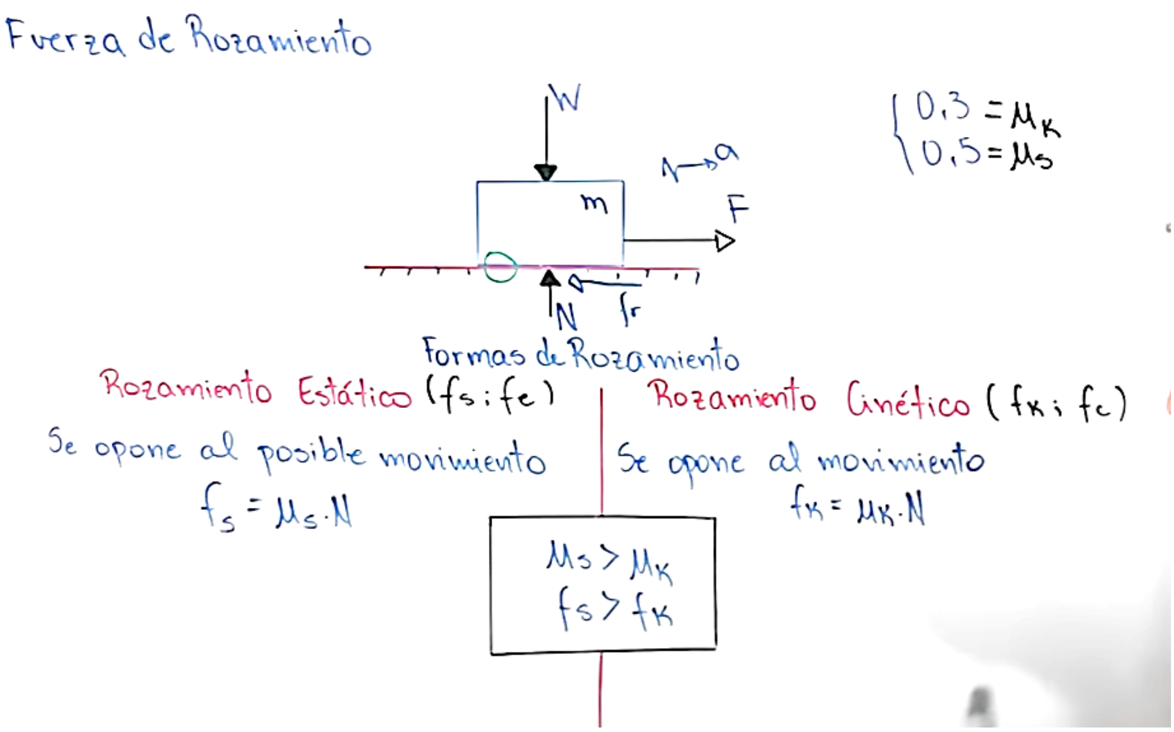
Material 1	Material 2	μ
Madera	Cemento	0.6
Madera	Madera	0.25-0.5
Goma	Cemento	1.0
Teflón	Teflón	0.04
Acero	Acero	0.80

Coeficientes de rozamiento dinámico

Material 1	Material	μ
Madera	Madera	0.4-0.5
Goma	Cemento	0.6-0.8
Teflón	Teflón	0.04
Acero	Acero	0.16

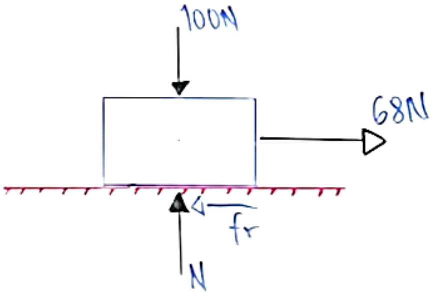
2.11 Ejercicios de compresión (Rozamiento).





Fuerza de Rozamiento

1 Un cuerpo de 10 Kg se encuentra sometido a una fuerza horizontal de 68N. Determinar si el cuerpo se mueve o no. $\mu = \begin{cases} 0{,}5 = \mu_K \\ 0{,}7 = \mu_S \end{cases}$



Eje y

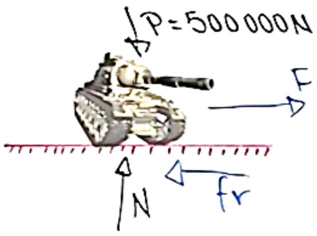
$$\sum F_y = 0$$
$$-100 + N = 0$$
$$N = 100\,N$$

Eje x

$$fr_S = \mu_S \cdot N$$
$$fr_S = 0{,}7 \cdot 100$$
$$fr_S = 70\,N$$

Fuerza de Rozamiento

1 Calcular la fuerza que se debe aplicar al tanque para moverlo, sabiendo que tiene una masa de 50 toneladas y que $\mu = \begin{cases} 0{,}4 \rightarrow \mu_K \\ 0{,}7 \rightarrow \mu_S \end{cases}$



$$\sum F_y = 0$$
$$-P + N = 0$$
$$N = P$$
$$N = 500\,000 \text{ Newton}$$

$$fr = \mu \cdot N$$
$$fr = 0{,}7 \cdot 500\,000$$
$$fr = 350\,000\,N$$

$F < 350\,000\,N \rightarrow$ el tanque no se mueve

$F = 350\,000\,N \rightarrow$ el tanque está a punto de moverse.

$F > 350\,000\,N \rightarrow$ el tanque se mueve.

Recurso:

http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/7721/COMPILACION%20DE%20EJERCICIOS%20DE%20ESTATICA.pdf?sequence=1

UNIDAD III

TRABAJO VIRTUAL

3.1 Introducción y conceptos.

Objetivo de la unidad

Realizar los procedimientos del método virtual aplicados a estructuras, para obtener sus desplazamientos y reacciones en los diferentes apoyos.

El Principio de Trabajos Virtuales (P.T.V.) fue utilizado por Galileo (1564-1642) para el diseño y cálculo de mecanismos y desarrollado teóricamente con un enunciado más matemático y formal por Lagrange (1736-1813), ya que desarrolla la teoría variacional y escribe su "Mecánica Analítica" donde coloca las bases de dicha disciplina. No obstante a lo anterior el núcleo teórico del P.T.V. fue enunciado por Santiago Bernouilli (1654-1705) y por Daniel Bernouilli (1700-1782): "Si una estructura, estando en equilibrio, sufre una deformación virtual debido a la acción de una carga adicional, el trabajo virtual externo de la carga en cuestión, es igual al trabajo virtual interno, desarrollado por las tensiones causadas por la carga"

Trabajo.

Trabajo Para empezar definiremos algunos conceptos que servirán de base al Principio de trabajos virtuales.

Trabajo de una Fuerza

Consideremos una partícula A, mostrada en la figura 7.1, que sufre un desplazamiento $d\vec{r}$ debido a la aplicación de una fuerza $\vec{F}$. La partícula material A, cuyo vector posición inicial es $\vec{r}$, pasa a ocupar la posición A' definida por el verctor $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$. El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ correspondiente al desplazamiento $\mathrm{d}\vec{r}$ se define como:

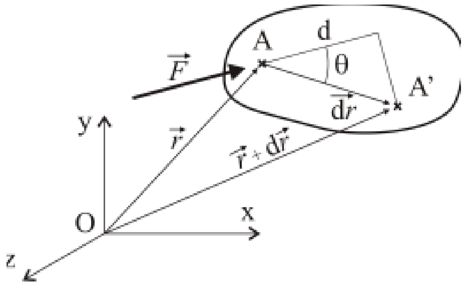


Figura 7.1: Trabajo de una Fuerza

$$\mathrm{d}U = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{7.1}$$

donde $\cdot$ es el producto escalar entre los vectores $\vec{F}$ y $\mathrm{d}\vec{r}$ que por definición es

$$\mathrm{d}U = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos(\theta) = F\mathrm{d} \tag{7.2}$$

donde F es el módulo del vector $\vec{F}$ y d la proyección del desplazamiento sobre la recta de acción de la fuerza.

Dado que el trabajo de una fuerza se obtiene a partir del producto escalar entre dos vectores, se obtiene como resultado una magnitud escalar, es decir, el trabajo de una fuerza tendrá magnitud y signo pero carecerá de dirección al no tratarse de una magnitud vectorial. La magnitud está dada por el valor absoluto del producto $\left|\vec{F}\right| \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = F\left|\mathrm{d}\right|$, mientras que el signo lo determina el valor de $\cos(\theta)$. Dicho de otra manera, cuando el sentido del vector desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, proyectado en la dirección de la misma, es contrario al sentido de dicha fuerza el trabajo será negativo. En la figura 7.2 se ilustran las tres posibilidades de trabajo que tiene una fuerza $\vec{F}$.

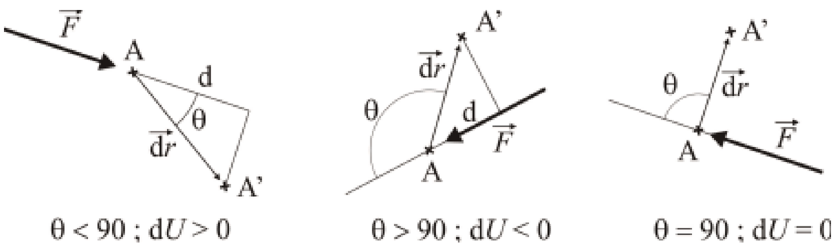


Figura 7.2: Signo del trabajo de una fuerza

3.2 Equilibrio de un cuerpo rígido.

Cuando un cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, que la resultante de todas las fuerzas y el momento resultante sean cero, entonces el cuerpo está en equilibrio. Esto, físicamente, significa que el cuerpo, a menos que esté en movimiento uniforme rectilíneo, no se trasladará ni podrá rotar bajo la acción de ese sistema de fuerzas.

Por ahora centraremos la atención en un solo cuerpo, posteriormente se estudiarán sistemas de varios cuerpos interconectados.
Las posibilidades de movimiento que tiene un cuerpo o los grados de libertad, son seis: tres de traslación, en las direcciones x, y, z y tres de rotación, alrededor de los mismos ejes. Como en general, los cuerpos que son objeto de estudio en ingeniería están unidos, soportados, en contacto con otros, las posibilidades de movimiento en translación y rotación son menores, esto es, disminuyen los grados de libertad. Es, entonces, importante conocer qué tipo de restricción ofrecen los apoyos, uniones o contactos que tiene el cuerpo objeto del análisis. Las restricciones a que es sometido un cuerpo, se manifiestan físicamente por fuerzas o pares (momentos) que impiden la translación o la rotación respectivamente y se les conoce como reacciones.

El estudio del equilibrio de un cuerpo rígido consiste básicamente en conocer todas las fuerzas, incluidos los pares que actúan sobre él para mantener ese estado.

Por ahora se analizarán las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, es decir las fuerzas que otros cuerpos, unidos o en contacto con él, le ejercen. Estas fuerzas son las fuerzas aplicadas por contacto, el peso y las reacciones de los apoyos. Las fuerzas aplicadas y el peso en general son conocidos, entonces el estudio del equilibrio consiste básicamente en la determinación de las reacciones. También puede ser objeto de estudio las condiciones geométricas que se requieren para mantener en equilibrio el cuerpo.

Para determinar las reacciones que se ejercen sobre un cuerpo es importante entender las restricciones que otros cuerpos le imponen al movimiento. La cuestión es fácil, si un cuerpo restringe la traslación en una dirección, por ejemplo, en x, éste ejercerá una fuerza en esta dirección; si impide la rotación alrededor de un eje, ejercerá un par en la dirección de ese eje.

Las reacciones ejercidas por diferentes apoyos o uniones se presentan en el cuadro al final de la sección, tanto para situaciones tridimensionales como para casos en dos dimensiones.

Ecuaciones de equilibrio

Como ya se dijo, un cuerpo está en equilibrio cuando el sistema de fuerzas se puede reducir a un sistema equivalente nulo Cualquier sistema de fuerzas se puede reducir a una fuerza resultante única y a un par resultante referidos a un punto arbitrariamente seleccionado.

Si la fuerza resultante es cero, el cuerpo, debido a las restricciones impuestas, no se podrá trasladar, perdiendo así tres grados de libertad; de otra parte, si el par resultante es cero, el cuerpo no rotará alrededor de cualquiera de los ejes coordenados. En forma vectorial, lo anterior se puede expresar así:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0$$

$$\sum \vec{\mathbf{M}}_0 = 0$$

Descomponiendo los vectores en sus componentes rectangulares se obtiene:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

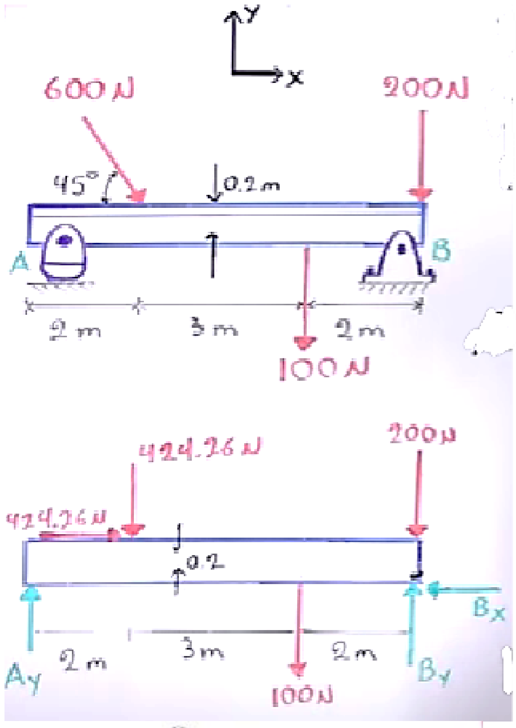
Estas ecuaciones independientes son las disponibles para resolver problemas de equilibrio de cuerpos en tres dimensiones. En problemas bidimensionales las ecuaciones se reducen a tres, número que corresponde a los grados de libertad de un movimiento plano; dos de translación y uno de rotación.

Si por ejemplo el plano en que actúan las fuerzas es el plano xy, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum Fx = 0, \quad \sum Fy = 0, \quad \sum Mz = 0$$

3.3 Ejercicios de comprensión (Equilibrio de un cuerpo rígido).

1.- Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en la siguiente viga.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$424.26 - B_x = 0$$

$$B_x = 424.26\ N$$

$$\boxed{B_x = 424.26\ N}$$

$$\boxed{A_y = 319.49\ N}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 424.26 - 100 - 200 + B_y = 0$$

$$A_y - 724.26 + B_y = 0$$

$$A_y + B_y = 724.26$$

$$B_y = 724.26 - 319.49$$

$$B_y = 404.76\ N$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$100(2) + 5(424.26) - 424.26(0.2) - A_y(7) = 0$$

$$2236.45 = 7A_y \rightarrow A_y = \frac{2236.45}{7}$$

$$A_y = 319.49\ N$$

3.4 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos.

Condiciones de Equilibrio:

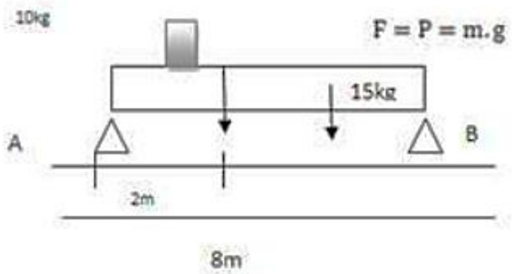
$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M}_0 = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

Aplicación de las condiciones de Equilibrio:



Elegir un punto como eje de rotación punto A.

$$-98N \times 2m \quad - 147N \times 4m \quad + \quad F_B \times 8m = 0$$

$$-196\ Nm \quad - 588\ Nm \quad + \quad 8mF_B = 0$$

$$-784Nm + 8m\ F_B = 0$$

$$8mF_B = 784N.m$$

$$F_B = \frac{784Nm}{8m}$$

$$\boxed{F_B = 98N}$$

$$F_A - 98N - 147N + F_B = 0$$

$$F_A = 245N + F_B$$

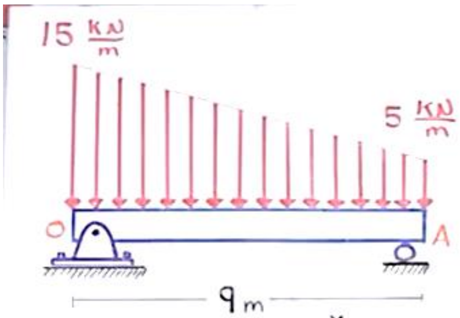
$$F_A + F_B = 245N$$

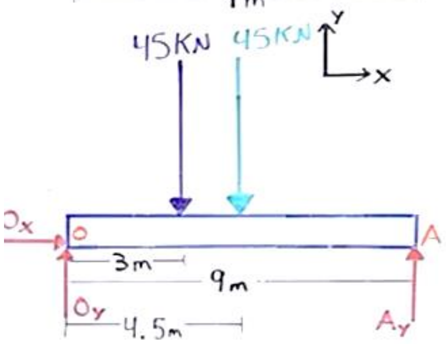
$$F_A + 98N = 245N$$

$$F_A = 245N - 98N$$

$$\boxed{F_A = 147N}$$

2.- Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en la siguiente viga.





$F_{\square} = 45\ KN$

$F_{\triangle} = 45\ KN$

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$O_y + A_y - 90 = 0$

$O_y + A_y = 90$

$\Sigma M_o = 0$

$M_o^{\triangle} = 135\ KN \cdot m$

$M_o^{\square} = 202.5\ KN\, m$

$M_o^{A_y} = 9A_y\ KN\, m$

$9A_y - 135 - 202.5 = 0$

$A_y = \frac{337.5}{9}$

$\Sigma F_x = 0$ $\quad O_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad A_y = 37.5\ KN$

$O_y + A_y - 90 = 0$ $\quad O_y = 52.5\ KN$

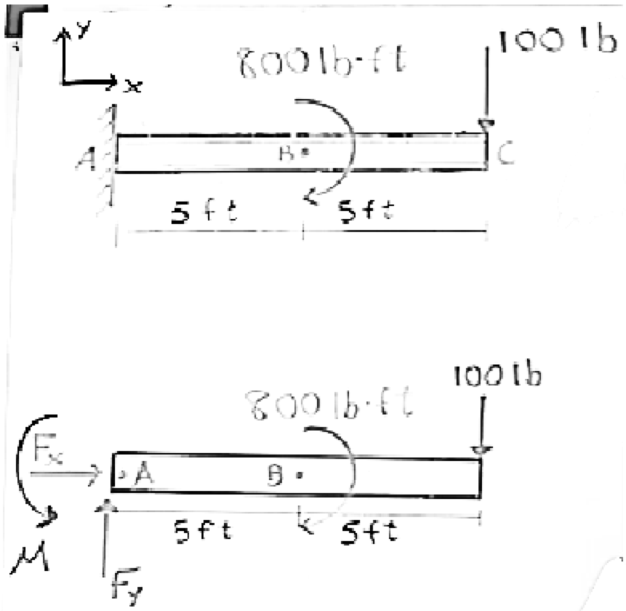
$O_y + A_y = 90$

$O_y = 90 - A_y$

$O_y = 90 - 37.5$

3.5 Ejercicios de comprensión complejos (Equilibrio de un cuerpo rígido).

1.- Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en la siguiente viga.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_y - 100 = 0$$

$$F_y = 100\,lb$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M - 800 - 100(10) = 0$$

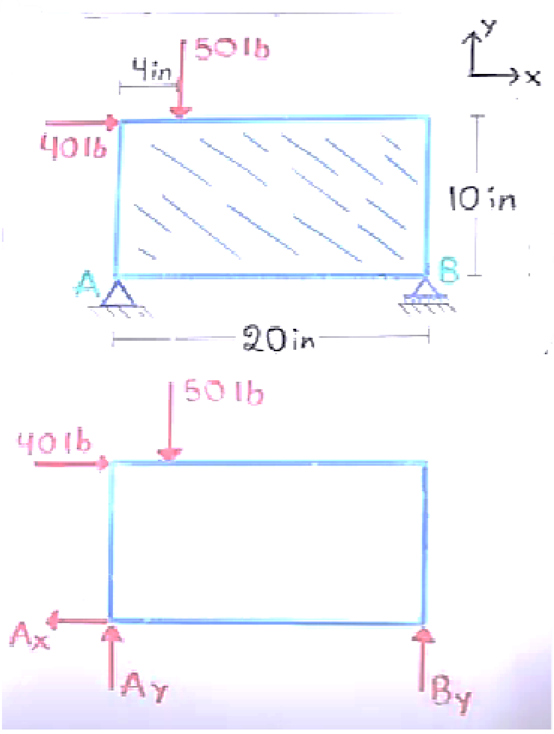
$$M = 1800\,lb\cdot ft$$

$$F_x = 0\,lb$$

$$F_y = 100\,lb$$

$$M = 1{,}800\,lb\cdot ft$$

2.- Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en la siguiente viga.



$$\sum F_x = 0$$

$$40 - A_x = 0$$

$$A_x = 40\ \text{lb} \qquad A_y = 20\ \text{lb}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-A_y(20) - 40(10) + 50(16) = 0$$

$$A_y = \frac{-40(10) + 50(16)}{20}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad B_y = 30\ \text{lb}$$

$$A_y + B_y - 50 = 0 \qquad A = 44.7\ \text{lb}$$

$$B_y = 50 - 20 \qquad \theta = 26.56^\circ$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{20}{40}\right)$$

3.6 Sistemas con rozamiento.

El rozamiento entre dos superficies en contacto ha sido aprovechado por nuestros antepasados más remotos para hacer fuego frotando maderas. En nuestra época, el rozamiento tiene una gran importancia económica, se estima que si se le prestase mayor atención se podría ahorrar muchísima energía y recursos económicos.

