



ANTOLOGIA

RESISTENCIAS DE MATERIALES DE CONTRUCCIÓN

ARQUITECTURA

CUARTO CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de

cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO



El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

“Mi Universidad”

ALBORES



Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Resistencias de materiales de construcción

Objetivo de la materia:

Proporcionar una formación adecuada, para determinar las respuestas estructurales de los elementos, cuando son sometidas a diferentes acciones que deben de soportar durante el proceso constructivo y la vida útil del elemento o edificio proyectado. Entendiendo el contexto profesional de esta área.

INDICE

UNIDAD I	8
FUERZAS COPLANARES	8
1.1 Fuerzas Coplanares.....	9
1.2 Ejercicios de comprensión (Fuerzas Coplanares)	9
1.3 Composición de Fuerzas Concurrentes, Coplanares y Paralelas.....	11
1.4 Ejercicios de comprensión (Composición de Fuerzas).....	13
1.5 Centro de gravedad y Centro de masa.....	14
1.6 Ejercicios de comprensión (Centro de gravedad y Centro de masa)	15
1.7 Principio de los Trabajos Virtuales.....	15
UNIDAD II.....	17
MOMENTOS.....	17
2.1 Momento se una Fuerza.	17
2.2 Ejercicios de comprensión (Momento se una Fuerza).....	19
2.3 Fuerzas paralelas.....	21
2.4 Ejercicios de comprensión (Fuerzas paralelas).....	24
2.5 Equilibrio de Los Sistemas de Fuerzas.	25
2.6 Diagramas de Cuerpo Libre.....	27
2.7 Ejercicios de comprensión (Equilibrio de Los Sistemas de Fuerzas).	30
2.8 Equilibrio de los sistemas de fuerzas colineales.....	31
2.9 Equilibrio de los sistemas de fuerzas no concurrentes ni paralelas.	40
2.10 Ejercicios de comprensión (Equilibrio de Los Sistemas de Fuerzas)	43
UNIDAD III.....	44

CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA.	44
3.1 Centroides de áreas simples y compuestas.....	44
3.2 Ejercicios de comprensión (Centroides de áreas simples y compuestas).....	47
3.3 Momento de Inercia de áreas simples.	48
3.4 Ejercicios de comprensión (Momento de Inercia de áreas simples).	53
3.5 Teorema de los Ejes de Paralelos o de Steiner	54
3.6 Figuras y cuerpos compuestos (aplicación digital).	58
3.7 Ejercicios de comprensión (aplicación digital).	58
UNIDAD IV	62
ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.....	62
4.1 Esfuerzo y deformación.	62
4.2 Esfuerzos de Corte o Cortantes	64
4.3 Relación esfuerzo-deformación, módulo de poisson.	66
4.4 Esfuerzo cortante.	70
4.5 Diagramas de Momentos flexionantes y Fuerzas cortantes	71
4.6 Ejercicios de comprensión (Diagramas de Momentos flexionantes y Fuerzas cortantes).	72
4.7 Fuerza Cortante y Momento flexionante en Vigas.....	73
4.8 Ejercicios de comprensión (Fuerza Cortante y Momento flexionante en Vigas)	79

UNIDAD I

FUERZAS COPLANARES

INTRODUCCIÓN

La Resistencia de Materiales es el de proporcionar al usuario los medios para analizar y diseñar estructuras o componentes capaces de soportar las cargas y acciones a las que éstos están o pueden estar sometidos durante su vida útil. Tanto el análisis como el diseño de cualquier componente estructural conllevan la determinación de tensiones y deformaciones. Los conceptos de tensión y deformación son, por tanto, básicos en la exposición de esta materia.

La Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad, como partes integrantes de la Mecánica de Sólidos Deformables, son dos disciplinas con objetivos comunes: ambas abordan el estudio de la resistencia (estado de tensiones) y la rigidez (estado de deformaciones) de cuerpos sólidos deformables sometidos a la acción de sistemas de fuerzas en equilibrio estático. Asimismo, ambas parten del principio de linealidad entre acción y respuesta; esto, como se verá en lo que sigue, implica que el comportamiento de los materiales es elástico y que los movimientos que se producen son pequeños.

La Resistencia de Materiales limita su campo de aplicación a ciertos tipos de elementos estructurales (vigas, columnas, etc.) sustentados de ciertas maneras predeterminadas (apoyos simples, articulaciones, empotramientos, etc.) y sometidas a ciertos tipos de acciones (fuerzas puntuales y repartidas, generalmente, y otras acciones definidas de forma adecuada). Esta restricción previa en cuanto a las geometrías, condiciones de apoyo y acciones consideradas permite la formulación de ciertas hipótesis de partida y de un planteamiento simplificado apto para la resolución analítica de multitud de problemas de ingeniería.

El proceso de construcción de una estructura empieza por la concepción de ésta. En esta fase se determina su tipología y se identifican las acciones que actuarán sobre ella.

En ese momento entra en juego la Resistencia de Materiales para evaluar la respuesta estructural del correspondiente al pre-diseño estructural. En función de los resultados obtenidos, se procede al dimensionamiento de los elementos estructurales, es decir, a dar valores concretos a las dimensiones de éstos.

1.1 Fuerzas Coplanares

El movimiento general de un cuerpo rígido es una combinación de movimiento de traslación y de rotación.

A diferencia del punto material, donde el equilibrio estático (movimiento nulo) implicaba solo que la fuerza resultante que actúa sobre él sea igual a cero y que la velocidad inicial sea también cero, en el cuerpo rígido la fuerza resultante que actúa sobre él tiene que ser igual a cero y también que el momento resultante de las fuerzas que actúan tiene que ser también igual a cero.

En este capítulo se tratan las condiciones necesarias para que un sólido (o conjunto de sólidos) inicialmente en reposo, se mantenga en equilibrio. Se trata de resolver tres problemas:

- Dado un sistema sometido a un conjunto de fuerzas dadas, encontrar sus posiciones de equilibrio.

- Analizar la estabilidad de las posiciones de equilibrio, que consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.
- Dada una posición una configuración geométrica determinada, determinar las acciones necesarias (tanto fuerzas activas como reacciones) que aseguren el equilibrio y su estabilidad.

Las fuerzas se pueden clasificar en fuerzas activas (o directamente aplicadas), y fuerzas pasivas, también llamadas reacciones o fuerzas de ligadura. Las fuerzas activas son las que tienen un valor conocido, variables con el tiempo o no (por ejemplo, cargas exteriores ejercidas sobre el cuerpo), o posiblemente en función de la configuración o estado del sistema (por ejemplo, fuerzas internas en muelles o amortiguadores). Las reacciones son las que sirven para imponer una determinada ligadura o apoyo, y cuyo valor debe calcularse imponiendo las ecuaciones de equilibrio compatibles con dicha ligadura.

1.2 Ejercicios de comprensión (Fuerzas Coplanares)

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

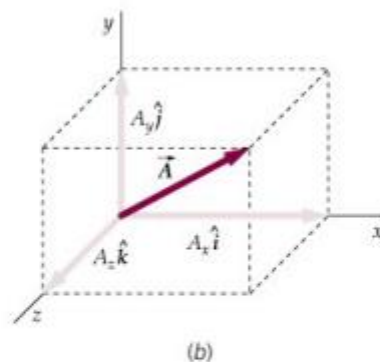
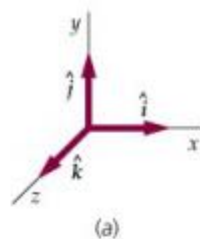
I.3 Composición de Fuerzas Concurrentes, Coplanares y Paralelas.

Fuerzas concurrentes: Son aquellas que están aplicadas a un mismo punto.

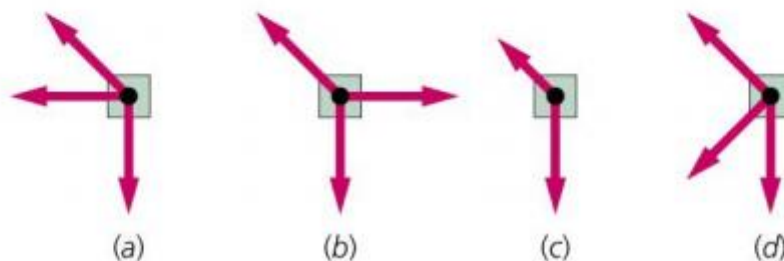
La resultante de estas fuerzas es el vector suma:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

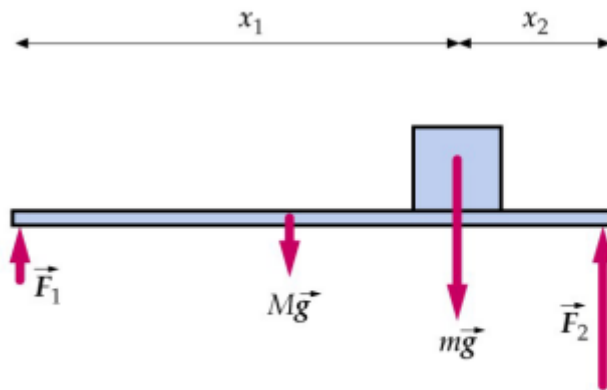
Fuerzas paralelas: Todas aquellas que tienen igual dirección (aunque pueden tener diferente sentido) que un determinado vector unitario.



Resultante de fuerzas concurrentes.



Ejemplo de fuerzas concurrentes y coplanares.



Ejemplo de fuerzas coplanares y paralelas.

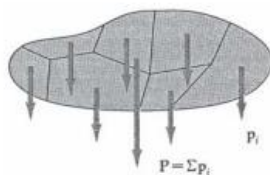
I.4 Ejercicios de comprensión (Composición de Fuerzas).