Históricamente, el estudio del rozamiento comienza con Leonardo da Vinci que dedujo las leyes que gobiernan el movimiento de un bloque rectangular que desliza sobre una superficie plana. Sin embargo, este estudio pasó desapercibido.

La fuerza de rozamiento se opone al movimiento de un bloque que desliza sobre un plano.

La fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal que ejerce el plano sobre el bloque.

La fuerza de rozamiento no depende del área aparente de contacto.

El científico francés Coulomb añadió una propiedad más

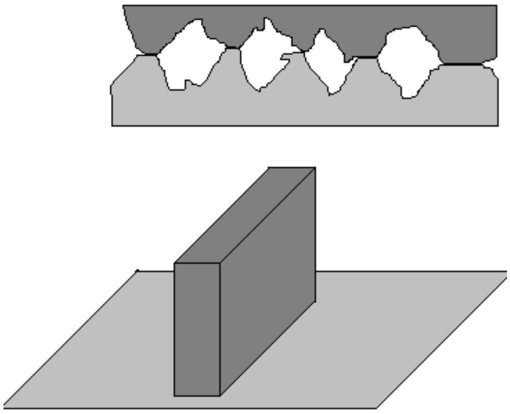
Una vez empezado el movimiento, la fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad.

Los metales tienden a soldarse en frío, debido a las fuerzas de atracción que ligan a las moléculas de una superficie con las moléculas de la otra. Estas soldaduras tienen que romperse para que el deslizamiento se produzca. Además, existe siempre la incrustación de los picos con los valles. Este es el origen del rozamiento estático.

Cuando el bloque desliza sobre el plano, las soldaduras en frío se rompen y se rehacen constantemente. Pero la cantidad de soldaduras que hay en cualquier momento se reduce por debajo del valor estático, de modo que el coeficiente cinético es menor que el coeficiente estático.

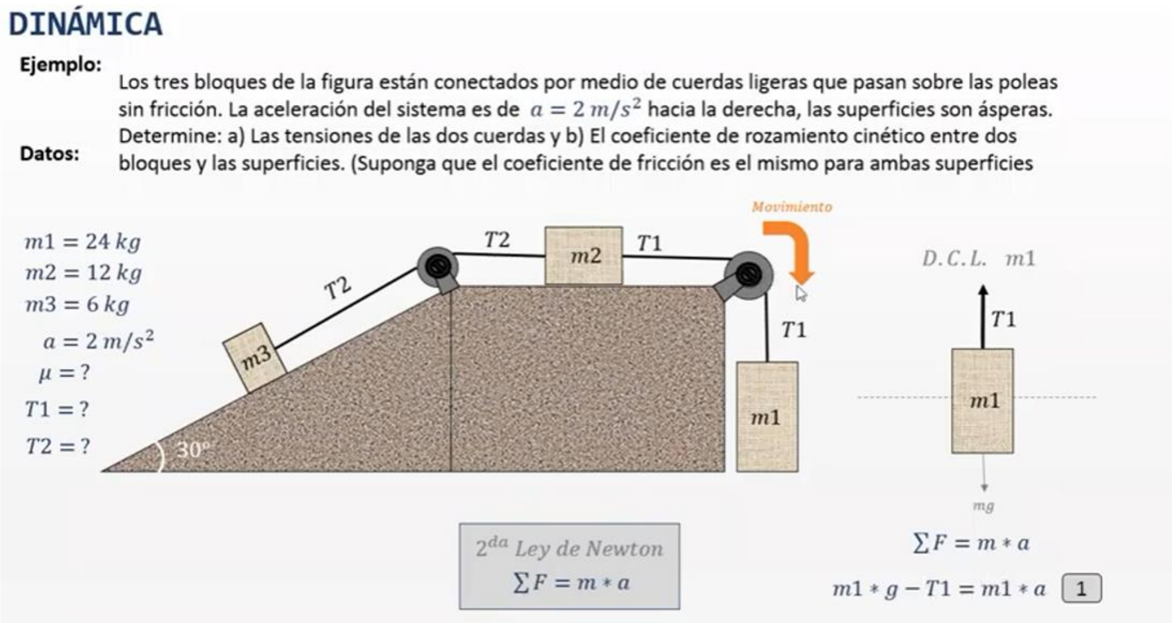
Finalmente, la presencia de aceite o de grasa en las superficies en contacto evita las soldaduras al revestirlas de un material inerte.

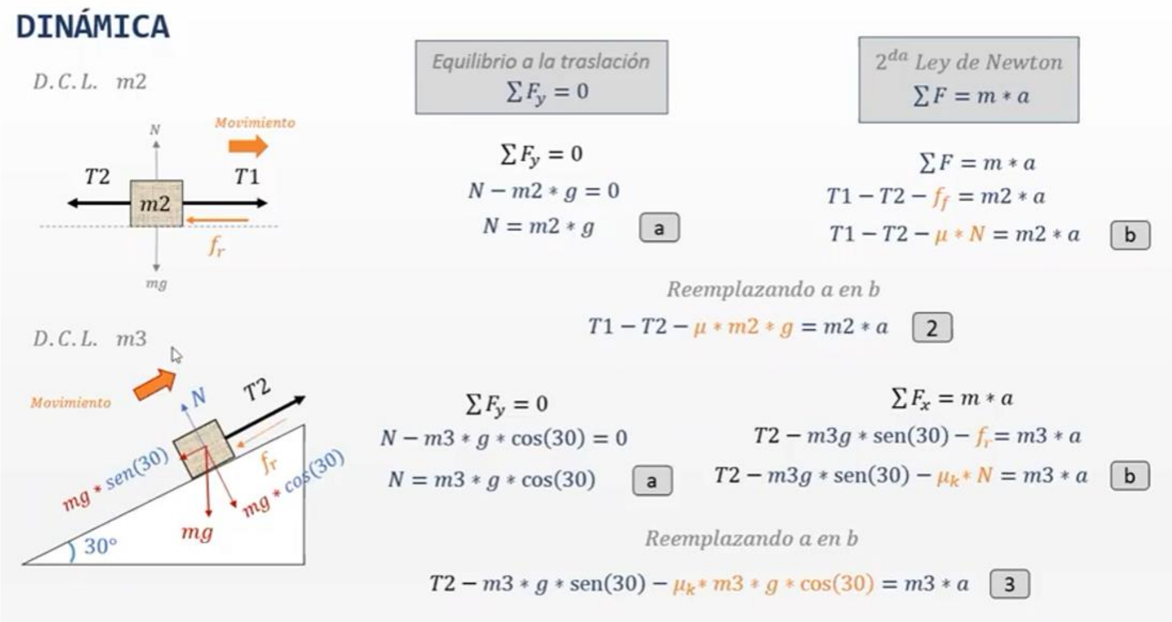
La explicación de que es la siguiente:



En la figura, la superficie más pequeña de un bloque está situada sobre un plano. En el dibujo situado arriba, vemos un esquema de lo que se vería al microscopio: grandes deformaciones de los picos de las dos superficies que están en contacto. Por cada unidad de superficie del bloque, el área de contacto real es relativamente grande (aunque esta es una pequeña fracción de la superficie aparente de contacto, es decir, el área de la base del bloque).

3.7 Ejercicios de comprensión (Sistemas con rozamiento).





DINÁMICA

Sumando 1, 2 y 3

$$m1 * g - \cancel{T1} = m1 * a$$

$$+ \quad \cancel{T1} - \cancel{T2} - \mu_k * m2 * g = m2 * a$$

$$\cancel{T2} - m3 * g * \text{sen}(30) - \mu_k * m3 * g * \cos(30) = m3 * a$$

$$m1 * g - \mu_k * m2 * g - m3 * g * \text{sen}(30) - \mu_k * m3 * g * \cos(30) = m1 * a + m2 * a + m3 * a$$

$$g * (m1 - m3 * \text{sen}(30)) - g * \mu_k * (m2 + m3 * \cos(30)) = a * (m1 + m2 + m3)$$

$$g * (m1 - m3 * \text{sen}(30)) - a * (m1 + m2 + m3) = g * \mu_k * (m2 + m3 * \cos(30))$$

$$\mu_k = \frac{g * (m1 - m3 * \text{sen}(30)) - a * (m1 + m2 + m3)}{g * (m2 + m3 * \cos(30))}$$

$$\mu_k = \frac{9.81\, m/s^2 (24 - 6 * \text{sen}(30))kg - 2\, m/s^2 * (24 + 12 + 6)kg}{9.81\, m/s^2 (12 + 6 * \cos(30))kg}$$

$\mu_k = 0.723$ *Coeficiente de rozamiento cinético*

DINÁMICA

Datos:

$m1 = 24\, kg$

$m2 = 12\, kg$

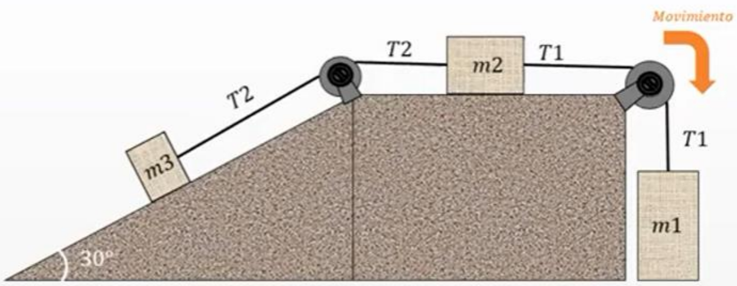
$m3 = 6\, kg$

$a = 2\, m/s^2$

$\mu = ?$

$T1 = ?$

$T2 = ?$



Coeficiente de rozamiento cinético

$\mu_k = 0.723$

Calculando T1

$$m1 * g - T1 = m1 * a \quad \boxed{1}$$

$$m1 * g - m1 * a = T1$$

$$T1 = m1 * (g - a)$$

$$T1 = 24\, kg * (9.81 - 2)\, m/s^2$$

$$T1 = 187.44\, N$$

Calculando T2

$$T1 - T2 - \mu * m2 * g = m2 * a \quad \boxed{2}$$

$$T1 - \mu * m2 * g - m2 * a = T2$$

$$T2 = T1 - m2 * (\mu * g + a)$$

$$T2 = 187.44\, N - 12\, kg * (0.723 * 9.81 + 2)\, m/s^2$$

$$T2 = 78.33\, N$$

3.8 Estabilidad del equilibrio.

Cada día vemos y tocamos multitud de objetos. Los vemos situados en un lugar concreto, los cogemos para utilizarlos, los movemos, etc. Lo cual implica un contacto de los objetos entre sí o con nosotros, que provoca su movimiento o bien simplemente el reposo.

Las acciones que actúan sobre los cuerpos y que provocan su movimiento o reposo se llaman fuerzas.

Las acciones, sin embargo, también pueden ser ejercidas a distancia, sin que haya contacto físico entre dos cuerpos. Éste es el caso de los imanes.

Las fuerzas son magnitudes vectoriales, ya que no basta con definir el valor con un número y las unidades correspondientes. Así, vemos que una misma fuerza, según cómo se aplique, puede provocar efectos muy diferentes. En la figura 1.4 se muestra una fuerza que actúa sobre una mesa. En el primer caso puede provocarle un movimiento hacia la derecha; en el segundo, hacia la izquierda; en el tercero puede, incluso, llegar a levantarla, si es mayor que el peso de la mesa.

En el caso de la fuerza aplicada en el ejemplo de la mesa, la dirección sería la línea horizontal en los dos primeros casos, y la línea vertical en el tercero.
La unidad de fuerza en el sistema internacional es el newton (N). El newton se define como la fuerza que hay que aplicar a una masa de un kilogramo (kg) para que adquiera una aceleración de un metro por segundo cada segundo (m/s2).

En unidades del sistema internacional el newton se expresa de la siguiente manera:
1 N = 1 kg·m·s/2
Se emplean, además, otras unidades. Es frecuente la utilización del kilogramo fuerza o kilopondio (kp), la libra (lb), etc. En la tabla 1.1 encontrarás las equivalencias entre unas y otras. Es conveniente que sepas pasar de un tipo de unidad a otra, mediante la utilización de factores de conversión.

Unidad	Equivalencia
1 newton (N)	1 newton (N)
1 kilonewton (kN)	1 000 N
1 kilopondio (1 kp)	9,8 N
1 tonelada fuerza (1 tn)	1 000 kp
1 libra (lb)	0,454 kp
1 libra (lb)	4,448 N

Tabla 1.1. *Equivalencias entre unidades.*

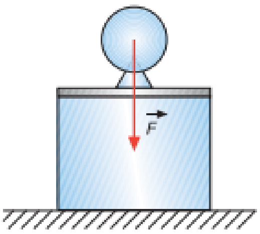


Fig. 1.5

El peso de la figura 1.5 puede ser representado por una fuerza $\vec{F}$ de módulo 100 N; exprésala en kp, tn, lb y kN.

Solución

$$100\ \text{N} \cdot \frac{1\ \text{kp}}{9{,}8\ \text{N}} = \mathbf{10{,}204\ kp}$$

$$100\ \text{N} \cdot \frac{1\ \text{kp}}{9{,}8\ \text{N}} \cdot \frac{1\ \text{tn}}{1\,000\ \text{kp}} = \mathbf{0{,}010204\ tn}$$

$$100\ \text{N} \cdot \frac{1\ \text{lb}}{4{,}448\ \text{N}} = \mathbf{22{,}482\ lb}$$

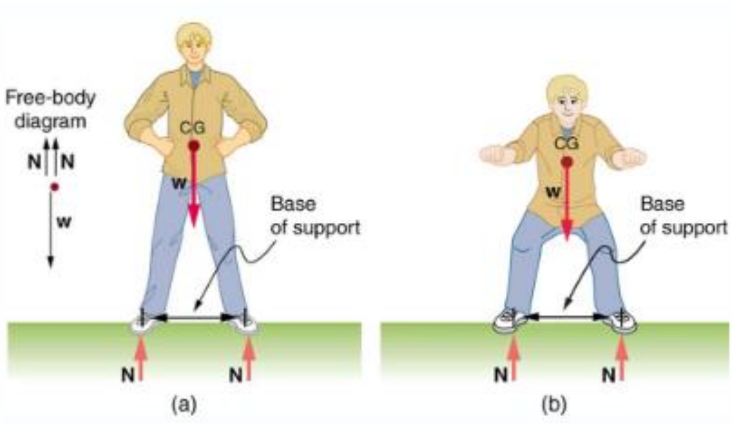
$$100\ \text{N} \cdot \frac{1\ \text{kN}}{1\,000\ \text{N}} = \mathbf{0{,}1\ kN}$$

Un punto de equilibrio es estable si, para pequeñas perturbaciones fuera de éste, el sistema siempre permanece en una región finita que rodea dicho punto. Si, además, al final el sistema retorna siempre al punto de equilibrio, se dice que este último es asintóticamente estable.

Un sistema es inestable respecto a un punto de equilibrio dentro de una región que rodea al punto de equilibrio si existe siempre alguna pequeña perturbación dentro de esta zona por la cual el sistema se sale de la misma. Un sistema puede ser globalmente estable, toda vez que su estabilidad no se limita a pequeñas alteraciones dentro de regiones finitas del espacio de estado.

Muchos sistemas no-lineales presentan estabilidad local, esto es, se comportan de manera estable en regiones disyuntas del espacio de estado, pasando por medio de alteraciones bastante grandes de una región de estabilidad a otra

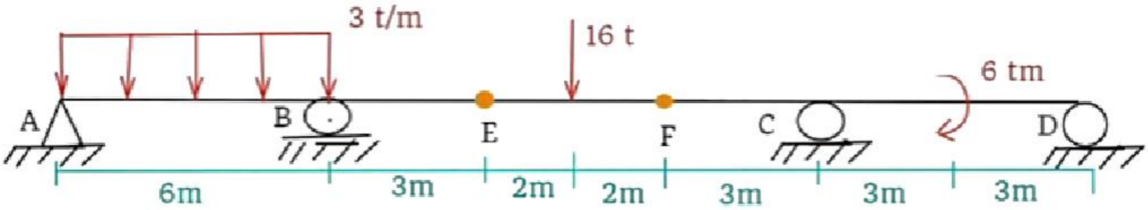
En el cuerpo humano la base de sustentación (BS) queda delimitada por los márgenes externos del apoyo de los dos pies y todo lo que queda entre ellos (figura 3.1.2). Modificando la posición de los pies se puede cambiar la forma y el tamaño de la base de sustentación. Al apoyarse en objetos externos, como las muletas, se incrementa la base de sustentación.



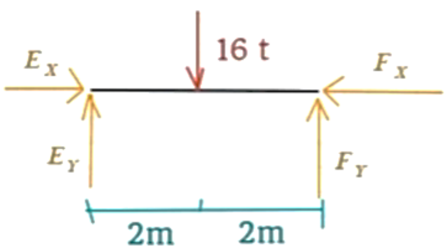
Cada una de las aristas del polígono que forma la BS se llama "arista de caída", ya que en caso de desequilibrio es el lugar por donde es más probable que bascule y caiga el cuerpo.

3.9 Ejercicios de comprensión (estabilidad del equilibrio).

Ejemplo 9: Calcules las reacciones en A, B, C, D, E y F.



1) DCL Tramo E-F

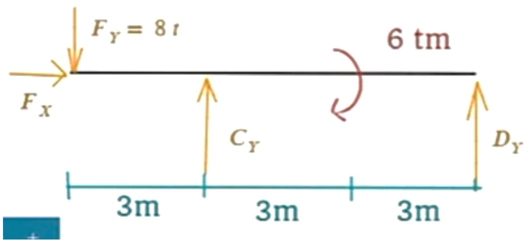


$$\sum_{i=0}^{n} M_{E_i}=0 \qquad F_Y*4=16*2 \rightarrow \boxed{F_Y=8\,t}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{Y_i}=0 \qquad E_Y+8t=16\,t \rightarrow \boxed{E_Y=8\,t}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{X_i}=0 \qquad E_X=F_X$$

2) DCL Tramo F-D

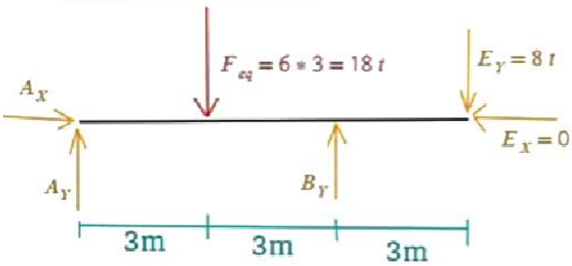


$$\sum_{i=0}^{n} M_{D_i}=0 \qquad C_Y*6+6=8*9 \rightarrow \boxed{C_Y=11\,t}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{Y_i}=0 \qquad 11+D_Y=8 \rightarrow \boxed{D_Y=-11\,t}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{X_i}=0 \qquad F_X=E_X=0$$

3) DCL Tramo A-E



$$\sum_{i=0}^{n} M_{A_i}=0 \qquad B_Y*6=18*3+8*9 \rightarrow \boxed{B_Y=21\,t}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{Y_i}=0 \qquad A_Y+21=18+8 \rightarrow \boxed{A_Y=5\,t}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{X_i}=0 \qquad \boxed{A_X=E_X=0\,t}$$

4) Respuestas

$\uparrow A_Y=5\,t$ $A_X=0\,t$

$\uparrow B_Y=21\,t$

$\uparrow C_Y=11\,t$

$\downarrow D_Y=3\,t$

$E_Y=8\,t$ $E_X=0\,t$

$F_Y=8\,t$ $F_X=0\,t$

3.10 Centro de gravedad (aplicación digital).

AutoCAD Centroides:

1.- Dibujar el polígono deseado con el comando línea **(LI).**

2.- Crea una región con el comando **(REG)** y seleccionar todo el polígono.

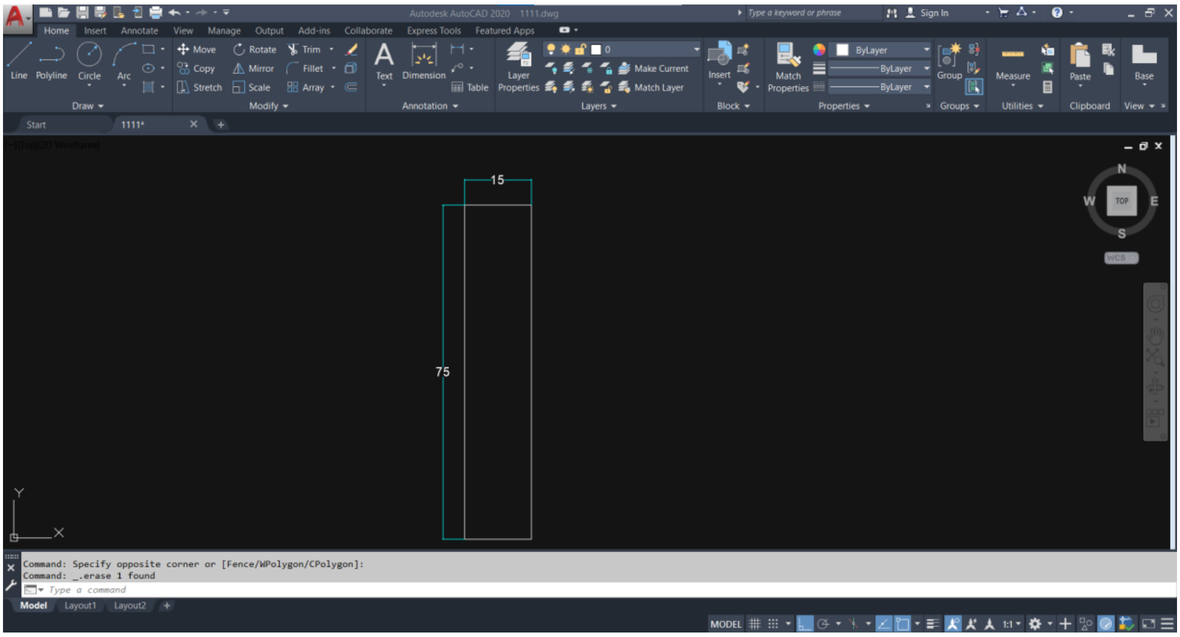
3.- Mover el polígono a las coordenadas X= 0 Y= 0 y Z= 0 desde el punto de inicio del polígono.

Con el comando mover **(M)** y digitalizando el siguiente texto con la ubicación de las coordenadas #0,0,0 / Enter.

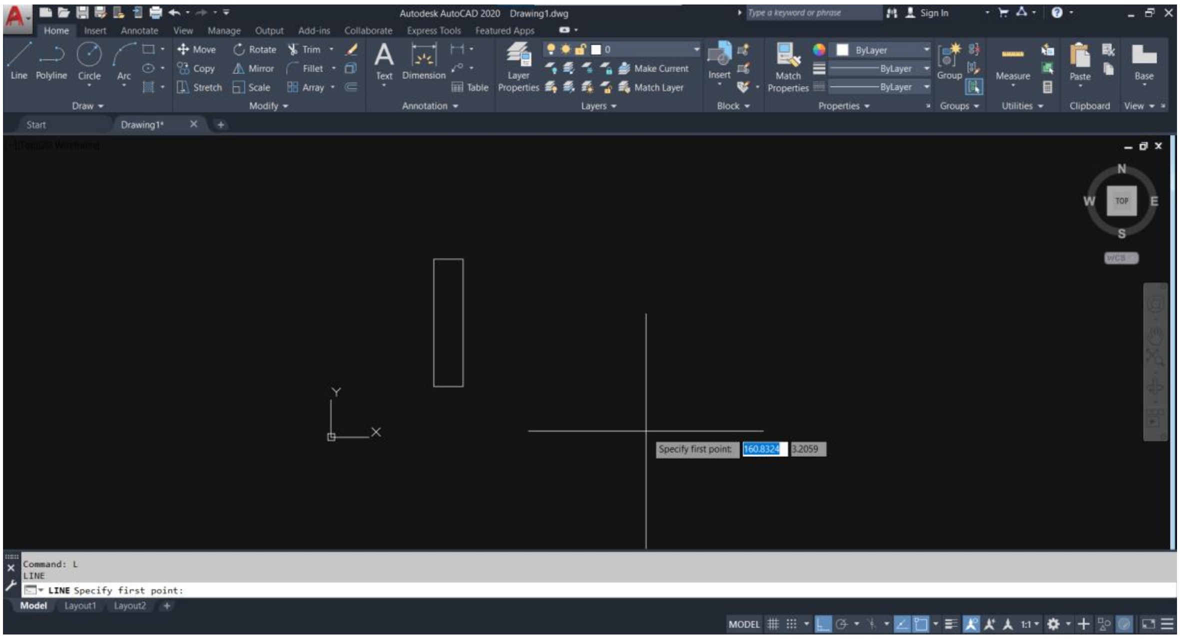
4.- Digitalizar el comando **(MASSPROP)** Seleccionar el polígono y enter.

El la ventana abierta estarán los datos de perímetro, área y centroides en los ejes X y Y.

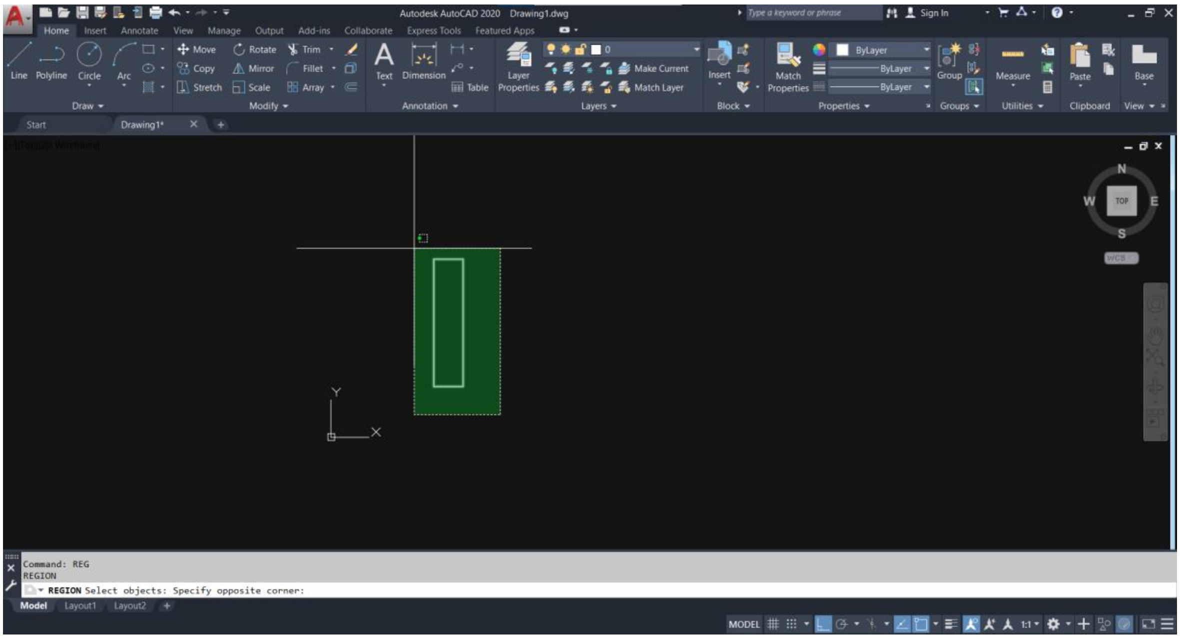
3.11 Ejercicios de comprensión (aplicación digital).



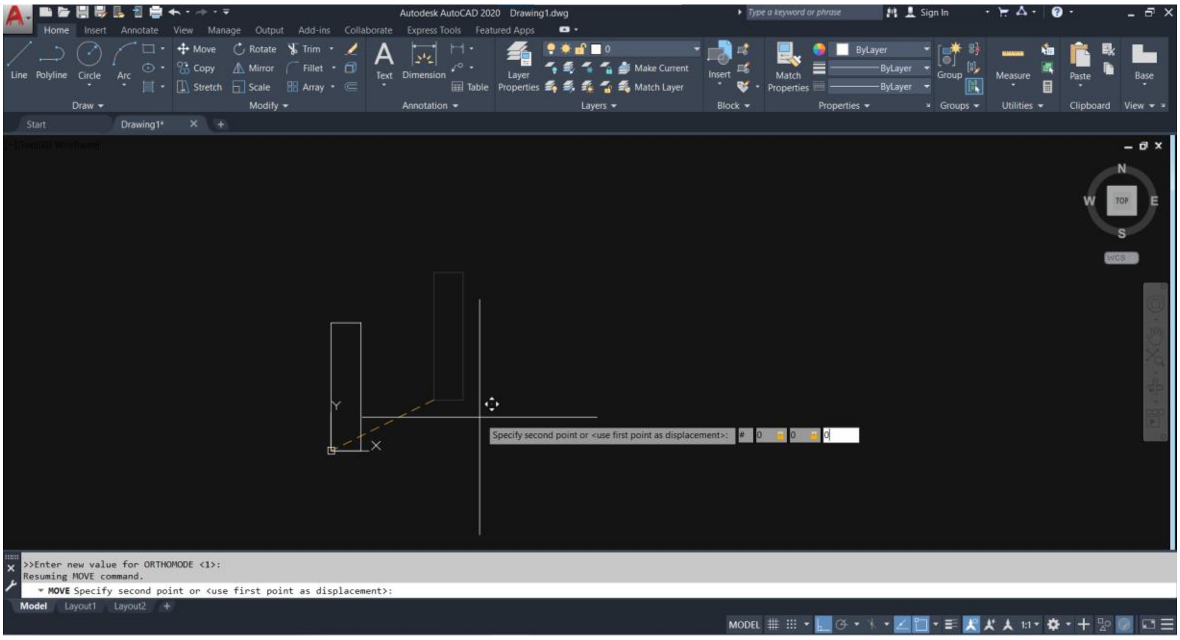
1.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Specify first point: 160.8324 3.2059
Command: L
LINE
LINE Specify first point:

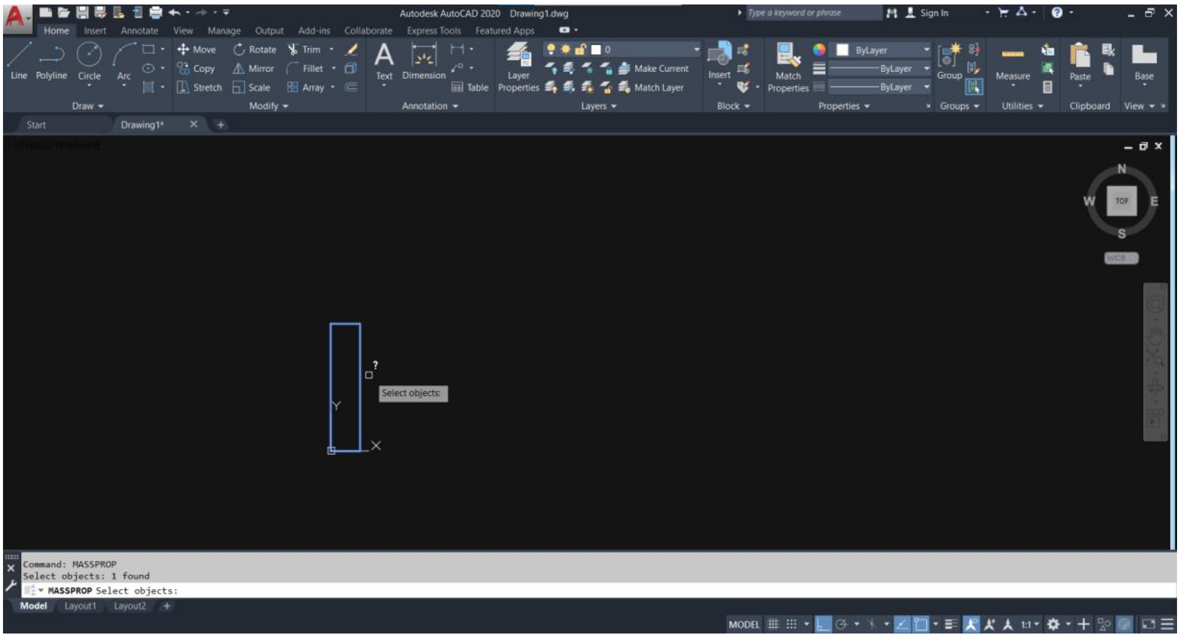
2.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Command: REG
REGION
REGION Select objects: Specify opposite corner:

3.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Home Insert Annotate View Manage Output Add-ins Collaborate Express Tools Featured Apps
Line Polyline Circle Arc
Move Rotate Trim Copy Mirror Fillet Stretch Scale Array
Text Dimension Table
Layer Properties Make Current Match Layer
Insert Match Properties ByLayer Group Measure Paste Base
Draw Modify Annotation Layers Block Properties Groups Utilities Clipboard View
Start Drawing1*
Specify second point or <use first point as displacement>:
>>Enter new value for ORTHOMODE <1>:
Resuming MOVE command.
MOVE Specify second point or <use first point as displacement>:
Model Layout1 Layout2
MODEL

4.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Home Insert Annotate View Manage Output Add-ins Collaborate Express Tools Featured Apps
Line Polyline Circle Arc
Move Rotate Trim Copy Mirror Fillet Stretch Scale Array
Text Dimension Table
Layer Properties Make Current Match Layer
Insert Match Properties ByLayer Group Measure Paste Base
Draw Modify Annotation Layers Block Properties Groups Utilities Clipboard View
Start Drawing1*
Select objects:
Command: MASSPROP
Select objects: 1 found
MASSPROP Select objects:
Model Layout1 Layout2
MODEL

Ventana MASSPROP

AutoCAD Text Window - Drawing1.dwg

Edit

```
Command: MASSPROP

Select objects: 1 found

Select objects:
 ----------------   REGIONS   ----------------

Area:                     975.0000
Perimeter:                160.0000
Bounding box:          X: 0.0000  --  15.0000
                       Y: 0.0000  --  65.0000
Centroid:              X: 7.5000
                       Y: 32.5000
Moments of inertia:    X: 1373125.0000
                       Y: 73125.0000
Product of inertia:   XY: -237656.2500
Radii of gyration:     X: 37.5278
                       Y: 8.6603
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                       I: 343281.2500 along [1.0000 0.0000]
                       J: 18281.2500 along [0.0000 1.0000]

Write analysis to a file? [Yes/No] <N>:
```

3.12 Superficies y volúmenes (aplicación digital).

AutoCAD Superficies y volúmenes:

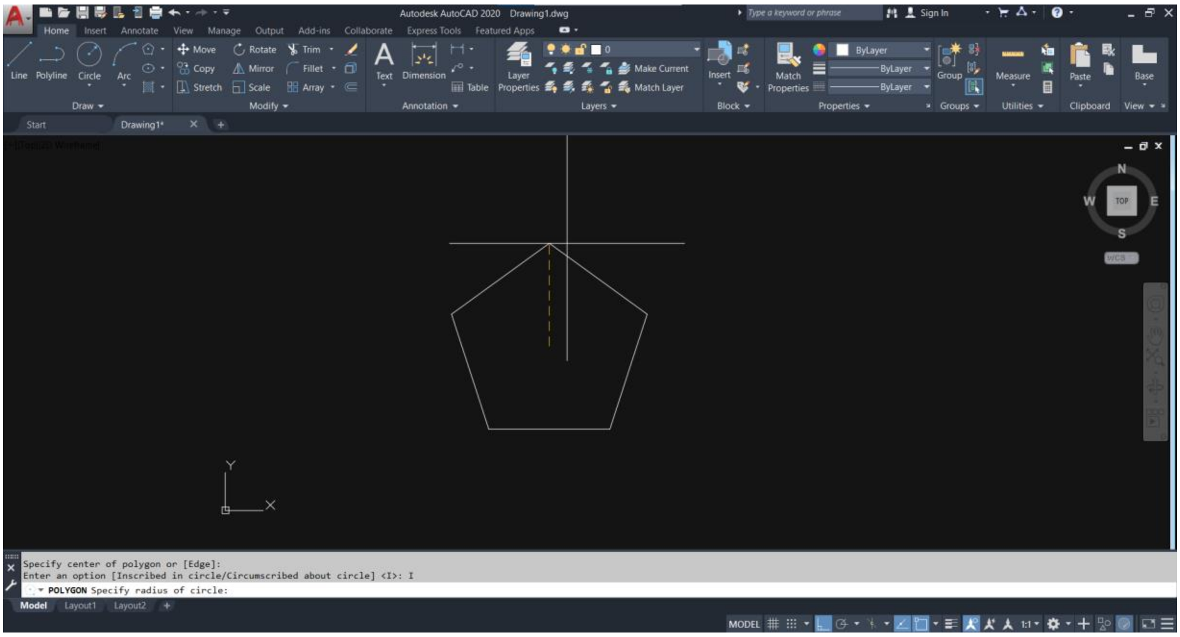
1.- Dibujar el polígono deseado con el comando polilínea **(Pl)** o polígono **(POL)**

2.- Digitalizar el comando Lista **(LI)** Seleccionar el polígono y enter.

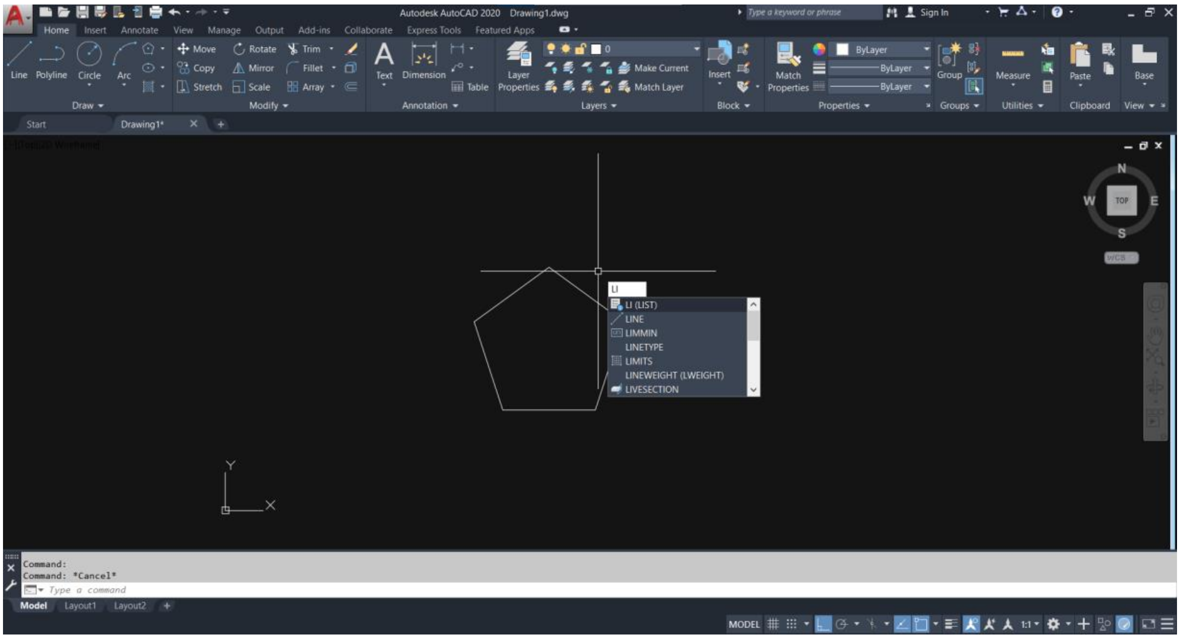
El la ventana abierta estarán los datos de perímetro y área.