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

1.5 Centro de gravedad y Centro de masa

Supongamos un sistema de partículas de masas m_i en el interior de un campo gravitatorio uniforme ($g = \text{cte}$).

El centro de gravedad del sistema de partículas es un punto del sistema en el cual se considera aplicada la fuerza peso total del sistema P , de tal modo que el momento que produce dicha fuerza respecto a un punto cualquiera es igual a la resultante de los momentos de los pesos individuales P_i que constituyen el sistema.



$$\vec{M}_T = \vec{r}_{cg} \times \vec{P}_T = \vec{r}_{cg} \times M\vec{g} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M \vec{r}_{cg} \times \vec{g} \Rightarrow \vec{r}_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\text{si } \vec{r}_{cg} = x_{cg} \hat{i} + y_{cg} \hat{j} + z_{cg} \hat{k} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \\ y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \\ z_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \end{array} \right.$$

$$\text{Si la distribución de masa es continua: } \vec{r}_{cg} = \frac{\int_M \vec{r} dm}{M} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{cg} = \frac{\int_M x dm}{M} \\ y_{cg} = \frac{\int_M y dm}{M} \\ z_{cg} = \frac{\int_M z dm}{M} \end{array} \right.$$

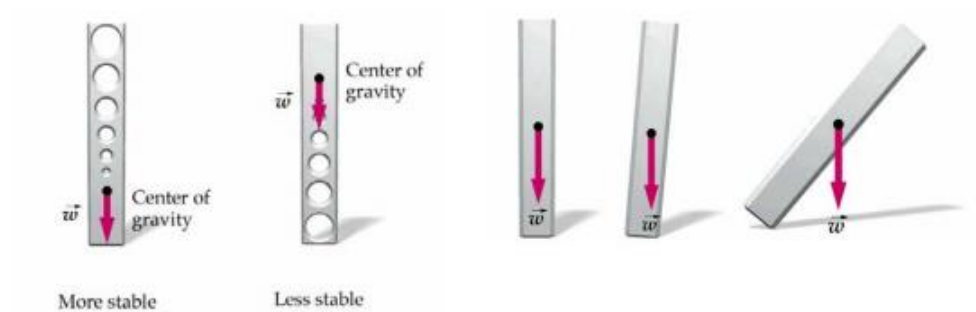
El centro de masas está relacionado con la distribución de la masa, mientras que el centro de gravedad está relacionado con la resultante de las atracciones gravitatorias. El centro de gravedad del sistema está localizado en el centro de masas, si el valor de g es constante sobre el cuerpo.

Propiedades

1) Si un cuerpo cuelga de un solo punto en un campo gravitatorio y está en equilibrio, el centro de gravedad siempre cae directamente debajo del punto de suspensión. Dicho equilibrio se conoce como equilibrio estable.

2) Si un cuerpo cuelga de un solo punto en un campo gravitatorio y está en equilibrio, estando el centro de gravedad en la vertical y por encima del punto de suspensión, se dice que está en equilibrio inestable.

3) Una fuerza aplicada a un cuerpo directamente en su centro de gravedad no produce momento, mientras que aplicada en cualquier otro punto tiende a causar un movimiento de translación y otro de rotación.



Situaciones de equilibrio estable e inestable.

1.6 Ejercicios de comprensión (Centro de gravedad y Centro de masa)

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

1.7 Principio de los Trabajos Virtuales

Constituye un recurso para la resolución de problemas de estática. “El trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas a un sistema material durante un desplazamiento virtual, a partir de la posición de equilibrio, vale cero”.

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

Se entiende por desplazamiento virtual un desplazamiento infinitesimal, reversible y compatible con las ligaduras del sistema. Existe una equivalencia entre las ecuaciones de equilibrio y el principio de los trabajos virtuales. Suponiendo que el sistema material experimenta un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$ y un cambio en la orientación del cuerpo $\delta \theta$

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_Q + \delta \theta \hat{k} \times \vec{r}_{Q,i} \\ \delta \vec{r}_i &= \delta \vec{r}_Q + \delta \theta \hat{k} \times \vec{r}_{Q,i} \end{aligned}$$

siendo:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\delta \vec{r}_Q + \delta \theta \hat{k} \times \vec{r}_{Q,i}) = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_Q + \left(\sum_{i=1}^n M_{Q,i} \right) \cdot \delta \theta \hat{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = \vec{F}_T = 0 \\ \left(\sum_{i=1}^n M_{Q,i} \right) = \vec{M}_Q = 0 \end{cases}$$

UNIDAD II

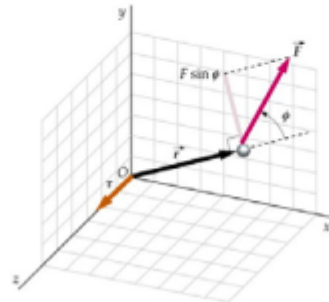
MOMENTOS

2.1 Momento de una Fuerza.

Se sabe que la causa de una rotación es el momento de una fuerza, calculemos ese momento.

El **momento de una fuerza** \vec{F} respecto de un punto O (o respecto de un eje que pase por O) es un vector \vec{M}_O que es igual al **producto vectorial de dos vectores** \vec{r} y \vec{F} , o sea:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$



Si las coordenadas de los puntos son $O(x_o, y_o, z_o)$ y de aplicación de la fuerza $A(x_A, y_A, z_A)$, el vector momento \vec{M}_O tiene la expresión:

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_o & y_A - y_o & z_A - z_o \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

y si las coordenadas de O son $O(0,0,0)$.

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

El **módulo de** \vec{M}_O es igual a $r F \text{ sen } \phi$, siendo ϕ el ángulo formado entre el vector \vec{r} y el vector \vec{F} . La cantidad $r \text{ sen } \phi$, es la distancia d entre el punto O y la línea de acción de la fuerza.

Momento de varias fuerzas concurrentes.

El momento resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a la suma vectorial de los momentos de cada una de las fuerzas e igual al momento de la resultante.

$$\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_i = \vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{r} \wedge \vec{F}_n = \sum \vec{M}_i = \vec{M}_R$$

Momento de varias fuerzas concurrentes y coplanares.

Si las fuerzas están en un plano y el punto O está en ese plano, los momentos son vectores perpendiculares a dicho plano lo que implica que las fuerzas concurrentes pueden reemplazarse por una sola fuerza: su resultante.

Composición de fuerzas aplicada a un sólido rígido.

Cuando las fuerzas F_i que se aplican a un sólido rígido no se aplican en un mismo punto del cuerpo tenemos dos efectos: traslación y de rotación.

La traslación viene dada por el *vector suma de las \vec{F}_i* o sea la **resultante**:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

y el efecto de rotación viene dado por el *vector suma de los momentos o momento resultante*.

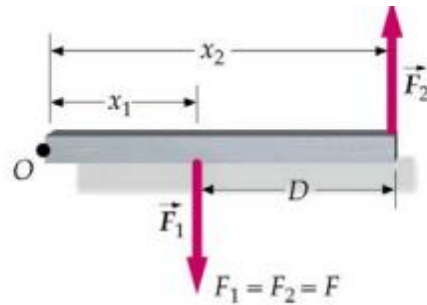
$$\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_i = \sum \vec{M}_i$$

El punto de aplicación O' debe ser tal que si \vec{r} es el vector OO':

$$\vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{M}_R$$

con lo que si \vec{R} se aplica en O' es equivalente al conjunto de fuerzas \vec{F}_i cada una aplicada en O'_i , pero esto no es siempre posible en otros casos ya que si \vec{R} y \vec{M}_R no son perpendiculares el sistema de fuerzas \vec{F}_i no puede reducirse a una \vec{R} aplicada en O', un ejemplo es el **par de fuerzas**: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

La resultante de estas fuerzas es: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$



y el momento resultante respecto de O es:

$$\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{x}_2 \wedge \vec{F}_1 - \vec{x}_1 \wedge \vec{F}_1 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \wedge \vec{F}_1 = \vec{D} \wedge \vec{F}_1$$

Un sistema de fuerzas \vec{F}_i puede siempre reducirse a una fuerza \vec{R} y a un par, aplicando la resultante \vec{R} en un punto O' respecto al cual se obtienen los momentos, y se escoge un par igual a \vec{M}_R .

El momento producido por un par de fuerzas es el mismo respecto a cualquier punto del espacio y vale: $\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{D} \wedge \vec{F}_1$

Composición de fuerzas coplanares.

Si las fuerzas F_i son coplanares la resultante R está contenida en el mismo plano que las F_i y cada momento M_i es vertical al plano de las fuerzas y

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_i = \sum \vec{M}_i$$

lo que implica que \vec{R} y \vec{M}_R son perpendiculares, o sea que siempre podemos encontrar un punto de aplicación O' tal que si colocamos en él la resultante \vec{R} :

$$\vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{M}_R$$

siendo \vec{r} es el vector OO' .

En realidad \vec{R} se puede aplicar en toda una línea de puntos O' situados en una recta en la **línea de acción** de la resultante.