3.13 Ejercicios de comprensión (aplicación digital).

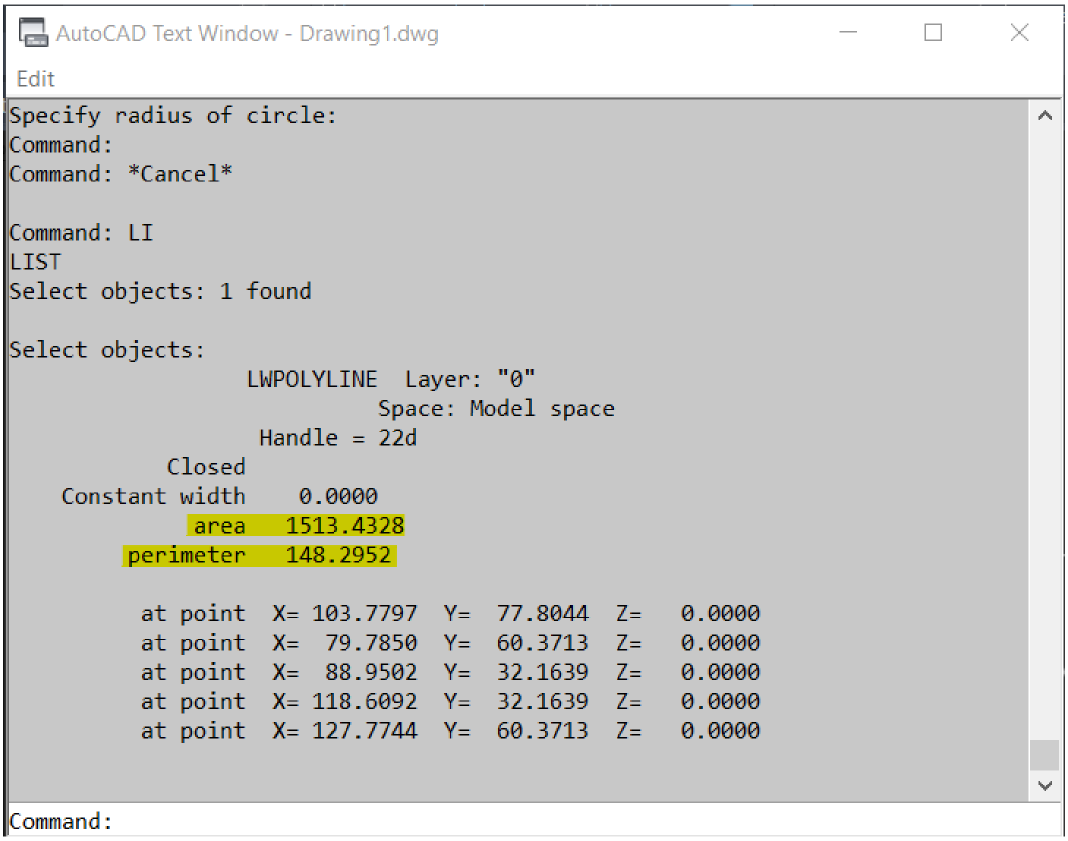
1.-



2.-



Ventana LISTA



AutoCAD Text Window - Drawing1.dwg

Edit

```
Specify radius of circle:
Command:
Command: *Cancel*

Command: LI
LIST
Select objects: 1 found

Select objects:
                  LWPOLYLINE  Layer: "0"
                            Space: Model space
                   Handle = 22d
            Closed
    Constant width    0.0000
              area   1513.4328
         perimeter   148.2952

          at point  X= 103.7797  Y=  77.8044  Z=   0.0000
          at point  X=  79.7850  Y=  60.3713  Z=   0.0000
          at point  X=  88.9502  Y=  32.1639  Z=   0.0000
          at point  X= 118.6092  Y=  32.1639  Z=   0.0000
          at point  X= 127.7744  Y=  60.3713  Z=   0.0000

Command:
```

3.14 Figuras y cuerpos compuestos (aplicación digital).

1.- Dibujar el polígono deseado con el comando línea **(LI).**

2.- Unir las líneas para hacer una misma polilínea, con el comando **(JOIN)** Seleccionar líneas y enter.

3.- Crea una región con el comando **(REG)** y seleccionar todo el polígono.

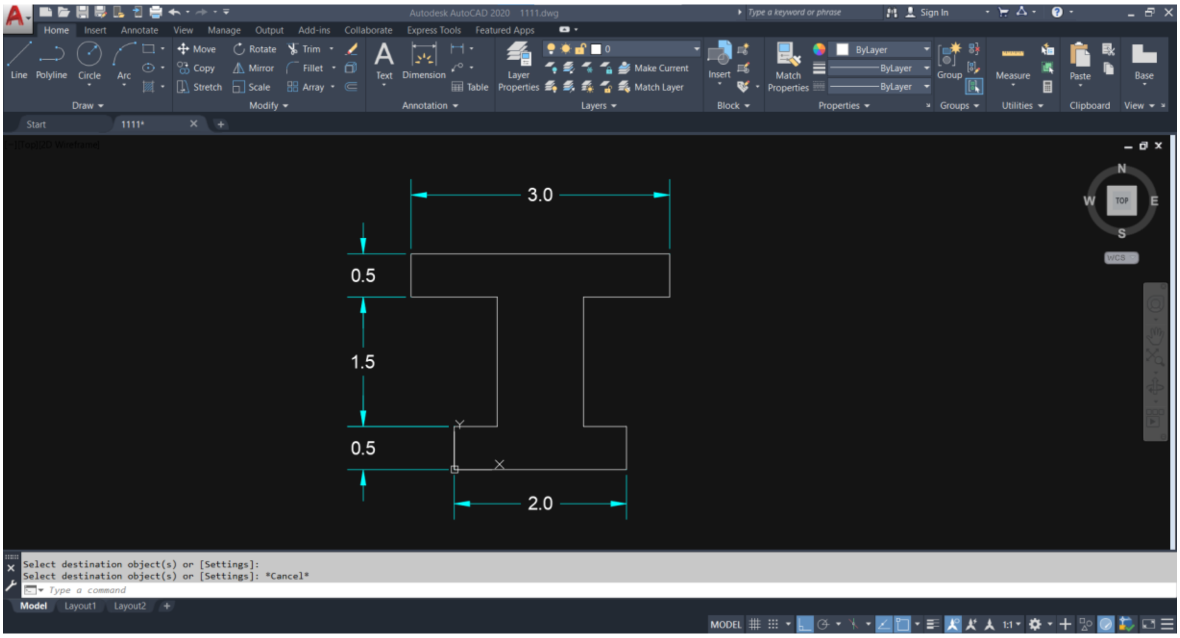
4.- Mover el polígono a las coordenadas X= 0 Y= 0 y Z= 0 desde el punto de inicio del polígono.

Con el comando mover **(M)** y digitalizando el siguiente texto con la ubicación de las coordenadas #0,0,0 / Enter.

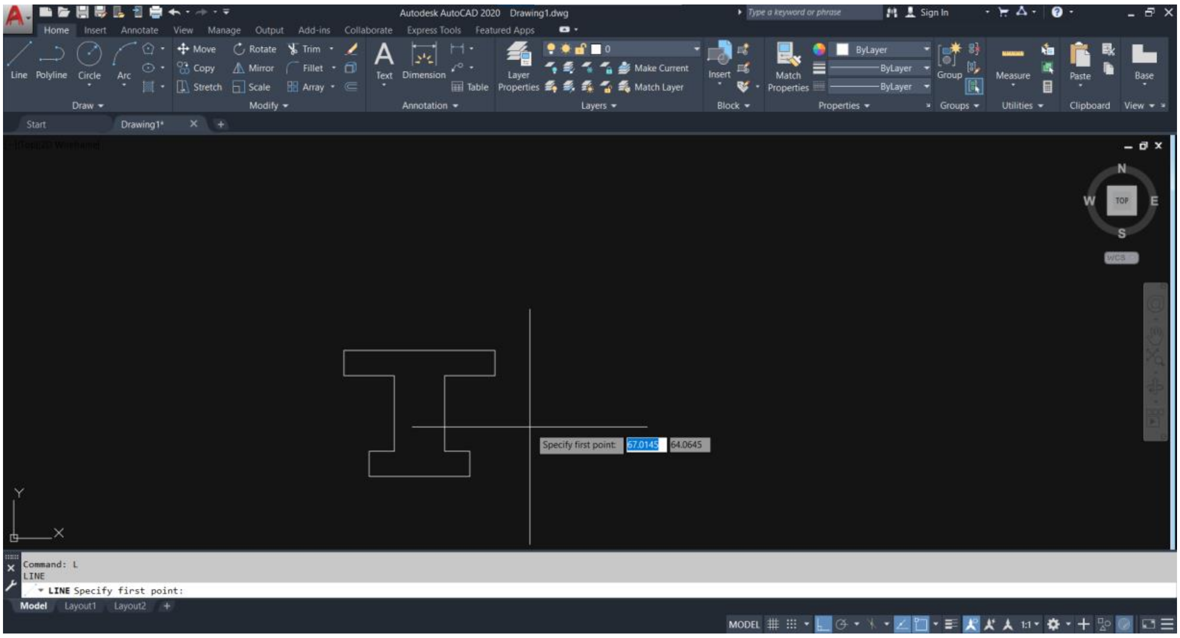
5.- Digitalizar el comando **(MASSPROP)** Seleccionar el polígono y enter.

El la ventana abierta estarán los datos de perímetro, área y centroides en los ejes X y Y.

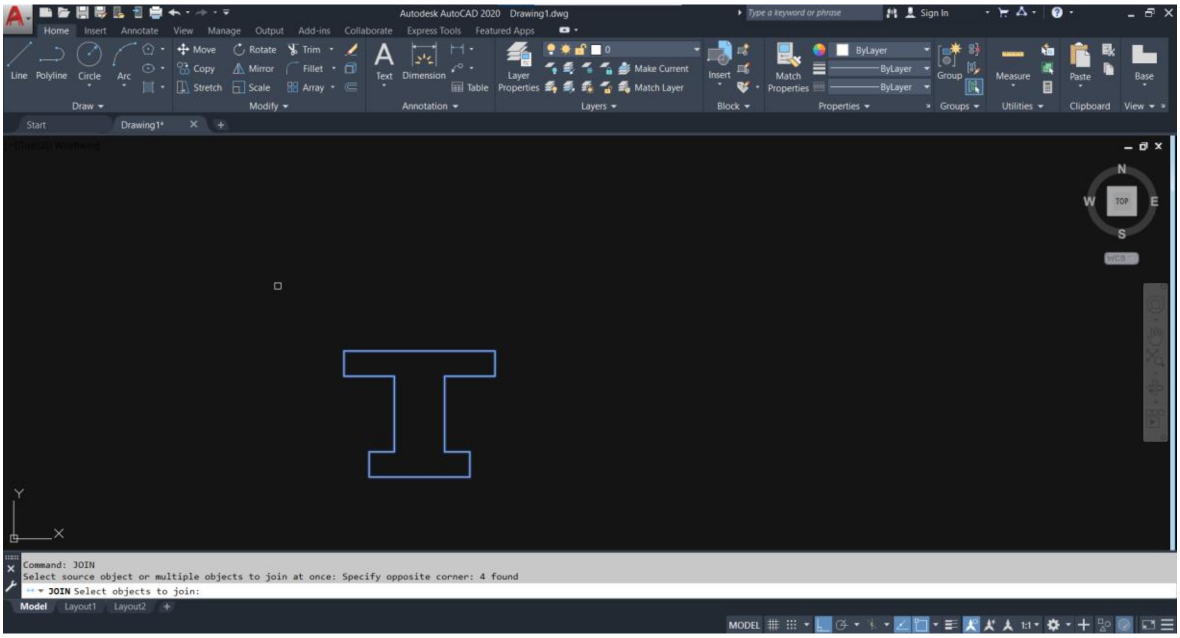
3.15 Ejercicios de comprensión (aplicación digital).



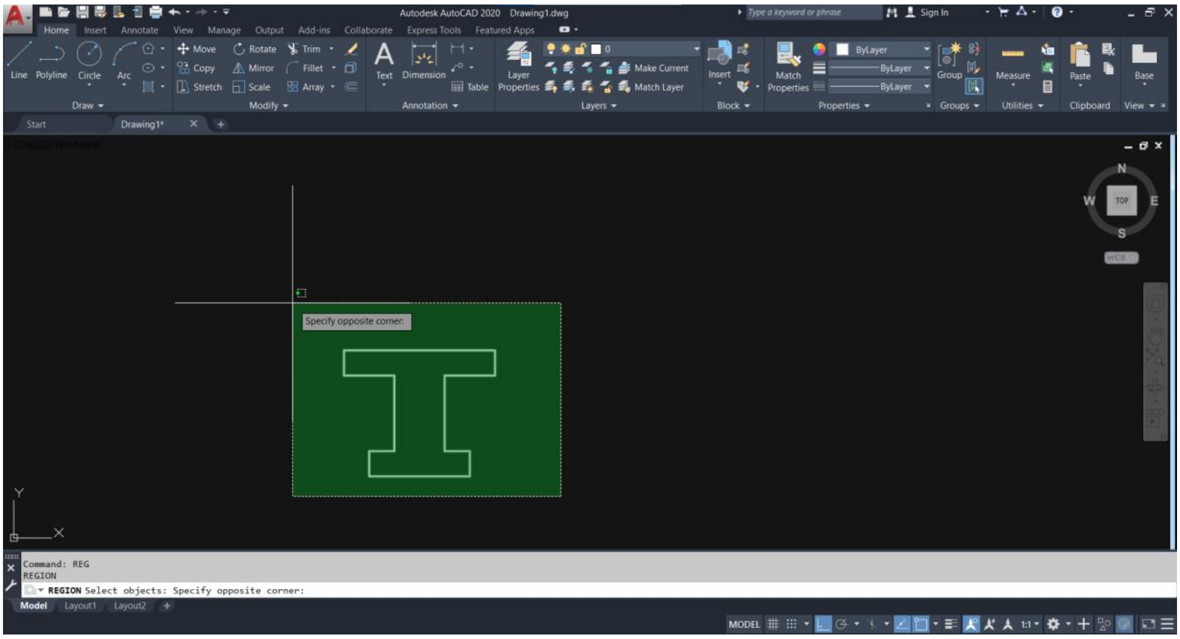
1.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Specify first point:
Command: L
LINE
LINE Specify first point:

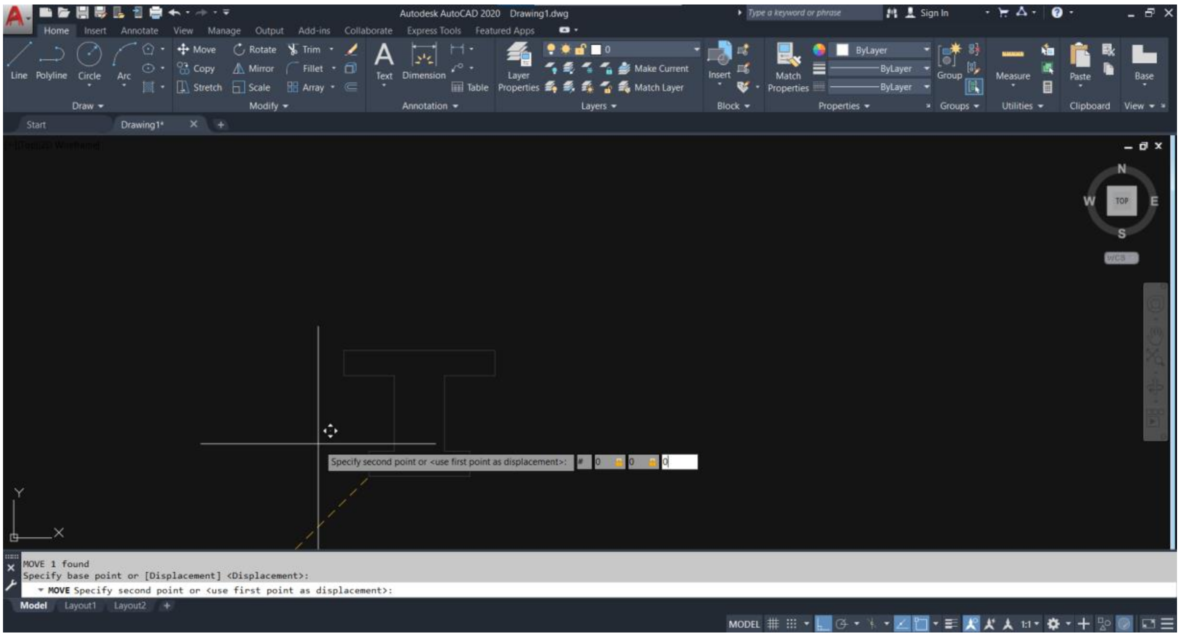
2.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Command: JOIN
Select source object or multiple objects to join at once: Specify opposite corner: 4 found
JOIN Select objects to join:

3.-


Specify opposite corner:
Command: REG
REGION
REGION Select objects: Specify opposite corner:

4.-


Specify second point or <use first point as displacement>:
MOVE 1 found
Specify base point or [Displacement] <Displacement>:
MOVE Specify second point or <use first point as displacement>:

Ventana MASSPROP

AutoCAD Text Window - Drawing1.dwg

Edit

```
Command: MASSPROP

Select objects: 1 found

Select objects:
 ----------------   REGIONS   ----------------

Area:                     4.0000
Perimeter:                13.0000
Bounding box:          X: -0.5000  --  2.5000
                       Y: 0.0000  --  2.5000
Centroid:              X: 1.0000
                       Y: 1.3750
Moments of inertia:    X: 10.3333
                       Y: 5.5833
Product of inertia:   XY: -5.5000
Radii of gyration:     X: 1.6073
                       Y: 1.1815
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                       I: 2.7708 along [1.0000 0.0000]
                       J: 1.5833 along [0.0000 1.0000]

Write analysis to a file? [Yes/No] <N>:
```

UDS

UNIDAD IV

MOMENTOS DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE

4.1 Conceptos y definiciones.

Objetivo de la unidad

Realizar y entender los procedimientos para el cálculo de inercias, aplicadas a superficies compuestas por más de una figura geométrica.

Definiciones

El Momento de Inercia también conocido Segundo Momento de Área; Segundo momento de Inercia o Momento de Inercia de Área, es una propiedad geométrica dela sección transversal de los elementos estructurales.

La inercia es la propiedad de la materia de resistencia a cualquier cambio en su movimiento, ya sea en dirección o velocidad.
Esta propiedad se describe claramente en la Primera Ley del Movimiento de Newton, que postula:
"Un objeto e n reposo a permanecer en reposo, y un objeto en movimiento a seguir moviéndose en línea recta, a no ser que actúe sobre ellos una fuerza externa ".

Dada la superficie que se muestra en la Fig. 3.15a y dos ejes cualesquiera x e y contenidos en el mismo plano. Sea además un diferencial de superficie dΩ, cuya distancia a dichos ejes es y y x, respectivamente. Se define como momento de segundo orden del elemento de superficie dΩ respecto del par de ejes x, y al producto del area de superficie elemental por las distancias a ambos ejes:

$$dI_{xy} = xy \, d\Omega \qquad (3.58)$$

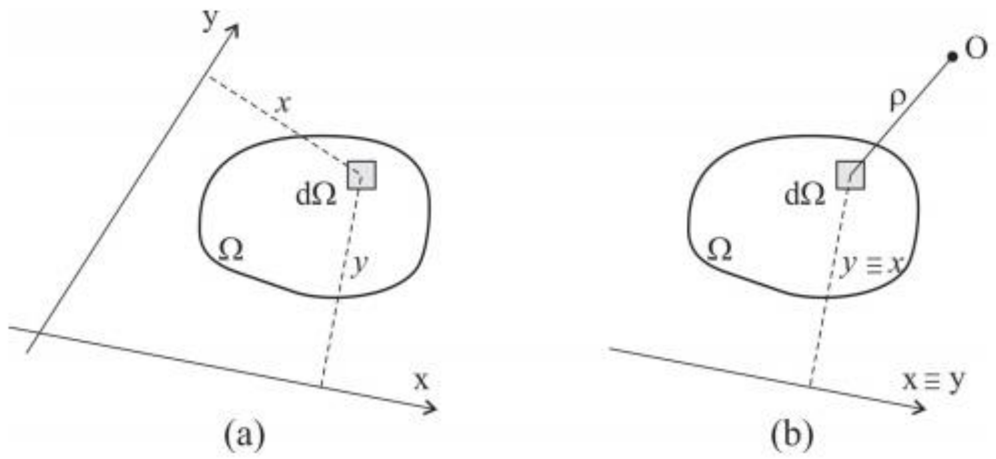
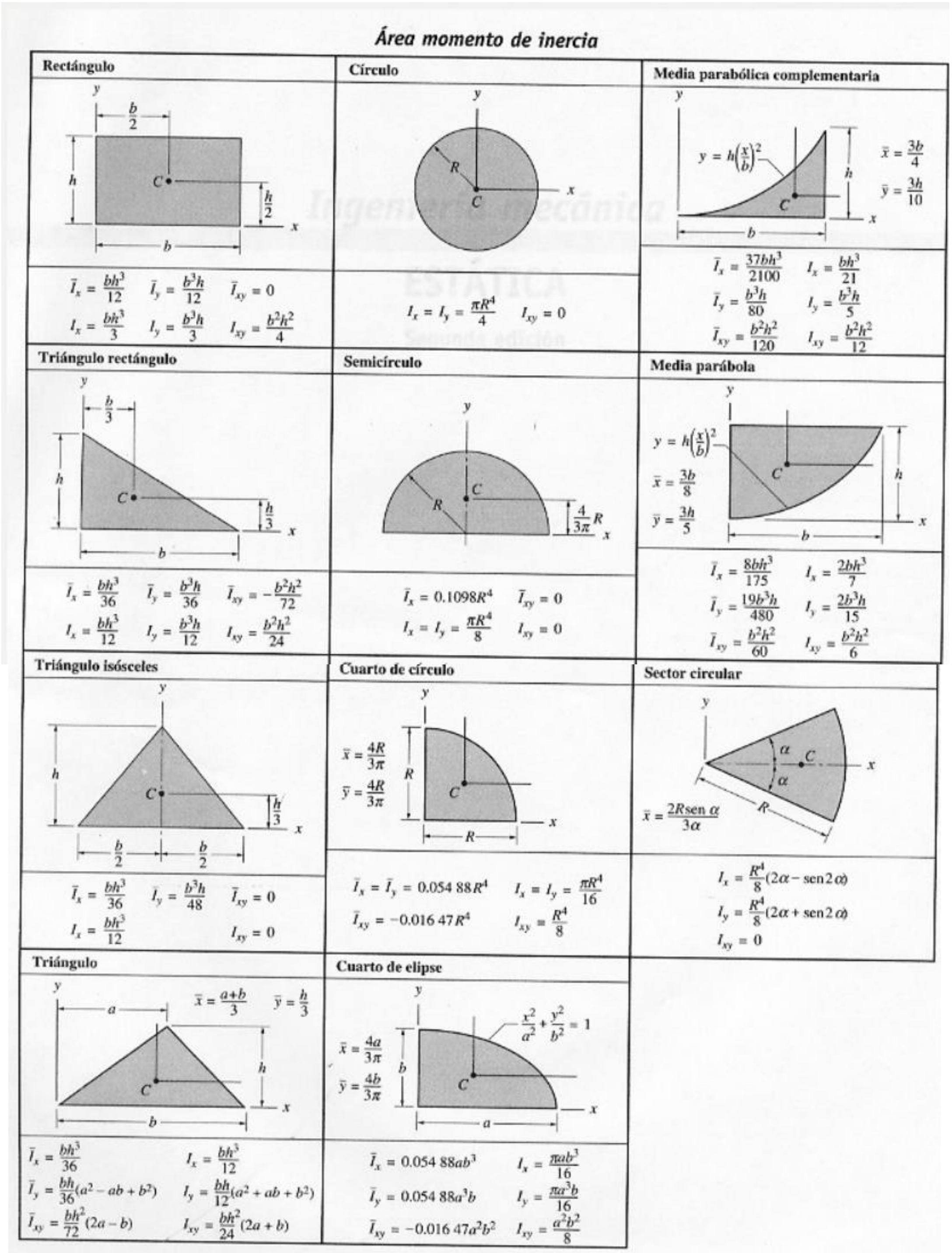


Figura 3.15: Momento de centrífugo y momento de inercia

El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento. El momento de inercia de un cuerpo indica su resistencia a adquirir una aceleración angular.

4.2 Momento de inercia en superficies.

Formulario.



Área momento de inercia

Rectángulo

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{12}$ $\bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3h}{3}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$

Círculo

$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{xy} = 0$

Media parabólica complementaria

$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$ $\bar{x} = \frac{3b}{4}$ $\bar{y} = \frac{3h}{10}$

$\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100}$ $I_x = \frac{bh^3}{21}$

$\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80}$ $I_y = \frac{b^3h}{5}$

$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$

Triángulo rectángulo

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{36}$ $\bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$

Semicírculo

$\bar{I}_x = 0.1098R^4$ $\bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{xy} = 0$

Media parábola

$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$ $\bar{x} = \frac{3b}{8}$ $\bar{y} = \frac{3h}{5}$

$\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175}$ $I_x = \frac{2bh^3}{7}$

$\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480}$ $I_y = \frac{2b^3h}{15}$

$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$

Triángulo isósceles

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{48}$ $\bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_{xy} = 0$

Cuarto de círculo

$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0.054\,88R^4$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.016\,47R^4$ $I_{xy} = \frac{R^4}{8}$

Sector circular

$\bar{x} = \frac{2R \operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$

$I_x = \frac{R^4}{8}(2\alpha - \operatorname{sen}2\alpha)$

$I_y = \frac{R^4}{8}(2\alpha + \operatorname{sen}2\alpha)$

$I_{xy} = 0$

Triángulo

$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$

$\bar{I}_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)$ $I_y = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$

$\bar{I}_{xy} = \frac{bh^2}{72}(2a - b)$ $I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(2a + b)$

Cuarto de elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

$\bar{I}_x = 0.054\,88ab^3$ $I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$

$\bar{I}_y = 0.054\,88a^3b$ $I_y = \frac{\pi a^3b}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.016\,47a^2b^2$ $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$

4.3 Ejercicios de comprensión (momento de inercia en superficies).

1.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura.

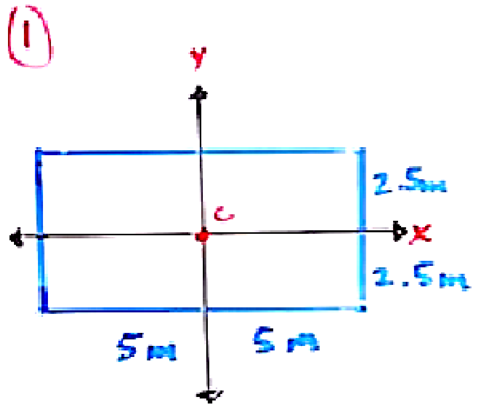


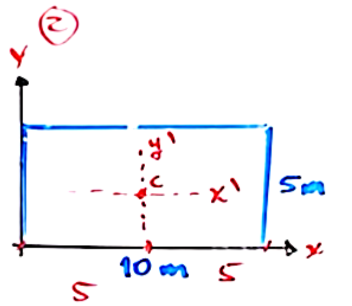
Fig #1 $I_x = \frac{1}{12}(10)(5)^3 = 104.16 m^4$

$I_y = \frac{1}{12}(5)(10)^3 = 416.67 m^4$

2.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura.

Momento de Inercia

$I = \bar{I}_0 + Ad^2$



$I_x = \frac{1}{12}bh^3 + Ad^2$

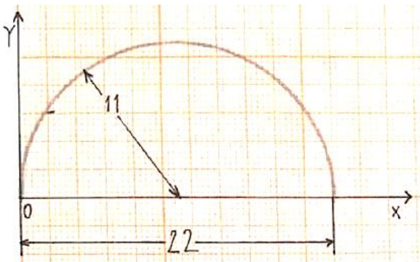
$I_y = \frac{1}{12}hb^3 + Ad^2$

Fig #2 $I_x = \frac{1}{12}(10)(5)^3 + \overset{b\times h}{A} d^2$

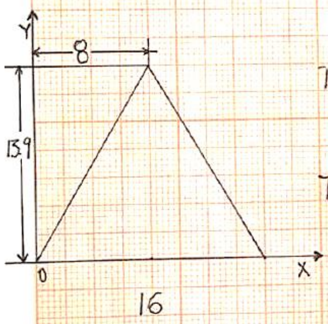
$I_x = 104.16 + (10\times5)\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 416.66 m^4$

$I_y = \frac{1}{12}(5)(10)^3 + (10\times5)(5)^2 = 1,666.67 m^4$

3.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura.

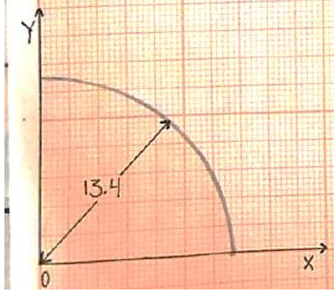


$$I_x = I_y = 0.1098\,R^4 = 0.1098\,(11cm)^4 = \underline{1607.5818\,cm^4}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{16cm\,(13.9cm)^3}{36} = \frac{16cm\,(2685.619\,cm^3)}{36} = \underline{1193.6084\,cm^4}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{48} = \frac{(16cm)^3(13.9cm)}{48} = \frac{(4096\,cm^3)(13.9cm)}{48} = \underline{1186.1333\,cm^4}$$



$$I_x = I_y = 0.05488R^4 = 0.05488\,(13.4)^4 =$$

$$I_x = I_y = 0.05488(32241.7936cm) = \underline{1769.4296\,cm^4}$$

4.4 Momento de inercia en superficies compuestas.

Teorema de Steiner.

El teorema de Steiner se enuncia de la siguiente manera: el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje cualquiera, es igual al momento de inercia respecto a un eje, paralelo al dado, que pase por su centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes:

$$I = I_{CM} + md^2 \qquad [3]$$

Siendo $= I_{CM}$ el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas, y d la distancia entre ambos ejes.

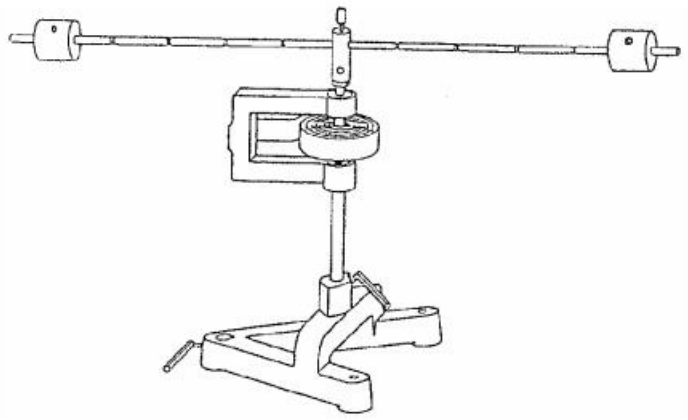


Figura 1.- Muelle espiral y montaje de la barra con las masas móviles

Variación del momento de inercia de un cuerpo con la distancia al eje El momento de inercia del sistema, I, formado por una barra delgada y dos masas cilíndricas movibles dispuestas en forma simétrica sobre ella (Figura 1), respecto a un eje perpendicular a la barra que pase por su centro es:

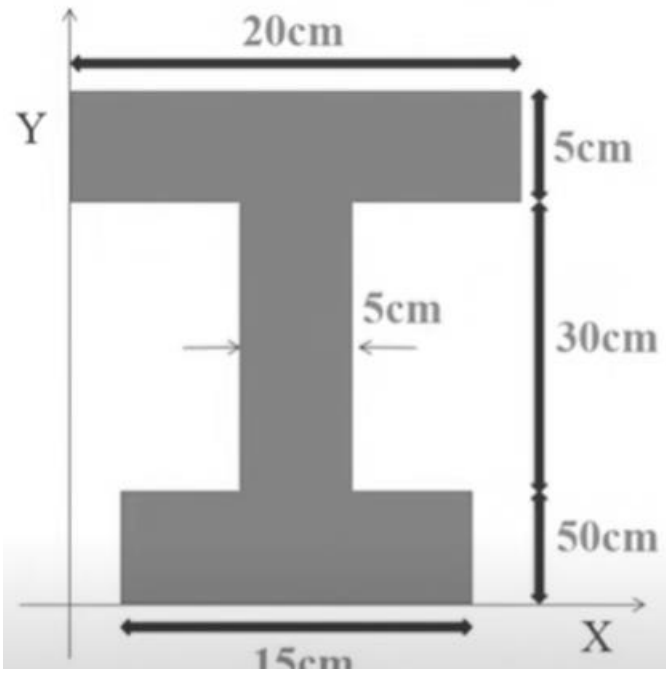
$$I = I_b + 2(I_c + md^2) \qquad [4]$$

Siendo b I el momento de inercia de la barra respecto a dicho eje, c I el momento de inercia de las masas cilíndricas con respecto a un eje paralelo al anterior que pasa por su centro de masas, y d la distancia desde éste al centro de cada una de las masas móviles. Para un sistema como éste el periodo de las oscilaciones valdrá, sustituyendo [4] en [2]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{R}\left[I_b + 2I_c + 2md^2\right] \qquad [5]$$

4.5 Ejercicios de comprensión (momento de inercia en superficies compuestas).

1.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura compuesta.

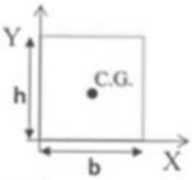


Formulario.

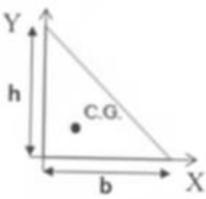
TEOREMA DE STEINER

$$I_x = I_{0x} + A*dy^2$$

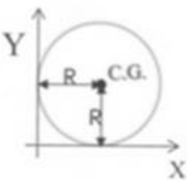
$$I_y = I_{0y} + A*dx^2$$



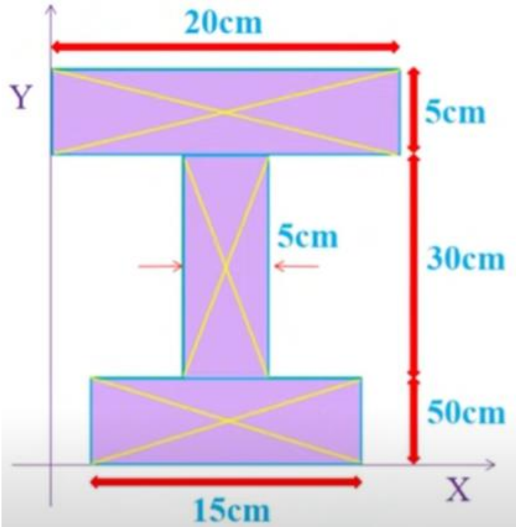
$$\boxed{I_{0x} = \frac{b*h^3}{12}} \quad \boxed{I_{0y} = \frac{h*b^3}{12}}$$



$$\boxed{I_{0x} = \frac{b*h^3}{36}} \quad \boxed{I_{0y} = \frac{h*b^3}{36}}$$



$$\boxed{I_{0x;y} = \frac{\pi * r^4}{4}}$$



COORDENADAS DEL C.G.

$X_{c.g.} = 12.5$ cm
$Y_{c.g.} = 22.5$ cm

$A_1 = 15*5 = 75\ cm^2$
$X_1 = 12.5\ cm$
$Y_1 = 2.5\ cm$

$A_2 = 5*30 = 150\ cm^2$
$X_2 = 12.5\ cm$
$Y_2 = 20\ cm$

$A_3 = 25*5 = 125\ cm^2$
$X_3 = 12.5\ cm$
$Y_3 = 37.5\ cm$

$$I_{x1} = \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 75*(22.5-2.5)^2 = 30156.25\ cm^4$$

$$I_{x2} = \frac{5 \cdot 30^3}{12} + 150*(22.5-20)^2 = 12187.5\ cm^4$$

$$I_{x3} = \frac{25 \cdot 5^3}{12} + 125*(37.5-22.5)^2 = 28385.41667\ cm^4$$

+

$$I_{tx} = 70729.17\ cm^4$$

$$I_{y1} = \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 75*(12.5-12.5)^2 = 1406.25\ cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{30 \cdot 5^3}{12} + 150*(12.5-12.5)^2 = 312.5\ cm^4$$

$$I_{y3} = \frac{5 \cdot 25^3}{12} + 125*(12.5-12.5)^2 = 6510.417 cm^4$$

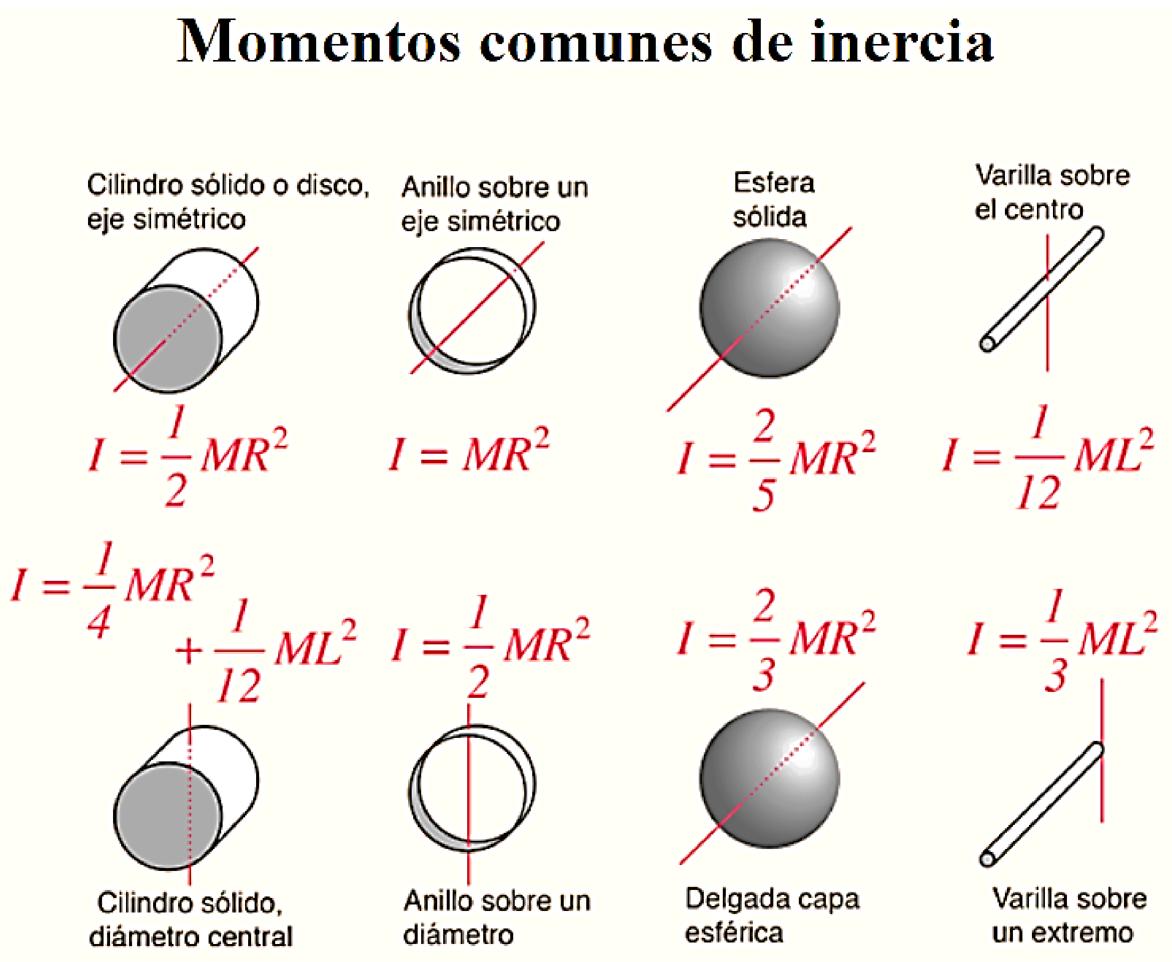
+

$$I_{ty} = 8229.17\ cm^4$$

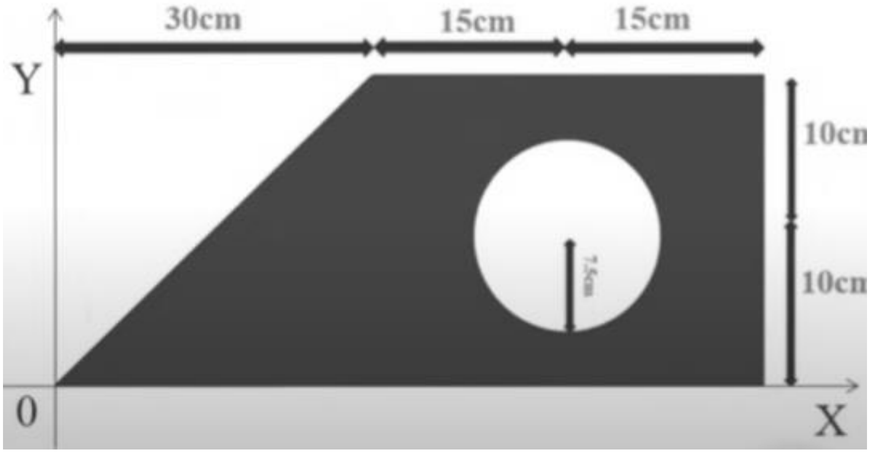
4.6 Guías y formularios para la comprensión de ejercicios complejos.