Si el conjunto de fuerzas \vec{F}_i está aplicado en el plano XY , el momento resultante \vec{M}_R vale:

$$\vec{M}_R = (x R_y - y R_x) \vec{k}$$

y la ecuación de la **línea de acción** es:

$$|\vec{M}_R| = (x R_y - y R_x)$$

2.2 Ejercicios de comprensión (Momento se una Fuerza)

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

2.3 Fuerzas paralelas.

Si las fuerzas \vec{F}_i son paralelas a un vector unitario \vec{u} , cada fuerza puede expresarse como $\vec{F}_i = F_i \vec{u}$ y la resultante es: $\vec{R} = \vec{u} \sum F_i$

La suma de los momentos es: $\vec{M}_R = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \wedge F_i \vec{u} = \sum \vec{r}_i F_i \wedge \vec{u}$

Si ponemos \vec{R} en un punto tal que: $\vec{r}_c \wedge \vec{R} = \vec{M}_R$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_c \wedge \sum \vec{u} F_i = \sum \vec{r}_i \wedge F_i \vec{u} = \sum \vec{r}_i F_i \wedge \vec{u} = (\vec{r}_c \sum F_i) \wedge \vec{u} = (\sum \vec{r}_i F_i) \wedge \vec{u}$$

Con lo que se obtiene: $r_c = \frac{\sum r_i F_i}{\sum F_i}$

Un sistema de fuerzas paralelas \vec{F}_i puede reducirse a una sola fuerza: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ paralela a todas las fuerzas \vec{F}_i y actuando en un punto c cuyo radio vector es \vec{r}_c , tal que:

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} \quad y_c = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} \quad z_c = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}$$

Condiciones

de

Equilibrio

Un cuerpo está en equilibrio si se encuentra en reposo o se mueve con velocidad constante.

a) Respecto de la translación:

La resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo ha de ser cero.

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{F}_T = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \text{constante}$$

$$\text{si } \vec{F}_T = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = \sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 \\ F_y = \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0 \\ F_z = \sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0 \end{array} \right.$$

b) Respecto de la rotación:

El momento externo resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo respecto a un punto cualquiera ha de ser cero.

$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

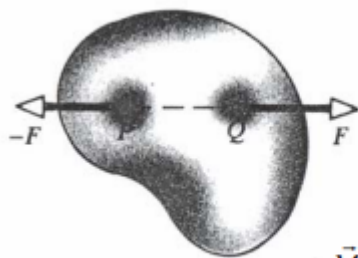
$$\vec{M}_T = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante}$$

$$\text{si } \vec{M}_T = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_x = \sum_{i=1}^n M_{i,x} = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^n M_{i,y} = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^n M_{i,z} = 0 \end{array} \right.$$

En el caso particular de *equilibrio estático*, el cuerpo se encuentra en reposo:
 $(\vec{v} = 0, \vec{\omega} = 0)$

Casos particulares:

Si sobre un cuerpo en reposo actúan 2 fuerzas, F_1 y F_2 r r , estará en equilibrio estático si dichas fuerzas tienen el mismo módulo, la misma dirección, sentidos contrarios y su línea de acción es la misma.



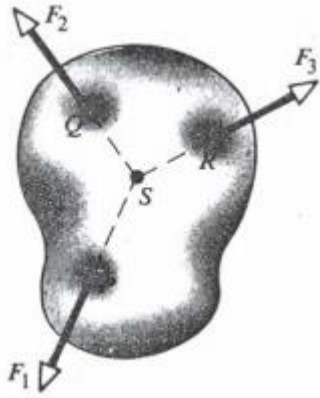
$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^2 \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1 = 0$$

Se puede comprobar que el punto O (origen de los momentos) es arbitrario, es decir:

“Si el cuerpo está en equilibrio respecto de la translación y el momento neto es cero respecto de un punto, entonces debe de ser cero respecto de cualquier punto”

Si sobre un cuerpo actúan 3 fuerzas, estará en equilibrio si las fuerzas son concurrentes (sus líneas de acción se cortan)



$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_T = \sum_{i=1}^3 \vec{M}_i = 0$$

Una excepción a este caso es que ninguna de las líneas de acción se corte, en cuyo caso las fuerzas han de ser paralelas.

2.4 Ejercicios de comprensión (Fuerzas paralelas).

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

2.5 Equilibrio de Los Sistemas de Fuerzas.

Seguiremos estudiando solamente los sistemas de fuerzas en el plano. De antemano podemos decir que un sistema de fuerzas está en equilibrio si su resultante es nula, es decir, que los efectos externos que sufre un cuerpo son los mismos si está sujeto a ese sistema o no está sujeto a ninguna fuerza. Las ecuaciones analíticas que deberá cumplir ese sistema son

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \text{ y } \sum M_oF = 0$$

Manifestaciones del equilibrio de un cuerpo Antes de pretender investigar si un sistema de fuerzas satisface las ecuaciones de equilibrio, es necesario observar las condiciones mecánicas del cuerpo para saber si, efectivamente, se encuentra en estado de equilibrio.

Cuando estudiamos la primera ley de Newton vimos que tanto un cuerpo en reposo como uno que se mueva en línea recta con velocidad constante están en equilibrio. Pero además de estas dos, hay otras dos condiciones que muestran que el cuerpo está en equilibrio: la rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa, y la rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje que contiene su centro de masa, el cual se mueve en línea recta con velocidad constante. Estas dos últimas manifestaciones quedarán demostradas una vez que estudiemos la Cinética de los cuerpos rígidos. Es decir, las manifestaciones del equilibrio de un cuerpo son cuatro:

1. El reposo. Por ejemplo, los pupitres del aula, el edificio de la Facultad, el ángel de la independencia.
2. El movimiento rectilíneo uniforme. Un ejemplo sería un carro del metro que se moviera en un tramo recto de vía con una velocidad constante de 80 km/h.
3. La rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje fijo que pase por su centro de masa. Por ejemplo, el impulsor de una bomba de agua que gira a 600 rpm, o una polea de una máquina que gire con una velocidad angular constante.
4. La rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje que contenga su centro de masa, el cual se mueva en línea recta con velocidad constante. Pongamos por ejemplo la rueda de un automóvil, que se mueva con rapidez constante en una carretera recta.

Si un cuerpo no se encuentra en alguna de estas cuatro condiciones, no puede estar en equilibrio.

Problemas isostáticos y problemas hiperestáticos

Dijimos arriba que un sistema de fuerzas en equilibrio debe satisfacer las siguientes tres ecuaciones: $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ y $\sum M_oF = 0$. Pero será imposible resolver un problema de Estática en el plano en el que aparezcan cuatro incógnitas.

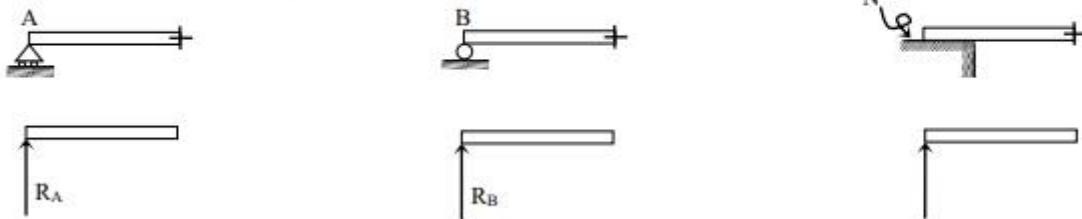
Se llaman problemas isostáticos aquéllos cuyo número de incógnitas es igual o inferior al número de ecuaciones de equilibrio disponibles. Son hiperestáticos los que tienen un número de incógnitas mayor que el de ecuaciones de equilibrio disponibles. La Estática sólo se ocupa de problemas isostáticos.

Apoyos usuales

Aunque las formas como se pueden conectar los cuerpos entre sí son innumerables, existen ciertos tipos de apoyos o conexiones entre un cuerpo y su entorno que resultan de especial interés para nuestro curso. Los agruparemos según el número de incógnitas que presentan.

Apoyos que esconden una sola incógnita

Apoyo libre o simple, superficie lisa

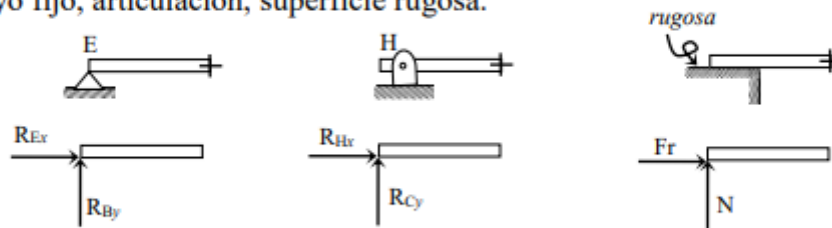


Collarín en varilla lisa. Perno en ranura lisa



Apoyos que esconden dos incógnitas

Apoyo fijo, articulación, superficie rugosa.



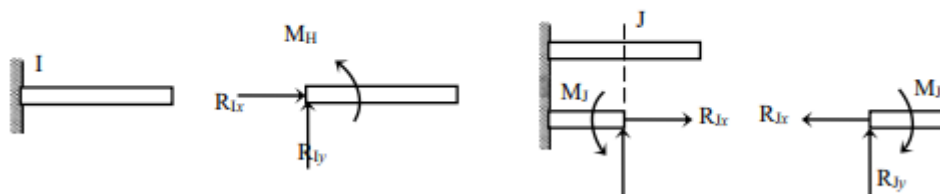
77

La dirección de las reacciones en estos apoyos es desconocida. En vez de trabajar con la magnitud y la dirección como incógnitas, se suele recurrir a la descomposición de las fuerzas desconocidas en sus componentes cartesianas, lo cual facilita generalmente el planteamiento de los problemas.

La reacción de las superficies rugosas se descompone casi siempre en una componente perpendicular (o normal) a la superficie y en otra tangencial o fuerza de fricción. De ahí la letras con que se designa la magnitud de esas componentes en el diagrama. Las superficies lisas son incapaces de ejercer esta fuerza de fricción.