Momento de Inercia I

Lineal $F = ma$ Segunda Ley de Newton Angular $\tau = I\alpha$	Lineal $KE = \frac{1}{2}mv^2$ Energía Cinética Angular $KE = \frac{1}{2}I\omega^2$
Lineal $p = mv$ Momento Angular $L = I\omega$	Lineal $F_{net}d = \Delta\left[\frac{1}{2}mv^2\right]$ Trabajo-Energía Angular $\tau_{net}\theta = \Delta\left[\frac{1}{2}I\omega^2\right]$



1.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura compuesta.

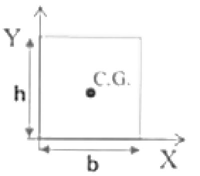


Formulario.

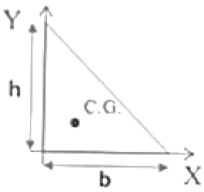
TEOREMA DE STEINER

$$I_x = I_{0x} + A * dy^2$$

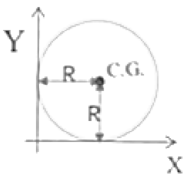
$$I_y = I_{0y} + A * dx^2$$



$$I_{0x} = \frac{b * h^3}{12} \qquad I_{0y} = \frac{h * b^3}{12}$$



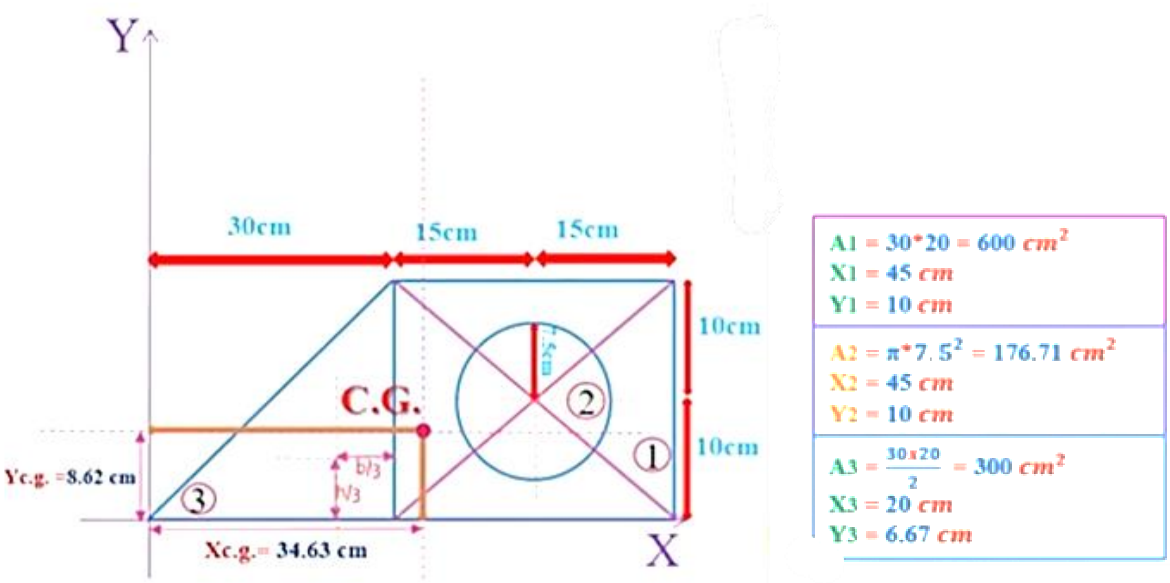
$$I_{0x} = \frac{b * h^3}{36} \qquad I_{0y} = \frac{h * b^3}{36}$$



$$I_{0x;y} = \frac{\pi * r^4}{4}$$

4.7 Ejercicios de comprensión complejos (momento de inercia en superficies compuestas).

1.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura compuesta.



$$I_{x1} = \frac{30 \cdot 20^3}{12} + 600*(10 - 8.62)^2 = 21\ 142.64\ cm^4$$

$$I_{x2} = \frac{\pi*(7.5)^4}{4} + 176.71*(10 - 8.62)^2 = -\ 2\ 821.58\ cm^4$$

$$I_{x3} = \frac{30 \cdot 20^3}{36} + 300*(8.62 - 6.67)^2 = 7\ 807.42\ cm^4$$

$+$

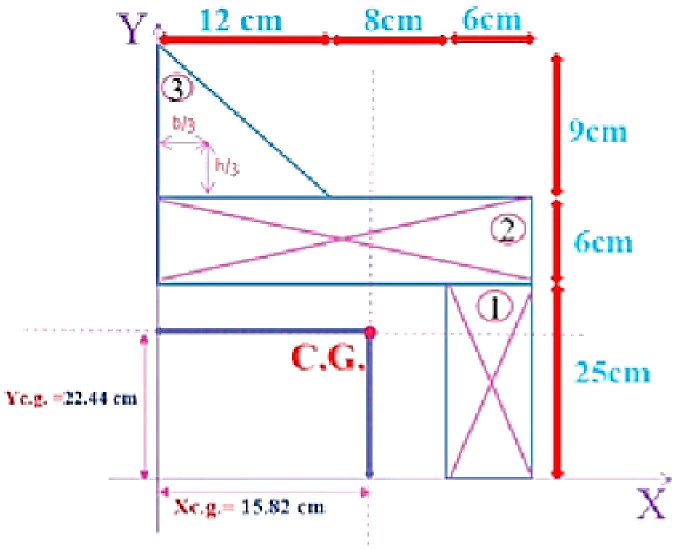
$$I_x = 26\ 128.48\ cm^4$$

$$I_{y1} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} + 600*(45 - 34.63)^2 = 109\ 522.14\ cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{\pi*(7.5)^4}{4} + 176.71*(45 - 34.63)^2 = -\ 21\ 487.89\ cm^4$$

$$I_{y3} = \frac{20 \cdot 30^3}{36} + 300*(34.63 - 20)^2 = 79\ 211.07\ cm^4$$

2.- Encuentra los momentos de inercia en el eje X y Y de la siguiente figura compuesta.



$A1 = 25*6 = 150\ cm^2$
$X1 = 23\ cm$
$Y1 = 12.5\ cm$

$A2 = 6*26 = 156\ cm^2$
$X2 = 13\ cm$
$Y2 = 28\ cm$

$A3 = \frac{12 x 9}{2} = 54\ cm^2$
$X3 = 4\ cm$
$Y3 = 34\ cm$

$$Ix_1 = \frac{6 \cdot 25^3}{12} + 150*(22.44 - 12.5)^2 = 22\,633.04\ cm^4$$

$$Ix_2 = \frac{26 \cdot 6^3}{12} + 156*(28 - 22.44)^2 = 5\,290.5216\ cm^4$$

$$Ix_3 = \frac{12 \cdot 9^3}{36} + 54*(34 - 22.44)^2 = 7\,459.2144\ cm^4$$

$+$

$$Ix = 35382.776\ cm^4$$

$$Iy_1 = \frac{25 \cdot 6^3}{12} + 150*(23 - 15.82)^2 = 8\,182.86\ cm^4$$

$$Iy_2 = \frac{6 \cdot 26^3}{12} + 156*(15.82 - 13)^2 = 10\,028.5744\ cm^4$$

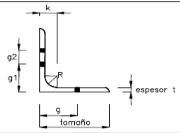
$$Iy_3 = \frac{9 \cdot 12^3}{36} + 54*(15.82 - 4)^2 = 7\,976.4696\ cm^4$$

$+$

$$Iy = 26\,187.904\ \ cm^4$$

4.8 Momento de inercia en perfiles metálicos (IMCA).

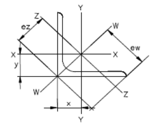
1.- Inercia en perfiles metálicos (ángulos con lados iguales).



ICA FLUOR DANIEL

LI
ANGULO DE LADOS IGUALES
DIMENSIONES

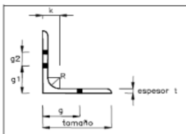
Designación tamaño y espesor t		Peso	k	R	Gramil			Sujetadores		
					g	g1	g2	Diámetro máximo		Espac. recom.
mm x mm*	in. x in.	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	in.	mm
19 x 3	3/4 x 1/8	0.88	11.1	3.2	11	-	-	6.3	1/4	20
x 5	x 3/16	1.25	12.7	3.2	11	-	-	6.3	1/4	20
22 x 3	7/8 x 1/8	1.04	11.1	3.2	12	-	-	6.3	1/4	20
x 5	x 3/16	1.49	12.7	3.2	12	-	-	6.3	1/4	20
25 x 3	1 x 1/8	1.19	11.1	3.2	14	-	-	9.5	3/8	30
x 5	x 3/16	1.73	12.7	3.2	14	-	-	9.5	3/8	30
x 6	x 1/4	2.22	14.3	3.2	14	-	-	9.5	3/8	30
32 x 3	1 1/4 x 1/8	1.50	11.1	4.7	18	-	-	12.7	1/2	40
x 5	x 3/16	2.20	12.7	4.7	18	-	-	12.7	1/2	40
x 6	x 1/4	2.86	14.3	4.7	18	-	-	12.7	1/2	40
38 x 3	1 1/2 x 1/8	1.83	11.1	4.7	20	-	-	12.7	1/2	40
x 5	x 3/16	2.68	12.7	4.7	20	-	-	12.7	1/2	40
x 6	x 1/4	3.48	14.3	4.7	20	-	-	12.7	1/2	40
x 8	x 5/16	4.26	15.9	4.7	20	-	-	12.7	1/2	40
x 10	x 3/8	4.99	17.5	4.7	20	-	-	12.7	1/2	40
44 x 3	1 3/4 x 1/8	2.14	11.1	6.3	25	-	-	15.9	5/8	50
x 5	x 3/16	3.15	12.7	6.3	25	-	-	15.9	5/8	50
x 6	x 1/4	4.12	14.3	6.3	25	-	-	15.9	5/8	50
x 8	x 5/16	5.04	15.9	6.3	25	-	-	15.9	5/8	50
51 x 3	2 x 1/8	2.46	11.1	6.3	30	-	-	15.9	5/8	50
x 5	x 3/16	3.63	12.7	6.3	30	-	-	15.9	5/8	50
x 6	x 1/4	4.75	14.3	6.3	30	-	-	15.9	5/8	50
x 8	x 5/16	5.83	15.9	6.3	30	-	-	15.9	5/8	50
x 10	x 3/8	6.99	17.5	6.3	30	-	-	15.9	5/8	50



ICA FLUOR DANIEL

LI
ANGULO DE LADOS IGUALES
PROPIEDADES

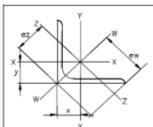
Designación tamaño y espesor t		Area	Ejes X-X y Y-Y				Eje W-W				Eje Z-Z			
			I	S	r	x = y	I	S	r	e_w	I	S	r	e_z
mm x mm*	in. x in.	cm^2	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm
19 x 3	3/4 x 1/8	1.11	0.37	0.28	0.58	0.58	0.58	0.43	0.73	1.34	0.16	0.19	0.38	0.82
x 5	x 3/16	1.59	0.50	0.39	0.56	0.66	0.83	0.62	0.72	1.34	0.17	0.18	0.38	0.93
22 x 3	7/8 x 1/8	1.32	0.58	0.38	0.66	0.66	0.90	0.58	0.82	1.56	0.26	0.28	0.48	0.93
x 5	x 3/16	1.90	0.79	0.54	0.66	0.74	1.23	0.79	0.81	1.56	0.35	0.33	0.48	1.05
25 x 3	1 x 1/8	1.52	0.92	0.51	0.79	0.76	1.24	0.69	0.93	1.79	0.41	0.38	0.48	1.07
x 5	x 3/16	2.21	1.25	0.72	0.76	0.81	2.08	1.16	0.93	1.79	0.41	0.36	0.48	1.14
x 6	x 1/4	2.80	1.54	0.92	0.74	0.86	2.49	1.39	0.91	1.79	0.83	0.69	0.48	1.21
32 x 3	1 1/4 x 1/8	1.93	1.33	0.80	0.97	0.89	2.91	1.30	1.19	2.24	0.83	0.66	0.60	1.25
x 5	x 3/16	2.79	2.54	1.16	0.97	0.97	3.74	1.67	1.19	2.24	0.83	0.61	0.60	1.37
x 6	x 1/4	3.72	3.21	1.49	0.94	1.02	4.99	2.23	1.16	2.24	1.24	0.86	0.60	1.44
38 x 3	1 1/2 x 1/8	2.34	3.25	1.18	1.17	1.07	5.41	2.01	1.47	2.69	1.24	0.82	0.73	1.51
x 5	x 3/16	3.43	4.58	1.64	1.17	1.12	7.07	2.63	1.44	2.69	1.66	1.05	0.73	1.58
x 6	x 1/4	4.40	5.83	2.20	1.14	1.19	8.74	3.24	1.42	2.69	2.49	1.48	0.73	1.68
x 8	x 5/16	5.40	6.66	2.62	1.12	1.24	10.40	3.86	1.39	2.69	2.91	1.66	0.73	1.75
x 10	x 3/8	6.34	7.91	3.11	1.12	1.30	12.07	4.48	1.37	2.69	3.33	1.82	0.73	1.83
44 x 3	1 3/4 x 1/8	2.74	5.41	1.64	1.40	1.22	8.73	2.78	1.72	3.14	2.08	1.21	0.86	1.72
x 5	x 3/16	4.03	7.49	2.29	1.37	1.30	11.65	3.71	1.70	3.14	2.91	1.59	0.86	1.83
x 6	x 1/4	5.20	9.57	3.11	1.35	1.35	14.56	4.66	1.67	3.14	3.74	1.97	0.86	1.90
x 8	x 5/16	6.39	11.24	3.77	1.32	1.40	17.48	5.56	1.65	3.14	4.57	2.32	0.86	1.97
51 x 3	2 x 1/8	3.10	7.91	2.13	1.60	1.40	12.49	3.48	1.97	3.58	3.32	1.68	0.99	1.97
x 5	x 3/16	4.61	11.45	3.11	1.57	1.45	17.48	4.88	1.95	3.58	4.57	2.28	0.99	2.00
x 6	x 1/4	6.06	14.57	4.10	1.55	1.50	22.47	6.27	1.93	3.58	5.82	2.77	0.99	2.10
x 8	x 5/16	7.42	17.46	4.92	1.52	1.55	26.63	7.43	1.90	3.58	7.07	3.24	0.99	2.18
x 10	x 3/8	8.77	19.98	5.74	1.50	1.63	30.80	8.60	1.87	3.58	8.32	3.61	0.99	2.30



ICA FLUOR DANIEL

LI
ANGULO DE LADOS IGUALES
DIMENSIONES

Designación tamaño y espesor t		Peso	k	R	Gramil			Sujetadores		
					g	g1	g2	Diámetro máximo		Espac. recom.
mm x mm*	in. x in.	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	in.	mm
76 x 5	3 x 3/16	5.52	12.7	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
x 6	x 1/4	7.29	14.3	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
x 8	x 5/16	9.08	15.9	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
x 10	x 3/8	10.72	17.5	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
x 11	x 7/16	12.35	19.1	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
x 13	x 1/2	13.99	20.6	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
x 16	x 5/8	17.11	27.0	7.9	45	-	-	22.2	7/8	70
89 x 5	3 1/2 x 3/16	6.55	12.7	8.4	50	-	-	22.2	7/8	70
x 6	x 1/4	8.63	14.3	8.3	50	-	-	22.2	7/8	70
x 8	x 5/16	10.71	15.9	8.1	50	-	-	22.2	7/8	70
x 10	x 3/8	12.65	17.5	8.0	50	-	-	22.2	7/8	70
x 13	x 1/2	16.52	20.6	7.6	50	-	-	22.2	7/8	70
102 x 6	4 x 1/4	9.82	15.9	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
x 8	x 5/16	12.20	17.5	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
x 10	x 3/8	14.58	19.1	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
x 11	x 7/16	16.82	20.6	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
x 13	x 1/2	19.05	22.2	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
x 16	x 5/8	23.36	25.4	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
x 19	x 3/4	27.53	28.6	9.5	60	-	-	22.2	7/8	70
127 x 10	5 x 3/8	18.30	22.2	12.7	70	45	50	25.4	1	80
x 11	x 7/16	21.28	23.8	12.7	70	45	50	25.4	1	80
x 13	x 1/2	24.11	25.4	12.7	70	45	50	25.4	1	80
x 16	x 5/8	29.76	28.6	12.7	70	45	50	25.4	1	80
x 19	x 3/4	35.12	31.8	12.7	70	45	50	25.4	1	80

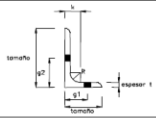


ICA FLUOR DANIEL

LI
ANGULO DE LADOS IGUALES
PROPIEDADES

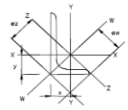
Designación tamaño y espesor t		Area	Ejes X-X y Y-Y				Eje W-W				Eje Z-Z			
			I	S	r	x = y	I	S	r	e_w	I	S	r	e_z
mm x mm*	in. x in.	cm^2	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm
76 x 5	3 x 3/16	7.03	40.01	7.22	2.39	2.08	64.38	11.97	3.03	5.38	16.12	5.48	1.51	2.94
x 6	x 1/4	9.29	51.60	9.50	2.36	2.13	78.66	14.62	2.94	5.38	20.39	6.86	1.49	2.97
x 8	x 5/16	11.48	62.90	11.60	2.34	2.21	96.98	18.02	2.92	5.38	24.97	8.21	1.47	3.04
x 10	x 3/8	13.61	73.30	13.60	2.31	2.26	112.79	20.96	2.89	5.38	29.55	9.41	1.47	3.14
x 11	x 7/16	15.68	82.80	15.60	2.31	2.31	128.19	23.82	2.87	5.38	33.71	10.34	1.47	3.26
x 13	x 1/2	17.74	92.40	17.50	2.29	2.36	142.76	26.53	2.84	5.38	38.29	11.53	1.47	3.32
x 16	x 5/8	21.68	109.10	21.30	2.24	2.49	158.16	29.39	2.82	5.38	42.45	12.05	1.47	3.52
89 x 5	3 1/2 x 3/16	8.36	64.36	9.92	2.78	2.40	102.84	16.38	3.51	6.29	25.88	7.63	1.76	3.39
x 6	x 1/4	10.90	83.66	13.01	2.77	2.46	133.53	21.26	3.50	6.29	33.79	9.71	1.76	3.48
x 8	x 5/16	13.48	101.95	16.00	2.74	2.51	162.49	25.87	3.47	6.29	41.41	11.66	1.75	3.55
x 10	x 3/8	16.00	119.46	18.84	2.72	2.57	191.20	30.44	3.47	6.29	50.22	13.87	1.74	3.63
x 13	x 1/2	20.97	151.51	24.41	2.69	2.69	238.09	37.91	3.37	6.29	61.59	16.21	1.73	3.80
102 x 6	4 x 1/4	12.52	124.90	17.20	3.18	2.77	191.89	26.72	3.96	7.18	48.10	12.30	2.00	3.91
x 8	x 5/16	15.48	154.40	21.10	3.15	2.84	239.33	33.33	3.93	7.18	61.60	15.36	2.00	4.01
x 10	x 3/8	18.45	181.50	24.90	3.12	2.89	283.03	39.41	3.91	7.18	73.25	18.17	1.98	4.03
x 11	x 7/16	21.35	206.90	28.70	3.12	2.94	322.99	44.98	3.88	7.18	83.66	20.15	1.98	4.15
x 13	x 1/2	24.19	231.40	32.30	3.10	2.99	361.28	50.31	3.86	7.18	94.48	22.44	1.98	4.21
x 16	x 5/8	29.74	277.20	39.30	3.05	3.12	433.71	60.40	3.81	7.18	115.71	26.35	1.98	4.39
x 19	x 3/4	35.10	318.80	46.00	3.02	3.22	497.39	69.27	3.75	7.18	136.10	29.97	1.95	4.54
127 x 10	5 x 3/8	23.29	363.80	39.70	3.96	3.53	579.60	64.60	4.99	8.96	148.00	29.80	2.52	4.97
x 11	x 7/16	26.97	417.10	45.70	3.94	3.58	662.90	74.00	4.96	8.96	171.10	33.80	2.52	5.06
x 13	x 1/2	30.65	468.30	51.60	3.91	3.63	746.50	83.30	4.94	8.96	190.10	37.20	2.49	5.12
x 16	x 5/8	37.81	535.30	63.30	3.86	3.76	897.30	100.50	4.87	8.96	233.30	43.90	2.48	5.31
x 19	x 3/4	44.77	655.20	74.20	3.81	3.86	1035.50	115.60	4.82	8.96	275.30	50.50	2.48	5.45

2.- Inercia en perfiles metálicos (ángulos con lados iguales).



LD
ANGULO DE LADOS DESIGUALES
DIMENSIONES

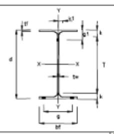
Designación tamaño y espesor t		Peso	k	R	Gramil**		Diám. máx. del sujetador***			
					g_1	g_2	Lado menor		Lado mayor	
mm x mm x mm*	in. x in. x in.	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	in.	mm	in.
102 x 76 x 6	4 x 3 x 1/4	8.63	17.46	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
x 8	x 5/16	10.72	19.1	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
x 10	x 3/8	12.63	20.64	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
x 11	x 7/16	14.58	22.23	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
x 13	x 1/2	16.52	23.81	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
x 16	x 5/8	20.24	26.98	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
x 19	x 3/4	23.81	28.58	9.3	45	60	22.2	7/8	22.2	7/8
132 x 102 x 8	6 x 4 x 5/16	15.19	20.64	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 10	x 3/8	18.31	22.23	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 11	x 7/16	21.28	23.81	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 13	x 1/2	24.11	25.4	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 16	x 5/8	29.76	28.58	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 19	x 3/4	35.12	31.75	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 22	x 7/8	40.48	34.9	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1
x 25	x 1	45.84	38.1	12.7	60	90	22.2	7/8	25.4	1



LD
ANGULO DE LADOS DESIGUALES
PROPIEDADES

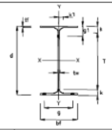
Designación tamaño y espesor t		Area	Eje X-X				Eje Y-Y			
			I	S	r	y	I	S	r	x
mm x mm x mm*	in. x in. x in.	cm²	cm⁴	cm³	cm	cm	cm⁴	cm³	cm	cm
102 x 76 x 6	4 x 3 x 1/4	10.90	115.3	16.39	3.25	3.15	56.6	9.83	2.26	1.88
x 8	x 5/16	13.48	140.7	20.16	3.23	3.20	68.7	11.96	2.25	1.93
x 10	x 3/8	16.00	164.8	23.93	3.20	3.25	79.9	14.26	2.23	1.98
x 11	x 7/16	18.51	188.1	27.53	3.18	3.30	90.7	16.22	2.21	2.03
x 13	x 1/2	20.96	210.2	30.97	3.16	3.88	100.7	18.36	2.19	2.11
x 16	x 5/8	25.67	251.0	37.69	3.12	3.48	119.3	22.13	2.15	2.21
x 19	x 3/4	30.26	288.4	43.91	3.09	3.60	136.5	25.73	2.12	2.34
132 x 102 x 8	6 x 4 x 5/16	19.44	472.7	45.58	4.93	4.87	173.1	22.10	2.98	2.33
x 10	x 3/8	23.29	560.6	54.40	4.91	4.93	203.9	26.22	2.96	2.39
x 11	x 7/16	26.97	643.5	62.76	4.88	4.98	233.1	30.31	2.94	2.44
x 13	x 1/2	30.65	723.8	70.96	4.86	5.05	261.0	34.08	2.92	2.51
x 16	x 5/8	37.81	877.0	87.02	4.82	5.16	313.0	41.62	2.88	2.62
x 19	x 3/4	44.77	1020.2	102.42	4.77	5.28	361.3	48.67	2.84	2.74
x 22	x 7/8	51.48	1154.2	117.17	4.73	5.38	405.8	55.55	2.80	2.84
x 25	x 1	58.00	1280.0	131.50	4.70	5.50	447.5	62.20	2.78	2.96

3.- Inercia en perfiles metálicos (IR).



IR
PERFIL I RECTANGULAR
DIMENSIONES

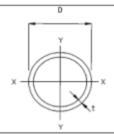
Designación d x peso		Peralte	Alma	Patin		Distancia			Gramil		Sujetadores	
		d	t_w	b_f	t_f	T	k	k_1	g	g_1	Diametro máximo en patin	
mm* x kg/m	in x lb./ft.	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	in.
254 x 17,9	10 x 12	251	4.8	101	5.3	219	16	11	60	65	12.7	0.5
x 22,3	x 15	254	5.8	102	6.9	219	17	11	60	65	12.7	0.5
x 25,3	x 17	257	6.1	102	8.4	219	19	13	60	65	12.7	1/2
x 28,5	x 19	260	6.4	102	10	219	21	13	60	70	12.7	1/2
254 x 32,9	10 x 22	258	6.1	146	9.1	220	19	13	90	65	19	0.75
x 38,5	x 26	262	6.6	147	11.2	218	22	13	90	70	19	0.75
x 44,8	x 30	266	7.6	148	13	218	24	13	90	70	22.2	0.875
254 x 49,2	10 x 33	247	7.4	202	11	193	27	17	140	65	22.2	0.875
x 58,2	x 39	252	8	203	13.5	195	29	17	140	75	22.2	7/8
x 67,4	x 45	257	8.9	202	11	193	32	17	140	80	25.4	1
254 x 72,9	10 x 49	253	8.6	254	14.2	193	30	17	140	75	28.6	1 1/8
x 80.00	x 54	256	9.4	255	15.6	193	32	17	140	80	28.6	1 1/8
x 89,1	x 60	260	10.7	256	17.3	193	33	19	140	80	28.6	1 1/8
x 101,3	x 68	264	11.9	257	19	194	35	19	140	80	28.6	1 1/8
x 114,5	x 77	269	13.5	259	22.1	193	38	21	140	85	28.6	1 1/8
x 131,2	x 88	275	15.4	261	25.1	193	41	21	140	90	28.6	1 1/8
x 148,9	x 100	282	17.3	263	28.4	193	44	22	140	90	28.6	1 1/8
x 166,6	x 112	289	19.2	265	31.8	193	48	24	140	95	28.6	1 1/8



IR
PERFIL I RECTANGULAR
PROPIEDADES

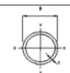
Peso	Area	Criterio de sección compacta				r_T	d/A_f	Eje X-X			Eje Y-Y			Constante de torsión	Módulo de sección plástico	
		$bf/2tf$	$F'y$	d/tw	Fy'''			I	S	r	I	S	r	J	Zx	Zy
kg/m	cm²		kg/cm²		kg/cm²	cm	cm⁻¹	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³
17.9	22.8	9.4	3340	51.9	1724	2.4	4.67	2239	179	9.9	91	18	2	2.5	206	29
22.3	28.5	7.4	-	43.4	2466	2.5	3.64	2686	226	10	120	24	2.1	4.2	262	38
25.3	32.2	6.1	-	42.1	2620	2.6	3.01	3409	265	10.3	148	29	2.1	6.7	306	46
28.5	36.3	5.1	-	41	2763	2.6	2.54	4008	308	10.5	176	35	2.2	9.6	354	55
32.9	41.9	8	-	42.4	2583	3.8	1.93	4912	380	10.8	475	65	3.4	10	426	100
38.5	49.1	6.6	-	39.7	2947	3.9	1.6	5994	457	11	587	80	3.5	16.6	513	123
44.8	57.0	5.7	-	34.9	3813	3.9	1.39	7076	531	11.1	695	94	3.5	25.8	600	145
49.2	62.6	9.2	3548	33.6	4114	5.4	1.11	7076	574	10.6	1523	151	4.9	24.1	636	229
58.2	74.2	7.5	-	31.5	-	5.5	0.93	8699	690	10.8	1873	185	5	40.8	767	282
67.4	85.8	6.5	-	28.9	-	5.5	0.8	10323	805	11	2223	218	5.1	62.9	900	333
72.9	92.9	8.9	3725	29.4	-	7	0.7	11321	895	11	3888	306	6.5	57.9	990	464
80	101.9	8.2	4472	27.3	-	7	0.64	12612	983	11.1	4287	338	6.5	75.8	1091	513
89.1	113.6	7.4	-	24.3	-	7	0.59	14193	1093	11.2	4828	377	6.5	103	1222	574
101.3	129.0	6.6	-	22.1	-	7.1	0.53	16400	1240	11.3	5577	433	6.6	148	1398	657
114.5	145.8	5.9	-	20	-	7.1	0.47	18938	1408	11.4	6410	493	6.6	213	1600	752
131.2	167.1	5.2	-	17.9	-	7.2	0.42	22227	1614	11.5	7451	570	6.7	313	1851	870
148.9	189.7	4.6	-	16.3	-	7.2	0.38	25931	1835	11.7	8616	655	6.7	454	2130	1000
166.6	212.3	4.2	-	15	-	7.3	0.34	29802	2065	11.8	9823	742	6.8	659	2409	1134

4.- Inercia en perfiles metálicos (IR).



OC
TUBO CIRCULAR
DIMENSIONES Y PROPIEDADES

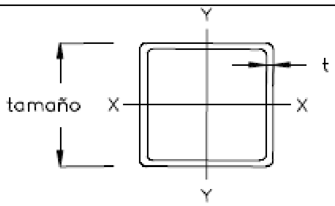
Designacion D x t		Diametro nominal	Diametro interior	Peso	Area	Ejes X-X y Y-Y			Denominación
						I	S	r	
mm x mm	in. x in.	in.	mm	kg/m	cm2	cm4	cm3	cm	
114 x 6.02	4.5 x 0.237	4	102.26	16.08	20.48	301.05	52.68	3.83	40 E
x 8.56	x 0.337		97.18	22.32	28.44	400.03	70.00	3.75	80 XE
x 11.13	x 0.438		92.04	28.32	36.07	485.56	84.96	3.67	120
x 13.49	x 0.531		87.32	33.54	42.72	552.45	96.67	3.60	160
x 17.12	x 0.674		80.06	41.03	52.27	636.16	111.31	3.49	XXE
141 x 6.55	5.56 x 0.258	5	128.2	21.77	27.73	630.83	89.29	4.77	40 E
x 9.53	x 0.375		122.24	30.97	39.45	860.73	121.83	4.67	80 XE
x 12.7	x 0.500		115.9	40.28	51.31	1071.03	151.60	4.57	120
x 15.88	x 0.652		109.54	49.12	62.57	1250.02	176.93	4.47	160
x 19.05	x 0.750		103.2	57.43	73.16	1399.98	198.16	4.37	XXE
168 x 7.11	6.63 x 0.280	6	154.08	28.26	36	1171.63	139.23	5.70	40 E
x 10.97	x 0.432		146.36	42.56	54.22	1685.81	200.33	5.58	80 XE
x 14.27	x 0.562		139.76	54.21	69.05	2065.43	245.45	5.47	120
x 18.26	x 0.719		131.78	67.57	86.07	2457.92	292.09	5.34	160
x 21.95	x 0.864		124.4	79.22	100.92	2762.70	328.31	5.23	XXE
219 x 6.35	8.63 x 0.250	8	206.4	33.32	42.44	2403.40	219.39	7.53	20
x 7.04	x 0.277		205.02	36.82	46.9	2639.28	240.92	7.50	30
x 8.18	x 0.322		202.74	42.55	54.2	3018.69	275.55	7.46	40 E
x 10.31	x 0.406		198.48	53.09	67.63	3694.07	337.20	7.39	60
x 12.7	x 0.500		193.7	64.64	82.35	4401.83	401.81	7.31	80 XE
x 15.09	x 0.594		188.92	75.92	96.71	5059.09	461.81	7.23	100
x 18.25	x 0.719		182.6	90.4	115.16	5854.75	534.44	7.13	120
x 20.62	x 0.812		177.86	100.93	128.57	6399.72	584.18	7.06	140
x 22.23	x 0.875		174.64	107.93	137.49	6745.91	615.78	7.00	XXE
273 x 6.35	10.75 x 0.250	10	260.4	41.77	53.21	4735.77	346.82	9.43	20
x 7.8	x 0.307		257.5	51.03	65.01	5724.55	419.23	9.38	30
x 9.27	x 0.365		254.56	60.31	76.83	6693.37	490.18	9.33	40 E
x 12.7	x 0.500		247.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	60



OC
TUBO CIRCULAR
DIMENSIONES Y PROPIEDADES

Designacion D x t		Diametro nominal	Diametro interior	Peso	Area	Ejes X-X y Y-Y			Denominación
						I	S	r	
mm x mm	in. x in.	in.	mm	kg/m	cm2	cm4	cm3	cm	
324 x 6.35	12.75 x 0.250	12	311.2	49.73	63.35	7989.09	493.24	11.23	20
x 8.38	x 0.330		307.14	65.21	83.03	10344.0	638.7	11.2	30
x 9.53	x 0.375		304.84	73.88	94.12	11637.8	718.6	11.1	E
x 10.31	x 0.406		303.28	79.73	101.57	12498.8	771.8	11.1	40
x 12.7	x 0.500		298.5	97.47	124.16	15055.8	929.7	11.0	XE
x 14.27	x 0.562		295.36	108.96	138.81	16669.9	1029.3	11.0	60
x 17.48	x 0.668		288.94	132.09	168.27	19813.5	1223.4	10.9	80
x 21.44	x 0.844		281.02	159.92	203.72	23413.4	1445.7	10.7	100
356 x 6.35	14 x 0.250	14	342.9	54.69	69.67	10626.3	597.7	12.4	10
x 7.92	x 0.312		339.76	67.91	86.51	13078.2	735.6	12.3	20
x 9.53	x 0.375		336.54	81.33	103.61	15522.9	873.1	12.2	30 E
x 11.13	x 0.438		333.34	94.55	120.45	17883.9	1005.8	12.2	40
x 12.7	x 0.500		320.2	107.4	136.81	20135.5	1132.5	12.1	XE
x 15.09	x 0.594		325.42	126.72	161.42	23441.8	1318.4	12.1	60
x 19.05	x 0.750		317.5	158.11	201.42	28608.4	1609.0	11.9	80
x 23.83	x 0.938		309.94	194.97	248.37	34350.0	1932.0	11.8	100
406 x 6.35	16 x 0.250	16	393.7	62.65	79.81	15969.6	785.9	14.2	10
x 7.92	x 0.312		390.56	77.83	99.15	19686.9	968.8	14.1	20
x 9.53	x 0.375		387.34	93.27	118.82	23407.2	1151.9	14.0	30 E
x 12.7	x 0.500		381	123.31	157.08	30465.7	1499.3	13.9	40 XE
x 16.66	x 0.659		373.08	160.13	203.99	38801.9	1909.5	13.8	60
x 21.44	x 0.844		363.52	203.54	259.29	48181.1	2371.1	13.6	80
457 x 6.35	18 x 0.250	18	444.3	70.57	89.9	22826.9	999.0	15.9	10
x 7.92	x 0.312		441.16	87.72	111.74	28177.3	1233.1	15.9	20
x 11.13	x 0.438		434.74	122.38	155.9	38766.1	1696.6	15.8	30
x 12.7	x 0.500		431.6	139.16	177.27	43777.3	1915.9	15.7	XE
x 14.27	x 0.562		428.46	155.81	198.48	48680.2	2130.4	15.7	40
x 19.05	x 0.750		418.9	205.75	262.1	62958.0	2755.3	15.5	60
x 23.83	x 0.938		409.34	254.57	324.29	76291.1	3338.8	15.3	80
508 x 6.35	20 x 0.250	20	495.3	78.56	100.07	31485.0	1239.6	17.7	10
x 9.53	x 0.375		488.94	117.15	149.24	46369.3	1825.6	17.6	20
x 12.7	x 0.500		482.6	155.13	197.62	60639.4	2387.4	17.5	30 XE
x 15.09	x 0.594		477.82	183.43	233.67	71032.8	2796.6	17.4	40

5.- Inercia en perfiles metálicos cuadrados (OR).



OR
TUBO CUADRADO
DIMENSIONES Y PROPIEDADES

Designación tamaño y espesor *t*		Peso		Area	Ejes X-X y Y-Y		
					I	*S*	*r*
mm x mm	in. x in.	kg/m	lb./ft.	cm^2	cm^4	cm^3	cm
25 x 2.4	1 x 0.095	1.62	1.09	2.07	1.75	1.38	0.92
x 3.4	x 0.133	2.10	1.41	2.68	2.01	1.58	0.87
38 x 2.8	1.5 x 0.110	2.95	1.98	3.74	7.56	3.96	1.42
x 3.2	x 0.125	3.29	2.21	4.17	8.21	4.30	1.40
51 x 2.8	2 x 0.110	4.00	2.69	5.11	19.04	7.49	1.93
x 3.2	x 0.125	4.54	3.05	5.79	21.40	8.42	1.92
x 4.0	x 0.156	5.45	3.55	6.97	24.70	9.72	1.88
x 4.8	x 0.188	6.45	4.32	8.19	27.80	10.95	1.84
x 6.4	x 0.250	8.05	5.41	10.26	31.88	12.55	1.76
64 x 3.2	2.5 x 0.125	5.84	3.92	7.40	44.07	13.88	2.44
x 3.6	x 0.141	6.47	4.35	8.26	48.30	15.20	2.42
x 4.8	x 0.188	8.32	5.59	10.58	59.10	18.68	2.36
x 6.4	x 0.250	10.58	7.11	13.48	70.34	22.12	2.28
76 x 3.2	3 x 0.125	7.12	4.78	9.01	79.83	20.71	2.95
x 4.8	x 0.188	10.20	6.85	13.00	108.00	28.30	2.90
x 6.4	x 0.250	13.11	8.81	16.71	131.53	34.41	2.79
x 7.9	x 0.313	15.74	10.58	20.10	149.00	39.17	2.72
89 x 3.2	3.5 x 0.125	8.39	5.64	10.62	128.53	28.91	3.47
x 4.0	x 0.156	10.20	6.85	13.00	154.00	34.60	3.45
x 4.8	x 0.188	12.10	8.13	15.40	179.00	40.10	3.40
x 6.3	x 0.250	15.64	10.51	19.90	220.20	50.00	3.33
x 7.9	x 0.313	18.90	12.70	24.06	253.50	57.05	3.25

4.9 Ejercicios de compresión (IMCA).

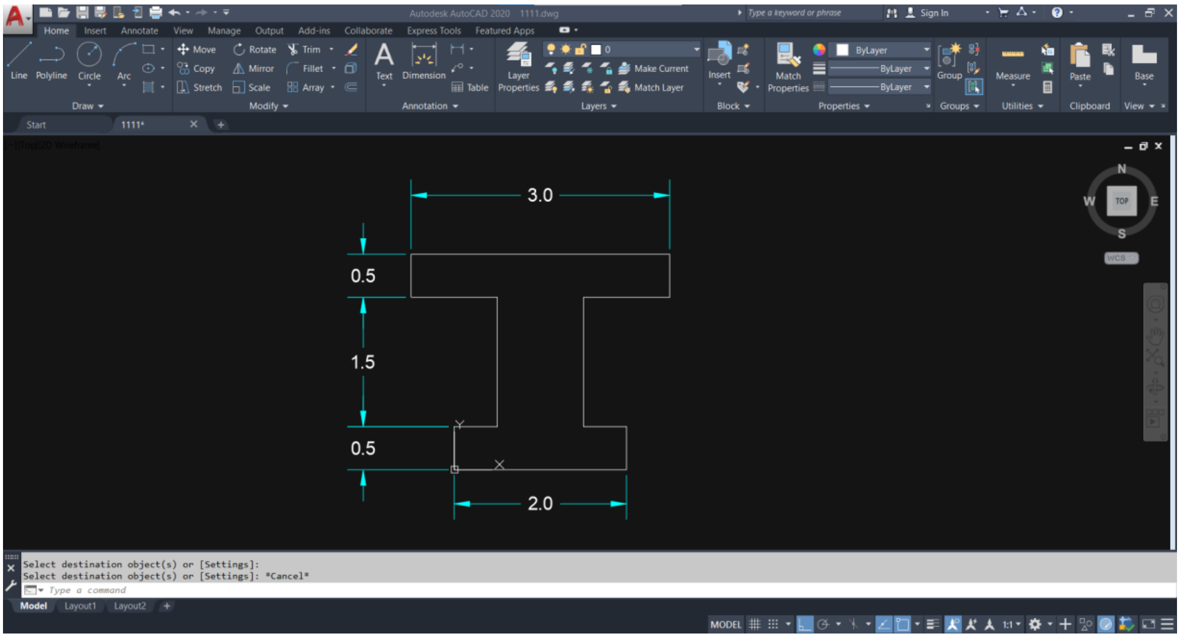
1.- Dibujar el polígono deseado con el comando línea **(LI).**

2.- Unir las líneas para hacer una misma polilínea, con el comando **(JOIN)** Seleccionar líneas y enter.