Apoyos que esconden tres incógnitas

Empotramiento y corte de un cuerpo



2.6 Diagramas de Cuerpo Libre

El instrumento más importante con el que debemos contar para la resolución de problemas tanto de Estática como de Cinética (es decir, de aquéllos en los que intervienen fuerzas), es el diagrama de cuerpo libre. Su grande importancia radica en que las leyes de Newton, puesto que se refieren a fuerzas externas, se cumplen en cuerpos o en sistemas de cuerpos separados de los que actúan sobre ellos: si no se conocen con

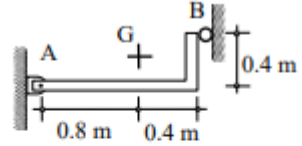
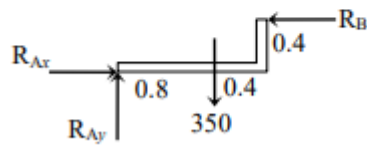
claridad los límites del cuerpo en estudio, es imposible determinar las fuerzas externas que puedan alterar su estado.

El diagrama de cuerpo libre es un dibujo de un cuerpo aislado y de las fuerzas externas que actúan sobre él.

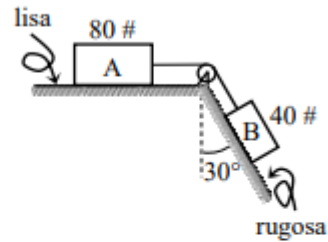
Conviene recordar que las fuerzas externas son aquellas que otros cuerpos ejercen sobre el cuerpo en estudio.

Aunque conforme vayamos resolviendo problemas de equilibrio iremos adquiriendo práctica en la elaboración de los diagramas de cuerpo libre, daremos a continuación algunos ejemplos.

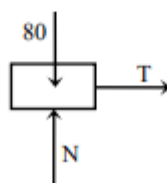
Ejemplo. La barra de la figura pesa 350 kg y su centro de gravedad es el punto G . Está articulada en el extremo A y libremente apoyada en B . Dibuje su diagrama de cuerpo libre.

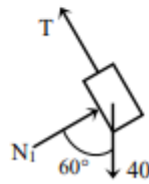
Ejemplo. El cuerpo A de la figura se encuentra sobre una superficie rugosa, mientras que B se halla en una lisa. La cuerda que los une pasa por una polea. Suponga que tanto la cuerda como la polea son ideales; es decir, que la cuerda tiene masa despreciable y es inextensible, y que la polea, además de tener masa despreciable, puede girar sin fricción alrededor del perno. Dibuje los diagramas de cuerpo libre de A , B y la polea.



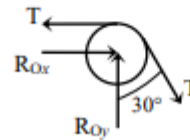
Cuerpo A



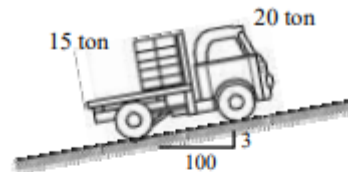
Cuerpo B



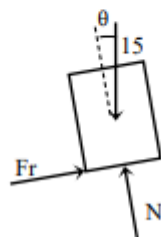
Polea



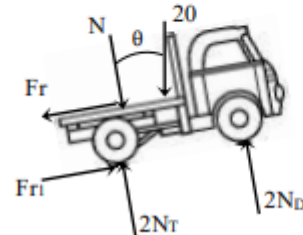
Ejemplo. El camión de la figura pesa 20 ton y la caja que transporta, 15. El camión asciende por una pendiente del 3 %. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la caja y otro del camión.



Caja



Camión



Conviene aclarar que las fuerzas N y FR que el camión ejerce sobre la caja, son las mismas que la caja ejerce sobre el camión, pero en sentido contrario, como lo establece la tercera ley de Newton (de la acción y la reacción).

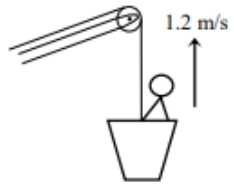
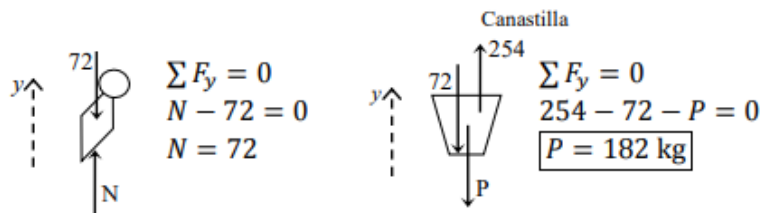
2.7 Ejercicios de comprensión (Equilibrio de Los Sistemas de Fuerzas).

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

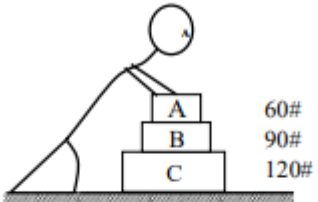
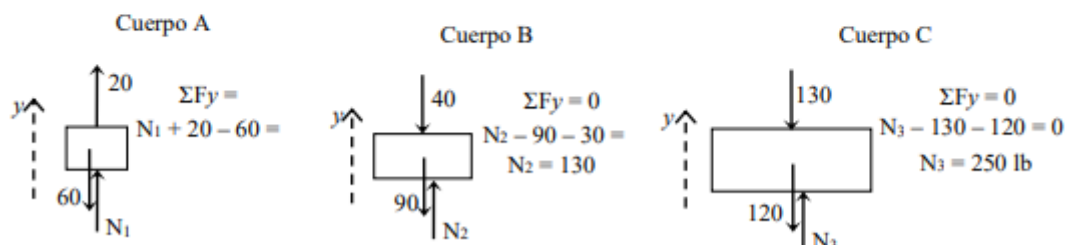
2.8 Equilibrio de los sistemas de fuerzas colineales

Para determinar completamente la resultante de un sistema de fuerzas colineales basta emplear la ecuación $R = \Sigma F$. Si el sistema de fuerzas está en equilibrio, entonces la ecuación que debe cumplirse es $\Sigma F = 0$. Puesto que se dispone de una sola ecuación de equilibrio, en un problema isostático sólo podrá aparecer una incógnita, tal como se aprecia en los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Una grúa levanta a un trabajador de la compañía de luz, metido dentro de una canastilla, con una velocidad constante de 1.2 m/s. Si se sabe que el trabajador pesa 72 kg y que la tensión de la cuerda es de 254 kg, ¿cuál es el peso propio de la canastilla?

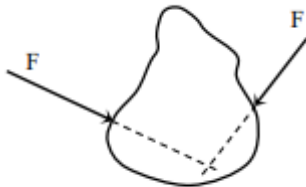



Ejemplo. Tres cajas, A, B y C, de 60, 90 y 120 lb de peso cada una, respectivamente, están apiladas, cuando un muchacho trata de levantar la caja C jalándola hacia arriba con la fuerza de 20 lb. Para esta condición, calcule todas las fuerzas externas que actúan sobre cada uno de los

Teorema del cuerpo sujeto a dos fuerzas

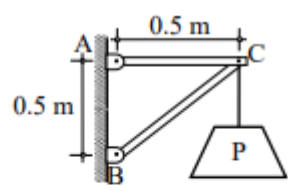
Pensemos en un cuerpo sujeto a dos fuerzas de la misma magnitud, pero de direcciones arbitrarias, como se muestra en la figura. Es evidente que el sistema de fuerzas no está en equilibrio, puesto que colocada una a continuación de la otra, se requiere de una fuerza más que vaya del origen de la primera a la punta de la segunda. Partiendo de este hecho, puede concluirse el siguiente teorema:

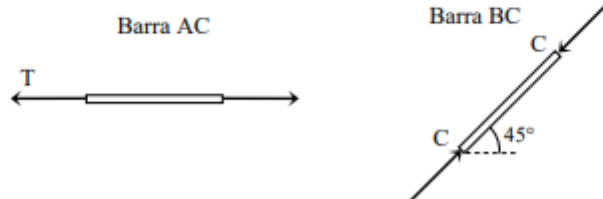


Si un cuerpo en equilibrio está sujeto solamente a dos fuerzas, tales fuerzas son de la misma magnitud, colineales y de sentido contrario.

Este teorema se aplica en muchísimos casos, pero son de especial interés los de las cuerdas y los de barras de peso despreciable que están articuladas sus dos extremos.

Ejemplo. La ménsula de la figura soporta un gran peso P , de modo que los pesos propios de las barras son despreciables. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada una de ellas.





Tensión y compresión

La barra AB de la ménsula del problema anterior se podría sustituir por una cuerda, un cable o una cadena y se conseguiría el mismo resultado de soportar la carga P . En cambio, no se puede sustituir así la otra barra. La razón es que la barra AB está ejerciendo una tensión, mientras que la BC está sujeta a compresión.

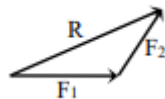
Se llama tensión (o tracción) a la fuerza que trata de alargar la longitud de un cuerpo; compresión, a la que trata de acortarla. (También se llaman tensión y compresión los esfuerzos que soportan esos cuerpos por la acción de las respectivas fuerzas.

Equilibrio de los sistemas de fuerzas concurrentes

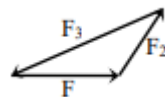
El estudio de las resultantes de los sistemas de fuerzas concurrentes lo dividimos en dos partes: primero estudiamos el caso de sistemas de sólo dos fuerzas, luego de más de dos. Ahora dividiremos el tema del equilibrio también en dos: la primera parte se referirá a cuerpos sujetos a tres fuerzas, las segunda, a más de tres fuerzas.

Equilibrio de cuerpos sujetos a tres fuerzas concurrentes

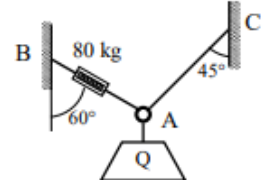
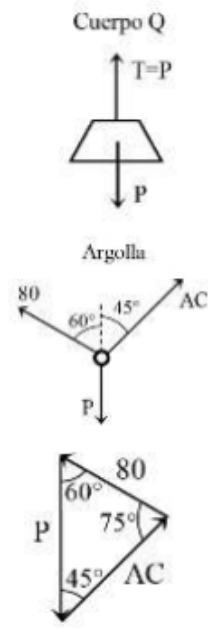
Para determinar la resultante de dos fuerzas concurrentes hemos empleado la ley del triángulo: colocábamos una fuerza a continuación de otra y la resultante unía el origen de la primera con la punta de la segunda. Para que el sistema original de dos fuerzas quede en equilibrio, bastará añadirle una fuerza igual a la resultante, pero de sentido contrario. En el triángulo, basta colocar a continuación de la segunda fuerza una tercera que llegue al origen de la primera. Así tendremos un triángulo “cerrado”.



Utilizando las leyes de senos y cosenos, los problemas de equilibrio de cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver con suma facilidad, como en los ejemplos siguientes.



Ejemplo. Sabiendo que el dinamómetro de la figura marca 80 kg, determine el peso del cuerpo Q y la tensión de la cuerda AC .

Ley de senos

$$\frac{80}{\text{sen } 45} = \frac{P}{\text{sen } 75} = \frac{AC}{\text{sen } 60}$$

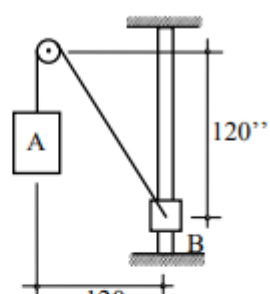
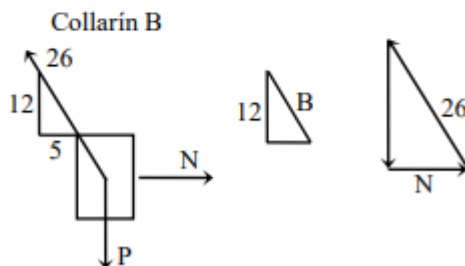
$$P = \frac{80}{\text{sen } 45} \text{sen } 75$$

$$AC = \frac{80}{\text{sen } 45} \text{sen } 60$$

$$P = 109.3 \text{ kg}$$

$$AC = 98 \text{ kg}^{(3)}$$

Ejemplo. Los cuerpos mostrados están en reposo. El cilindro A pesa 26 lb. Calcule el peso del collarín b; sabiendo que la barra vertical es lisa.

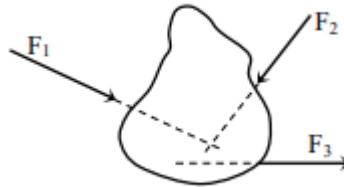



$$\frac{P}{12} = \frac{26}{13}$$

$$P = 24 \text{ lb}$$

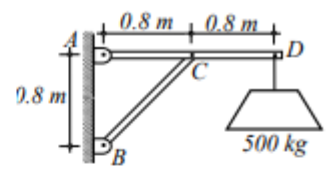
Teorema del cuerpo sujeto a tres fuerzas Imaginemos un cuerpo sujeto a tres fuerzas, dos de las cuales concurren en un punto, como se muestra en la figura. La tercera fuerza,

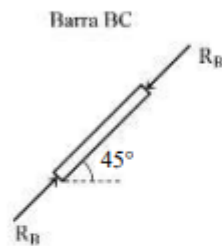
cuya línea de acción no pasa por dicho punto, produce cierto momento con respecto a él, lo cual impide que el cuerpo pueda estar en equilibrio. Con esta reducción al absurdo hemos demostrado el siguiente teorema:



Si un cuerpo en equilibrio está sujeto solamente a la acción de tres fuerzas, y dos de ellas son concurrentes, la tercera también es concurrente.

Ejemplo. Las barras de la figura tienen peso despreciable y están unidas mediante articulaciones. Determine la magnitud y la dirección de las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

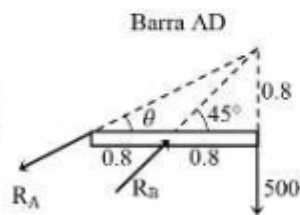




$$\tan \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 26.6^\circ$$

$$\frac{500}{\sin 18.4} = \frac{R_A}{\sin 45} = \frac{R_B}{\sin 116.6}$$

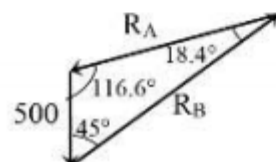


$$R_A = \frac{500}{\sin 18.4} \sin 45$$

$$R_B = \frac{500}{\sin 18.4} \sin 116.6$$

$$R_A = 1120 \text{ kg } \nearrow 26.6^\circ \text{ (4)}$$

$$R_B = 1416 \text{ kg } \nearrow 45^\circ$$



Equilibrio de cuerpos sujetos a más de tres fuerzas concurrentes

En la determinación de las resultantes de más de dos fuerzas concurrentes, recurrimos a la descomposición de cada fuerza en sus componentes cartesianas para obtener las componentes cartesianas de la resultante buscada, y luego componíamos estas últimas. Las ecuaciones que nos sirvieron fueron

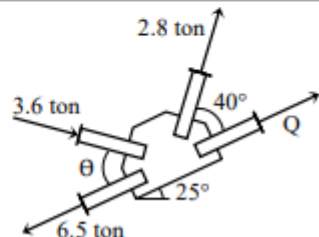
$$R_x = \sum F_x \text{ y } R_y = \sum F_y$$

por tanto, las ecuaciones que deberán satisfacerse son

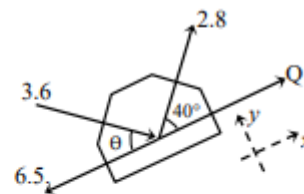
$$\sum F_x = 0 \text{ y } \sum F_y = 0$$

Es decir, la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas del sistema en dos direcciones perpendiculares debe ser igual a cero.

Ejemplo. La placa-uni6n de la figura, de peso despreciable, est1 en equilibrio por la acci6n de los cuatro perfiles soldados sobre ella. Diga qu6 fuerza Q debe ejercer el cuarto perfil, y cu1l es el valor del 1ngulo θ .



$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ 2.8 \sin 40 - 3.6 \sin \theta &= 0 \\ \sin \theta &= \frac{2.8 \sin 40}{3.6} \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ Q + 2.8 \cos 40 + 3.6 \cos 30 - 6.5 &= 0 \\ Q &= 6.5 - 2.8 \cos 40 - 3.6 \cos 30 \\ Q &= 1.237 \text{ ton} \end{aligned}$$

Equilibrio de los sistemas de fuerzas paralelas

Tuvimos necesidad de emplear dos ecuaciones para determinar la resultante de los sistemas de fuerzas paralela:

$$R = \sum F \text{ y } M_O R = \sum M_O F, \text{ o bien } M_A R = \sum M_A F \text{ y } M_B R = \sum M_B F$$

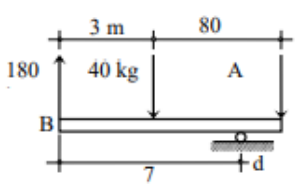
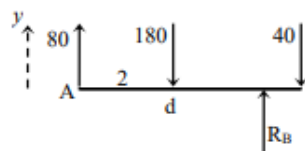
Lo cual implica que, si el sistema de fuerzas se halla en equilibrio, debe cumplir con las dos siguientes ecuaciones:

$$\sum F = 0 \text{ y } \sum M_O F = 0, \text{ o bien } \sum M_A F = 0 \text{ y } \sum M_B F = 0$$

Que quiere decir que la suma algebraica de las fuerzas del sistema es nula, y que la suma de los momentos de todas las fuerzas, con respecto a cualquier punto, es también igual a cero. Pero se pueden emplear las dos últimas ecuaciones, que significan que los momentos de las fuerzas con respecto a dos puntos suman cero, siempre y cuando esos dos puntos no estén contenidos en una línea paralela a las líneas de acción de las fuerzas del sistema.

La ventaja de elegir dos ecuaciones de momentos para la resolución de los problemas es que los resultados que se obtienen son independientes uno del otro.

Ejemplo. La viga de la figura está sujeta a la acción de las tres fuerzas mostradas. Sabiendo que su peso es despreciable, determine la magnitud de la reacción del apoyo B y la distancia d a la que se encuentra del extremo A .

$$\sum F = 0$$

$$R_B + 80 - 180 - 40 = 0$$

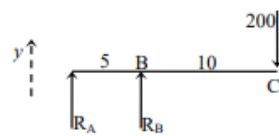
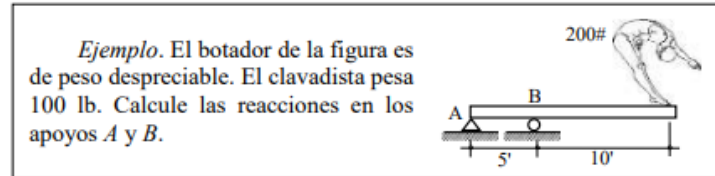
$$\boxed{R_B = 140 \text{ kg } \uparrow}$$

$$\sum M_A F = 0$$

$$140 d - 180(2) - 40(5) = 0$$

$$d = \frac{360 + 200}{140}$$

$$\boxed{d = 4 \text{ m}}$$



$$\sum M_B F = 0$$

$$-5 R_A - 200(10) = 0$$

$$R_A = -400$$

El signo negativo indica que el sentido de la reacción es contrario al del dibujo.

$$\boxed{R_A = 400 \text{ lb } \downarrow}$$

$$\sum M_A F = 0$$

$$5 R_B - 200(15) = 0$$

$$\boxed{R_B = 600 \text{ lb } \uparrow}$$

Como empleamos dos ecuaciones de momentos, el segundo resultado no depende del primero.

Podemos comprobar de la siguiente manera:

$$\sum Fy = 0$$

$$-400 + 600 - 200 = 0$$

$$600 = 600$$

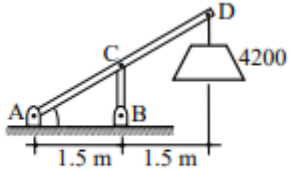
Como se aprecia en el problema anterior, aunque el apoyo A sea una articulación, la reacción no tiene componente horizontal, pues no actúa sobre el botador o trampolín ninguna otra fuerza que la compense para mantener el equilibrio. Podemos generalizar esta observación, estableciendo el siguiente corolario del teorema del cuerpo sujeto a tres fuerzas.

Corolario (del teorema del cuerpo sujeto a tres fuerzas)

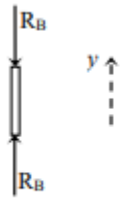
Si un cuerpo en equilibrio está sujeto solamente a la acción de tres fuerzas, y dos de ellas son paralelas, la tercera también es paralela.

Otra manera de visualizar este corolario es que si la tercera fuerza no fuera paralela a las otras dos, concurriría con ambas, y estaríamos en el caso de las tres fuerzas concurrentes.

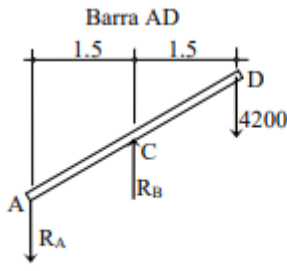
Ejemplo. La ménsula de la figura está formada por dos barras de peso despreciable, unidas por articulaciones. Determine las reacciones de los apoyos *A* y *B*.



Barra BC



Barra AD



$$\sum M_B F = 0$$

$$1.5 R_A - 4200 (1.5) = 0$$

$$R_A = 4200 \text{ N } \downarrow$$

$$\sum M_A F = 0$$

$$1.5 R_B - 4200 (3) = 0$$

$$R_B = 8400 \text{ N } \uparrow$$

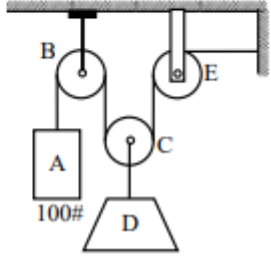
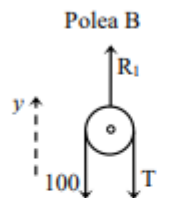
Comprobación:

$$\sum F_y = 0$$

$$-4200 + 8400 = 4200$$

$$4200 = 4200$$

Ejemplo. Los cuerpos de la figura están en reposo y *A* pesa 100 lb. Sabiendo que las cuerdas y las poleas son ideales (de peso despreciable, inextensible aquella, sin fricción en los pernos éstas), calcule el peso del cuerpo *B* y la reacción del perno sobre la polea *E*.

$$\sum M_O F = 0$$

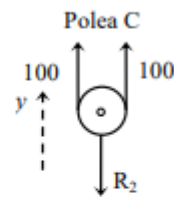
$$100 r - T r = 0$$

$$T = 100$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_1 - 200 = 0$$

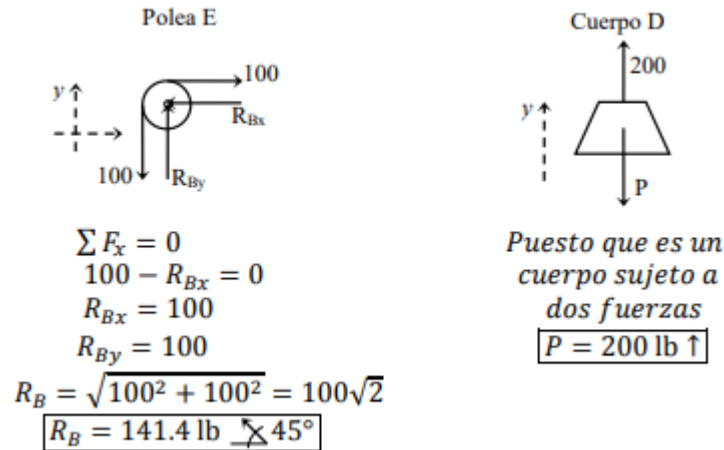
$$R_1 = 200 \text{ lb } \uparrow$$



$$\sum F_y = 0$$

$$100 + 100 - R_2 = 0$$

$$R_2 = 200 \text{ lb } \downarrow$$



2.9 Equilibrio de los sistemas de fuerzas no concurrentes ni paralelas.

Estudiaremos a continuación el caso más general de los sistemas de fuerzas cuyas líneas de acción estén contenidas en el mismo plano; los anteriores son casos particulares.

La completa determinación de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes ni paralelas se logra mediante las tres siguientes ecuaciones:

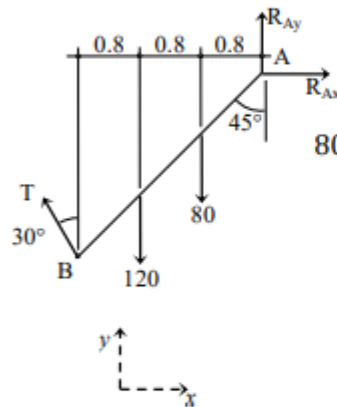
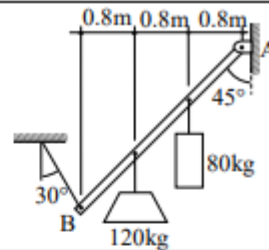
$$R_x = \sum F_x, R_y = \sum F_y \text{ y } M_oR = \sum M_oF$$

De modo que si un sistema de fuerzas está en equilibrio debe satisfacer las siguientes tres ecuaciones:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \text{ y } \sum M_oF = 0$$

Así como en el caso del equilibrio de las fuerzas paralelas, la ecuación de la suma algebraica de las fuerzas se puede sustituir por una de momentos, también para la resolución de problemas de equilibrio de sistemas de fuerzas no concurrentes ni paralelas las ecuaciones de proyecciones se pueden cambiar por ecuaciones de momentos; si se eligen dos ecuaciones de momentos, los puntos respecto a los cuales se midan no deben estar contenidos en una línea paralela al eje de las proyecciones cuya ecuación se ha de utilizar; si se opta por tres ecuaciones de momentos, los centros no deben estar alineados. Todo esto porque no resultarían ecuaciones independientes y el problema simplemente no se podría resolver.

Ejemplo. La barra de la figura es de peso despreciable. Calcule a tensión de la cuerda y la magnitud y dirección de la reacción en la articulación *A*.



$$\sum M_A F = 0$$

$$80(0.8) + 120(1.6) - \frac{T}{2}(2.4) - \frac{T\sqrt{3}}{2}(2.4) = 0$$

$$1.2T(1 + \sqrt{3}) = 64 + 192$$

$$\boxed{T = 78.1 \text{ kg}}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-78.1\left(\frac{1}{2}\right) + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 39.04$$

$$\sum F_y = 0$$

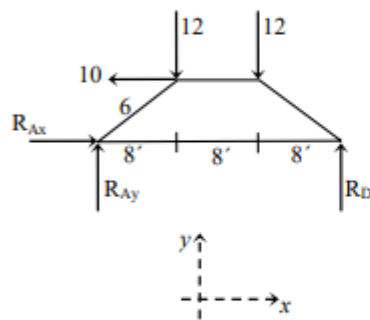
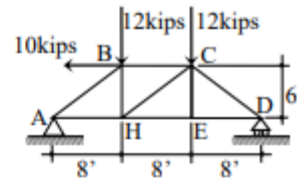
$$78.1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 120 - 80 + R_{Ay} = 0$$

$$R_{Ay} = 132.4$$

$$R_A = \sqrt{39.04^2 + 132.4^2}; \tan \theta = \frac{132.4}{39.04}$$

$$\boxed{R_A = 138 \text{ kg } \angle 73.6^\circ}$$

Ejemplo. La figura representa una armadura plana articulada; es decir, los ejes de las barras, cuyos pesos se consideran despreciables, están contenidos en el mismo plano y todas las uniones son articulaciones. Determine las reacciones en los apoyos.



$$\sum M_A F = 0$$

$$24R_D - 12(16) - 12(8) + 10(6) = 0$$

$$R_D = \frac{192 + 96 - 60}{24} = \frac{228}{24}$$

$$\boxed{R_D = 9.5 \text{ kips } \uparrow}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ax} - 10 = 0$$

$$R_{Ax} = 10$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - 12 - 12 + 9.5 = 0$$

$$R_{Ay} = 14.5$$

$$R_A = \sqrt{10^2 + 14.5^2}$$

$$\tan \theta = \frac{14.5}{10}$$

$$\boxed{R_A = 17.61 \text{ kips } \angle 55.4^\circ}$$

2.10 Ejercicios de comprensión (Equilibrio de Los Sistemas de Fuerzas)

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

UNIDAD III

CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA.

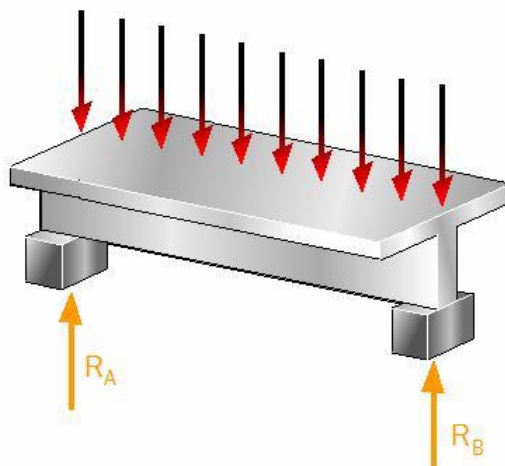
Este capítulo comprende diversas propiedades geométricas de secciones (para casos prácticos, secciones de vigas) siendo la más importante el momento de inercia. Entre otras propiedades estudiadas están los conceptos de centroide, radio de giro y el teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

3.1 Centroides de áreas simples y compuestas.

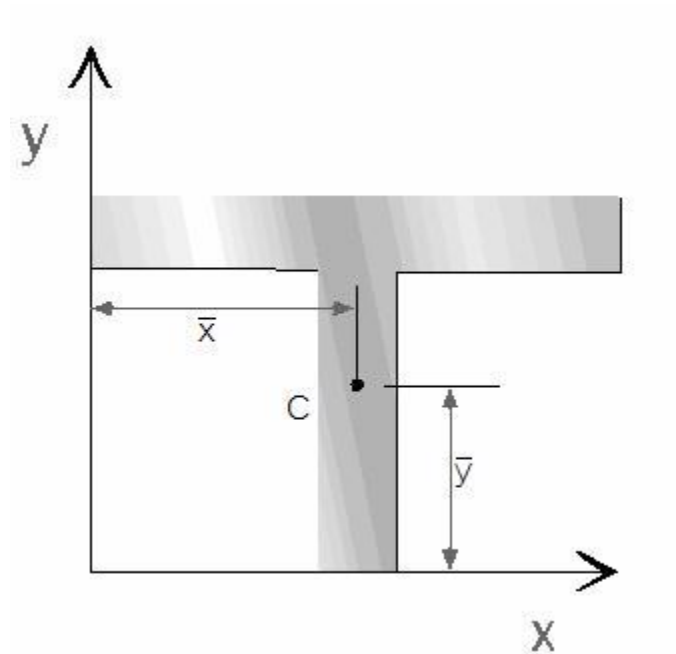
Antes de poder empezar a definir el concepto de momento de inercia es necesario entender completamente lo que es un centroide y cómo se obtiene. El centroide de un área se refiere al punto que define el centro geométrico del área.

El enfoque dado al estudio del centroide es ejemplificar cómo se obtiene el centroide de una sección compuesta por diferentes áreas geométricas. Puesto que el concepto básico no necesita gran atención por su simplicidad, se empieza por resolver un ejemplo de una sección compuesta.

Para fines prácticos, el paquete estudia una sección transversal que se obtiene de una viga cargada mediante una animación (Figura 3.1 y 3.2). Esto para captar la atención del usuario y vea alguna de las aplicaciones inmediatas del concepto.

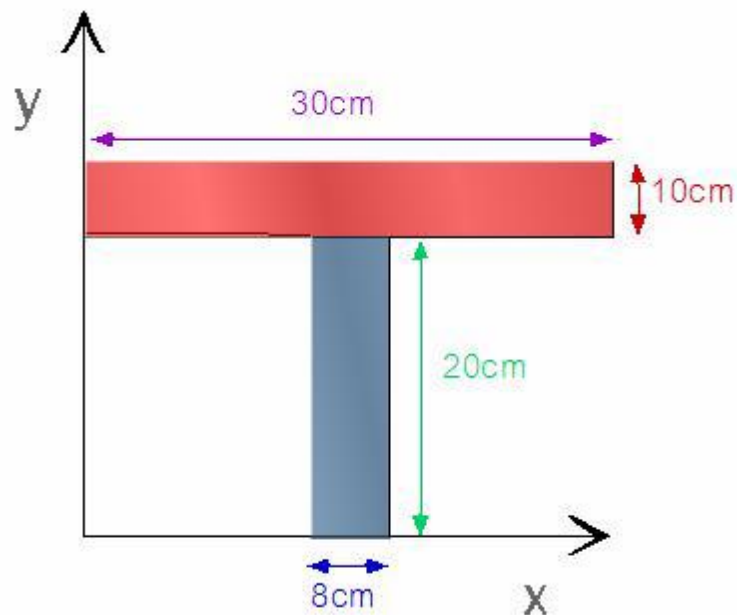


Viga



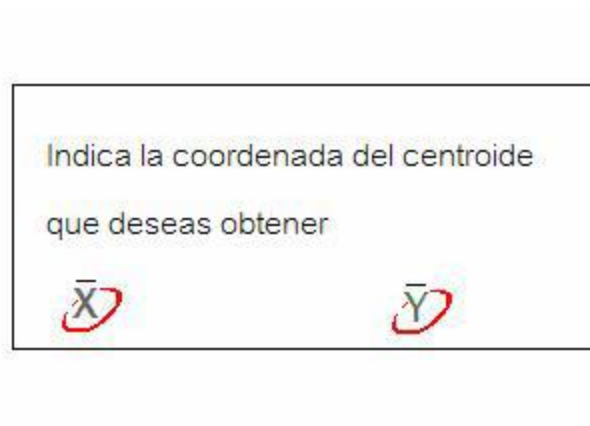
Sección transversal de viga

Obtenida la sección, se divide en áreas sencillas, manejando diferentes colores para cada una y así poder distinguirlas fácilmente. A continuación, se presentan las dimensiones de cada área, cada dato de un color diferente, lo cual será de ayuda posteriormente (Figura 3.3).



División de la sección

Se le da la opción al usuario de elegir qué respecto a que eje desea obtener el centroide. Una vez que este selecciona una opción aparece el eje de referencia necesario. También se presentan la distancia de los centroides de cada área individual hacia el eje (Figura 3.4).



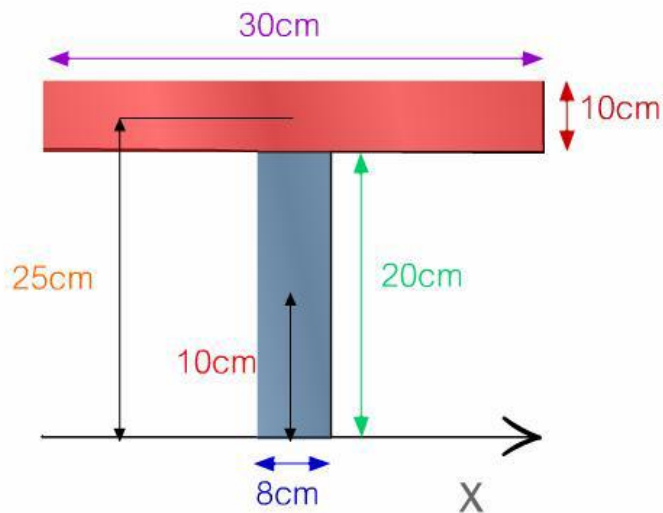
Punto de decisión

Aparece la demostración de la fórmula de centroide de áreas compuestas:

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}$$

Los momentos estáticos del área total del eje x/y deberán ser igual a la sumatoria de momentos estáticos de las áreas parciales respecto al mismo eje. Seguido de esto se visualiza la expresión necesaria para obtener el centroide deseado.

Al aplicar la expresión del centroide en el paquete se observa cómo los datos son arrastrados desde la figura de la sección transversal hasta la fórmula. Con ayuda de los colores el usuario puede ubicar de dónde proviene cada dato y así comprenderá más rápido cómo debe usarse la expresión (Figura 3.5).



$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{(25)(30)(10) + (10)(8)(20)}{(30)(10) + (8)(20)}$$

$$\bar{y} = 20\text{cm}$$

Obtención la coordenada y del centroide

Terminada la obtención de un centroide, el usuario vuelve a encontrar la opción para decidir si desea ver el ejemplo del centroide respecto al otro eje o seguir a otro tema.

3.2 Ejercicios de comprensión (Centroides de áreas simples y compuestas).

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

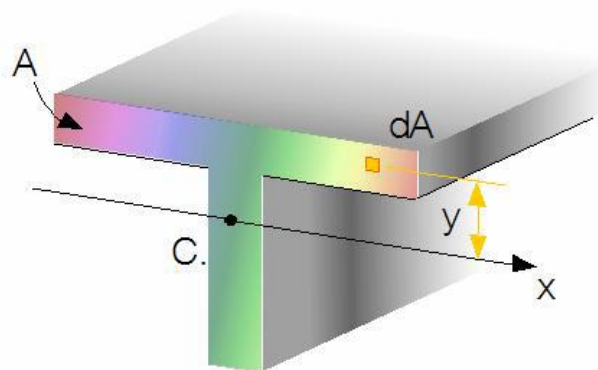
3.3 Momento de Inercia de áreas simples.

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

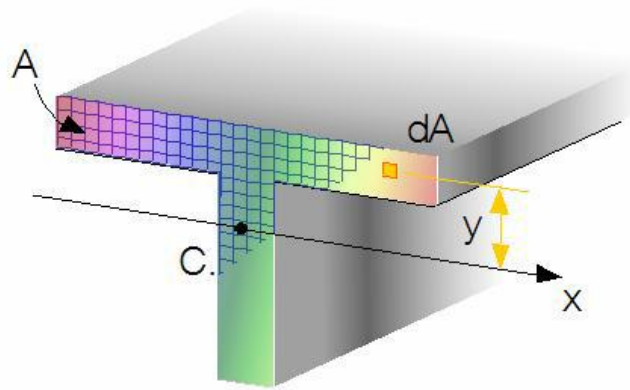
La integral representa el momento de inercia respecto al eje x. Popov dice: “La integral depende sólo de las propiedades geométricas del área transversal. En mecánica esta cantidad lleva el nombre de momento de inercia (o momento de segundo orden) del área de la sección respecto al eje centroidal, cuando y se mide desde tal eje. Es una constante definida para la forma del área en particular y se designa por I” (1982).

El paquete trata de la manera más práctica posible el concepto de momento de inercia, puesto que es una propiedad geométrica y sin ninguna representación física

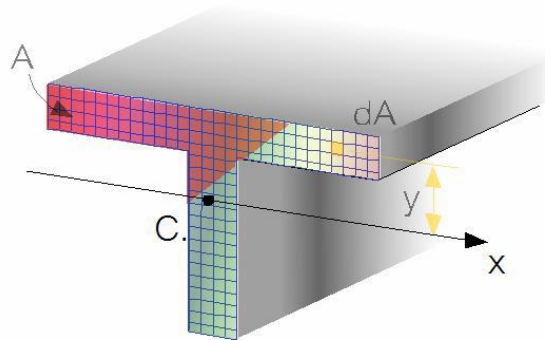
Para iniciar se toma la sección transversal de una viga y en ella se definen dA y y (Figura 3.6). Posteriormente, al momento de realizar la integral, el área de la viga se va fraccionando, lo que representa los diferentes dA que forman parte de la integral (Figura 3.7), para cada uno de estos, dA implica una “y” nueva. Como ayuda visual al realizar la integral, las expresiones de I_x e I_y se van “llenando” de tinta roja, expresando que hasta que se tomen en cuenta todos los dA el I_x estará completo. Al mismo tiempo, la sección de la viga se va tornando roja (Figura 3.8).



Variables que participan en la integral $I_x = \int_A y^2 dA$



Se presentan todos los dA que se pueden encontrar en el área.



Al momento de integrar

Como es sabido, estas integrales ya han sido resueltas para las figuras con geometría básica: rectángulo, círculo, triángulo. Estas expresiones quedan expresadas en función de variables que representan las dimensiones del elemento. En la vida real la aplicación de estas fórmulas resulta ser la manera más práctica de obtener los momentos de inercia.

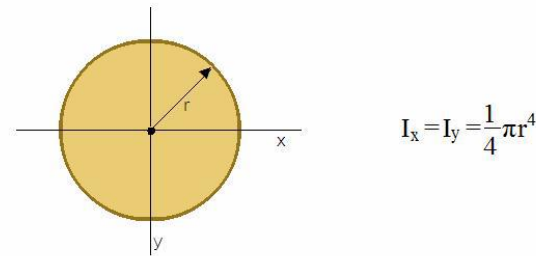
Por lo tanto, estas fórmulas se le presentan al usuario en un pequeño menú sencillo donde tendrá que escoger entre la figura que desee saber su fórmula (Figura 3.9), una vez seleccionada, aparece la fórmula (Figura 3.10) y puede regresar al pequeño menú para elegir otra figura o continuar a otro tema

Para simplificar los cálculos se hace uso de fórmulas preestablecidas en la obtención del Momento de Inercia para formas geométricas comunes.

Selecciona la figura de la cual deseas ver su fórmula.



Menú de momento de inercia de figuras básicas



Momento de inercia para un círculo

Centroides de Cuerpos Compuestos

Un cuerpo compuesto consiste en una serie de cuerpos "más simples" conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etc. Un cuerpo de esta índole a menudo puede ser seccionado o dividido en sus partes componentes y, si se conocen el peso y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad del cuerpo entero.

Método para hallar el centroide de un objeto geométrico compuesto A. Se divide el objeto o cuerpo en un número finito de partes componentes que tengan formas más sencillas. Si una parte componente tiene un agujero, o una región geométrica donde no exista material, ésta se toma como una componente adicional pero con signo negativo. B. Se determina las coordenadas x, y, z del centroide de cada parte. C. Se calcula las coordenadas del centroide del objeto o cuerpo, utilizando las siguientes ecuaciones:

$$My = (A_1 + A_2 + A_3 + \dots \dots \dots An)X$$

O sea $My = AX = \sum_{i=1}^n AiXi$

O sea $X = \frac{My}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n AiXi$

Análogamente

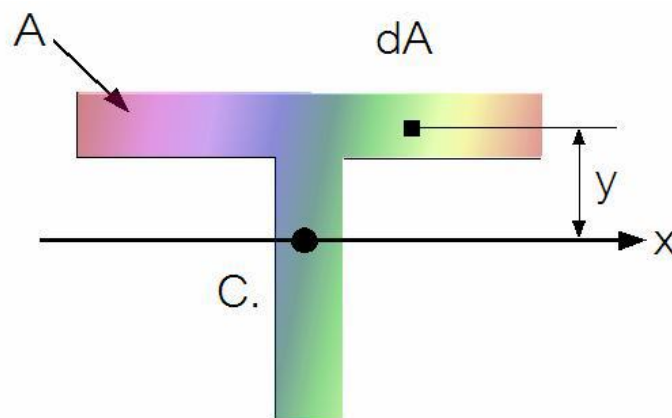
$$Mx = Ay = \sum_{i=1}^n AiYi$$

$$Y = \frac{Mx}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n AiYi$$

En el paquete se empieza la explicación con una viga sometida a cargas y la definición anterior de radio de giro. Se prosigue realizando una ampliación a la sección transversal. Se definen el

(la integral $I_x = \int_A y^2 dA$)

Área y el Momento de Inercia y en ese instante ya se cuenta con los elementos participantes en la expresión de Radio de Giro (Figura 3.11).



$$I_x = \int y^2 dA$$

Sección a la que se le encontrará el radio de giro

El propósito del paquete didáctico es representar visualmente lo que la expresión significa.

Según la ecuación, el radio de giro representa la distancia en que se concentra toda el

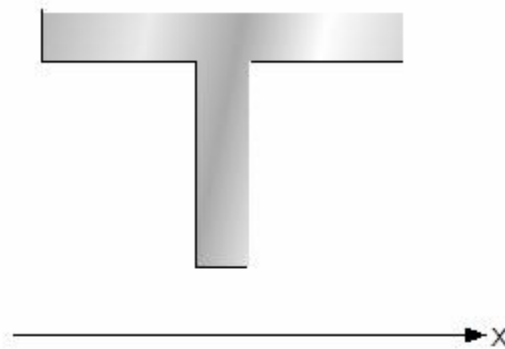
$$I_x = r_x^2 A$$

área para que se cumpla la expresión

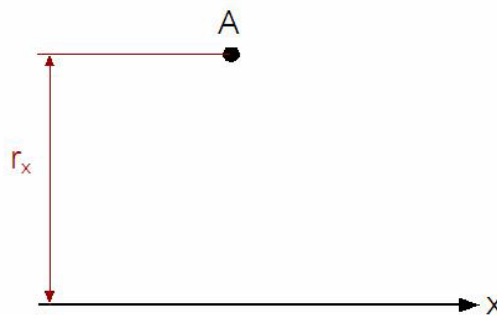
Entonces se presenta una animación que parte de la sección transversal con su centroide y el área es transportada hacia una nueva ubicación (Figura 3.12); en este momento es cuando el área se transforma en un pequeño círculo, representando la concentración del

área en un punto. Enseguida se muestra la cota de r_x que es la distancia necesaria para que se cumpla la expresión

$$I_x = r_x^2 A \text{ (Figura 3.13).}$$



El área cambiará de ubicación a una distancia r



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = r_x^2 A$$

El área es concentrada en un punto a una distancia r del eje

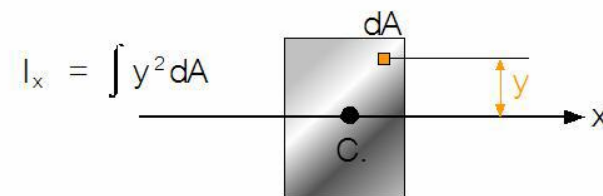
3.4 Ejercicios de comprensión (Momento de Inercia de áreas simples).

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

3.5 Teorema de los Ejes de Paralelos o de Steiner

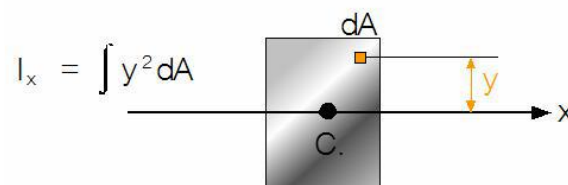
Como se sabe, si se conoce el momento de inercia de un área respecto al eje de inercia centroidal, su momento de inercia puede determinarse respecto a un eje paralelo usando el teorema de los ejes paralelos o de Steiner.

La primera escena se enfoca en la demostración del teorema de Steiner y cómo se utiliza el concepto de los ejes paralelos. Para ello se presenta una sección con su área, su eje centroidal, y al lado la fórmula de I_x (Figura 3.14).



Momento de inercia respecto al eje centroidal

A continuación se le explica al usuario que se obtendrá ese mismo momento de inercia pero ahora desde otro eje paralelo al original (el centroidal) (Figura 3.15). Una vez presentado el nuevo eje, aparecen las cotas desde éste hasta los puntos necesarios de la fórmula de I_x (distancia desde el eje al centroide y desde el centroide del área hasta dA) (Figura 3.16).