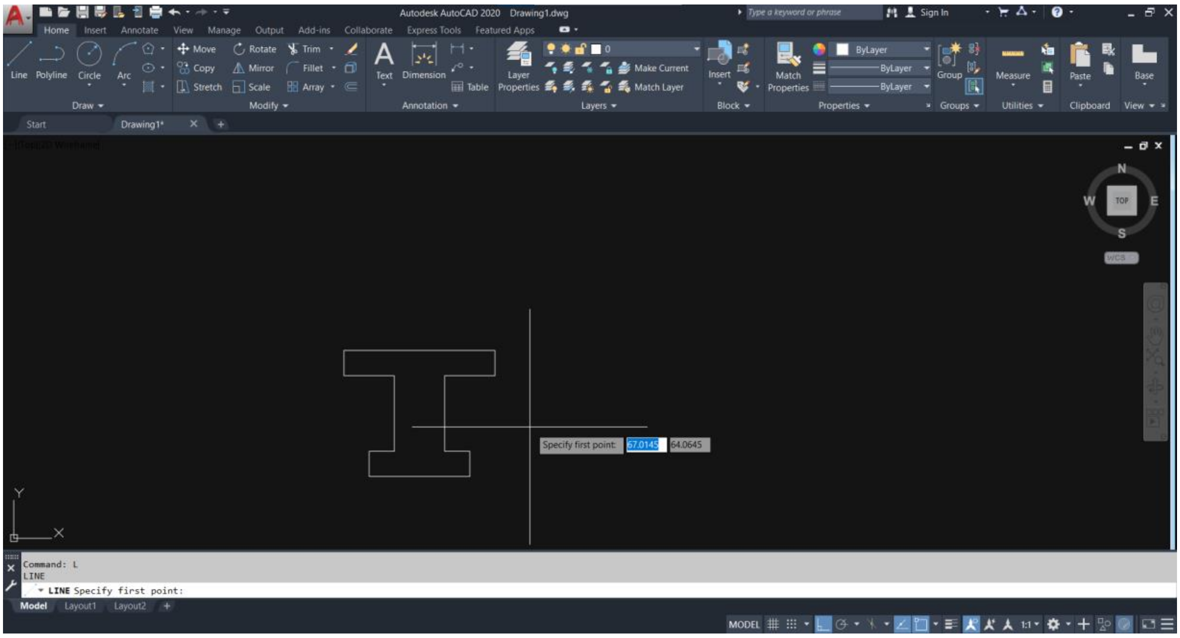
3.- Crea una región con el comando **(REG)** y seleccionar todo el polígono.

5.- Digitalizar el comando **(MASSPROP)** Seleccionar el polígono y enter.

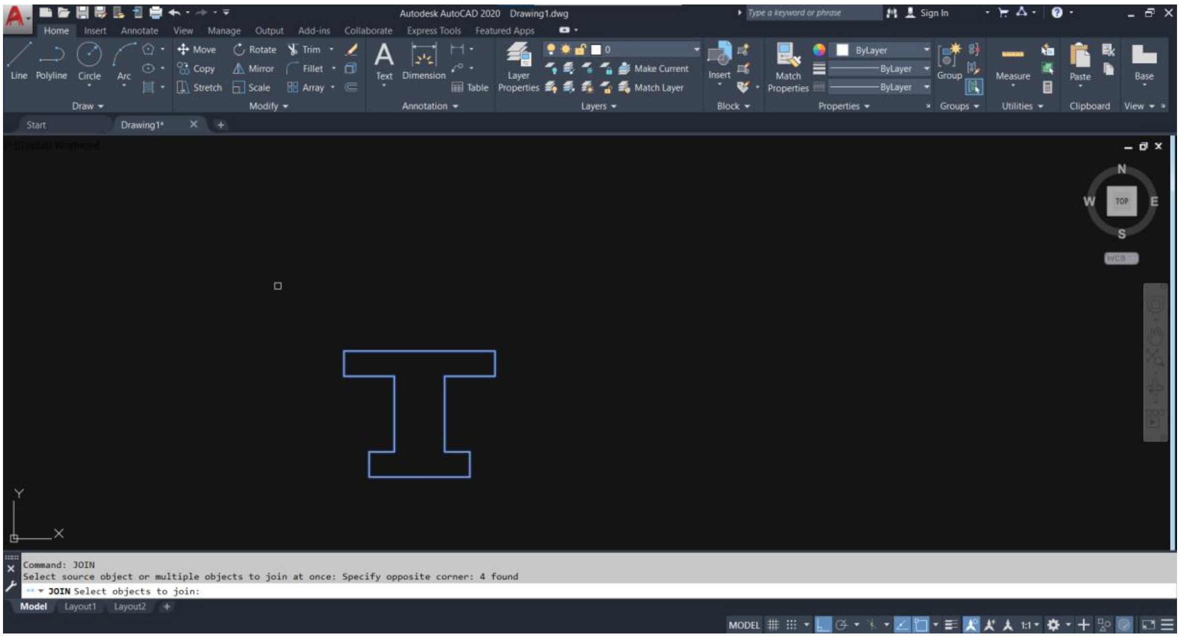
El la ventana abierta estarán los datos del momento de Inercia del polígono deseado.



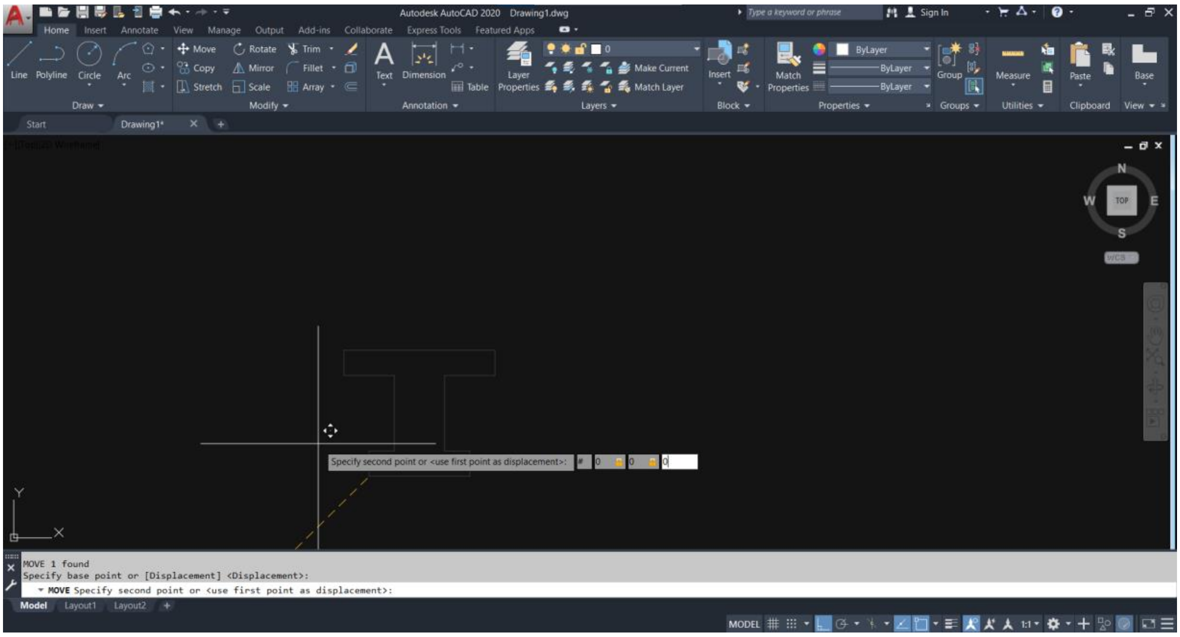
1.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Specify first point: 67.0145 64.0645
Command: L
LINE
LINE Specify first point:

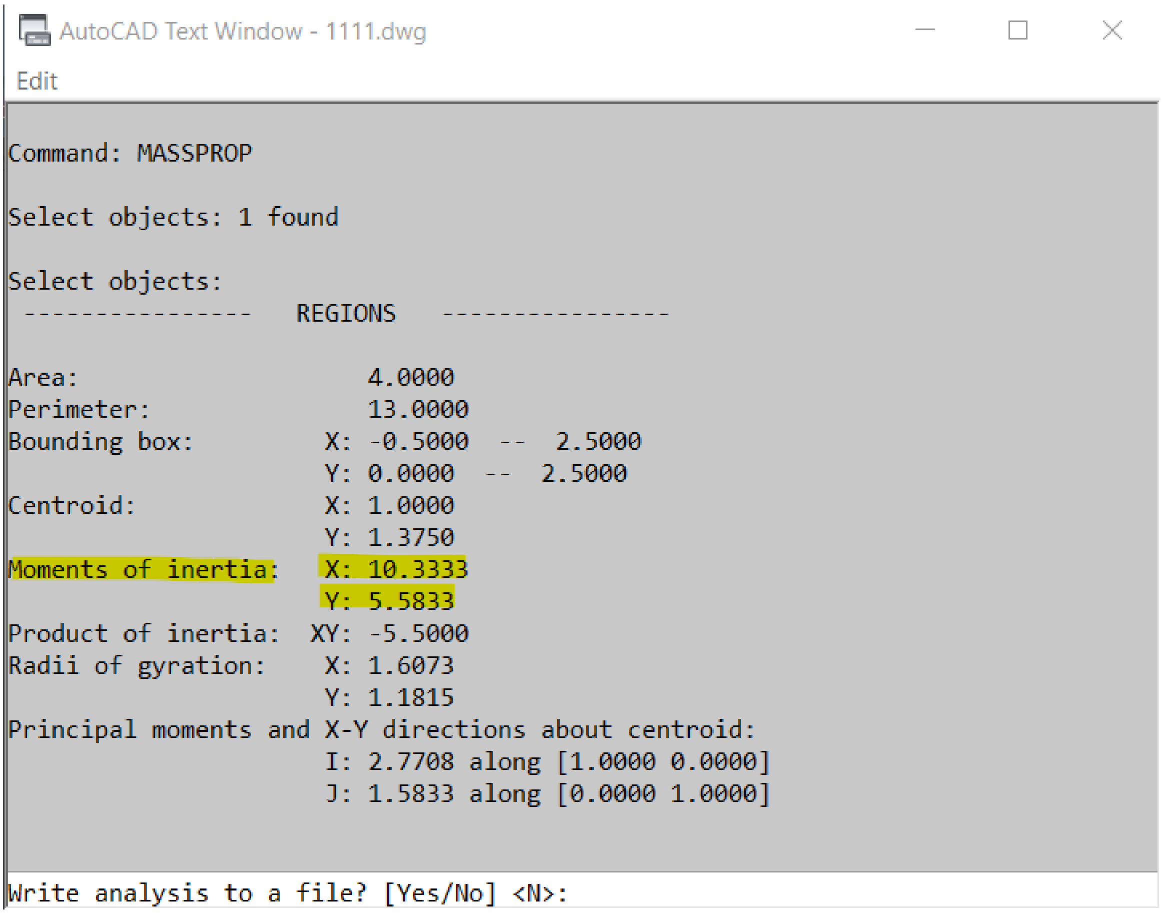
2.-


Autodesk AutoCAD 2020 Drawing1.dwg
Command: JOIN
Select source object or multiple objects to join at once: Specify opposite corner: 4 found
JOIN Select objects to join:

3.-



Ventana MASSPROP



AutoCAD Text Window - 1111.dwg

Edit

```
Command: MASSPROP

Select objects: 1 found

Select objects:
 ----------------   REGIONS   ----------------

Area:                    4.0000
Perimeter:               13.0000
Bounding box:         X: -0.5000  --  2.5000
                      Y: 0.0000  --  2.5000
Centroid:             X: 1.0000
                      Y: 1.3750
Moments of inertia:   X: 10.3333
                      Y: 5.5833
Product of inertia:  XY: -5.5000
Radii of gyration:    X: 1.6073
                      Y: 1.1815
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                      I: 2.7708 along [1.0000 0.0000]
                      J: 1.5833 along [0.0000 1.0000]

Write analysis to a file? [Yes/No] <N>:
```

4.10 Producto escalar.

Productos de vectores. Producto escalar y producto vectorial. En muchas situaciones de interés físico (no se debe olvidar que todos estos conceptos matemáticos los estamos introduciendo por que nos van a ser útiles en el estudio de los fenómenos naturales) cierta magnitud física resultado depende de dos magnitudes vectoriales (ejemplo: el trabajo que tengo que realizar para desplazar un objeto depende del desplazamiento – magnitud vectorial – y de la fuerza con que tiro de él – otra magnitud vectorial).

En algunos casos la magnitud física resultado en la que estamos interesados es una magnitud escalar (como el caso del trabajo en el ejemplo anterior), otras veces el resultado es otra magnitud vectorial

Para poder describir de forma matemática estos fenómenos necesitamos definir por lo tanto dos nuevas operaciones entre vectores. Una operación entre dos vectores que como resultado un escalar, operación a la que llamaremos producto escalar, y una operación entre dos vectores que de como resultado otro vector, operación a la que llamaremos producto vectorial.

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se expresa matemáticamente como $\vec{A}\cdot\vec{B}$, y se define del modo siguiente. Se dibujan ambos vectores partiendo de un origen común (fig. 9). Si llamamos θ al ángulo que forman entre si, su producto escalar, viene dado por:

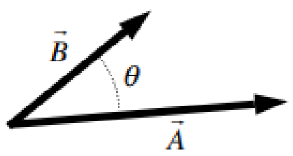


Fig. 9: El ángulo que forman entre sí dos vectores se determina dibujándolos con el mismo origen.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = A\,B\cos\theta \qquad (7)$$

Como se puede ver, el resultado de la operación es un escalar (un número) que puede ser positivo, negativo o nulo dependiendo del ángulo θ entre los vectores:

$$\text{si} \quad 0 \leq \theta < 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} > 0$$
$$\text{si} \quad 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} < 0 \qquad (8)$$
$$\text{si} \quad \theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

El producto escalar verifica la propiedad conmutativa (sus módulos A y B son números):

$$\vec{B}\cdot\vec{A} = B\ A \cos\theta = A\ B \cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{B} \qquad (9)$$

Según la definición si realizamos el producto escalar de un vector por si mismo el resultado es su módulo al cuadrado:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A\ A \cos(0^\circ) = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \qquad (10)$$

(10) por lo que el módulo de un vector puede escribirse como la raíz cuadrada del producto escalar por sí mismo (esta expresión no debería asustarnos si pensamos que lo que está dentro de la raíz es un escalar, un numero).

4.11 Producto vectorial.

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se expresa matemáticamente como $\vec{A} \times \vec{B}$ (en algunos libros se utiliza también la notación $\vec{A} \wedge \vec{B}$). Dado que el resultado de esta operación es un vector hay que indicar su módulo, dirección y sentido.

Módulo: $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = A\,B\,\mathrm{sen}\theta$ (obsérvese que es una cantidad siempre positiva)

Dirección: perpendicular al plano que contiene a los dos vectores.

Sentido: el indicado por la regla de la mano derecha (o regla del sacacorchos). Como se indica en la figura 10, cuando se orientan los dedos de la mano derecha de forma que vayan en el sentido de rotación del primer vector al segundo, el pulgar indica el sentido del producto vectorial.

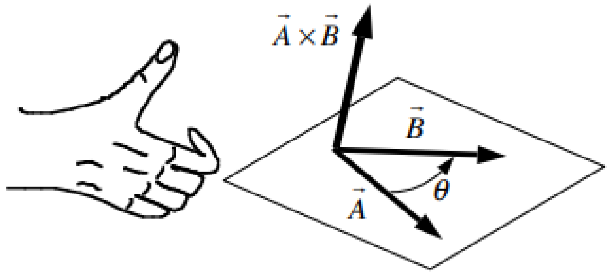


Fig. 10: Producto vectorial de dos vectores.

Tal como ha sido definido se puede ver que el producto vectorial es nulo si los dos vectores tienen la misma dirección ($\theta = 0^{\circ}$ ó $\theta = 180^{\circ}$). Por otro lado el producto vectorial no verifica la propiedad conmutativa. Cambiar el orden de los factores implica un cambio de signo en el resultado $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (ver fig. 11). Es importante por lo tanto no intercambiar el orden de los factores en expresiones que contengan productos vectoriales, y aplicar de forma correcta la regla de la mano derecha.

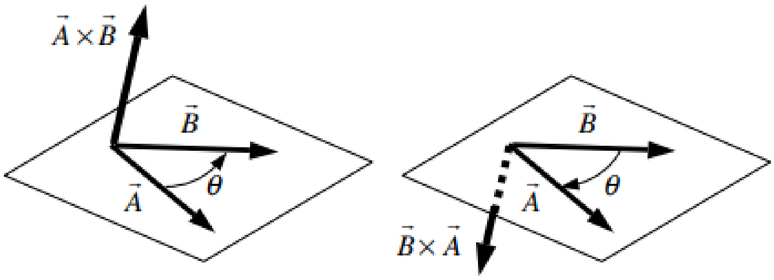
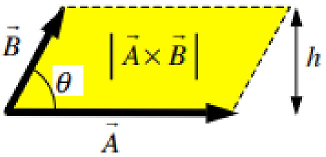


Fig. 11: El producto vectorial de dos vectores es anticonmutativo $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

Como puede verse en la figura 12, el área del paralelogramo formado por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial de dichos vectores.



$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = A\,B\,\mathrm{sen}\,\theta = A\,h =$$

$$= \text{área del paralelogramo}$$

Fig. 12: Relación entre el área del paralelogramo formado por dos vectores y su producto vectorial.

Recursos:

http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/7721/COMPILACION%20DE%20EJERCICIOS%20DE%20ESTATICA.pdf?sequence=1

https://www.youtube.com/watch?v=BAUwPxE-cdM

https://www.youtube.com/watch?v=8Qpdrpczbtc

Bibliografía básica y complementaria:

CESAR P. MORI_COVARRUBIAS, PEORO REYES GINORI (1987). CONCEPTOS Y PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, FACULTAD DE INGENIERÍA.

Arq. Carlos García Malo Flores (1997). CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA. UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA.

A.C. Hibbeler (1985), "Mecánica para Ingenieros. Estática ". CECSA

JORGEEDUARDOSALAZARTRUJILLO (2001). MECÁNICA BÁS ICA PARA E S TUDIANT E S DE INGENIE R ÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA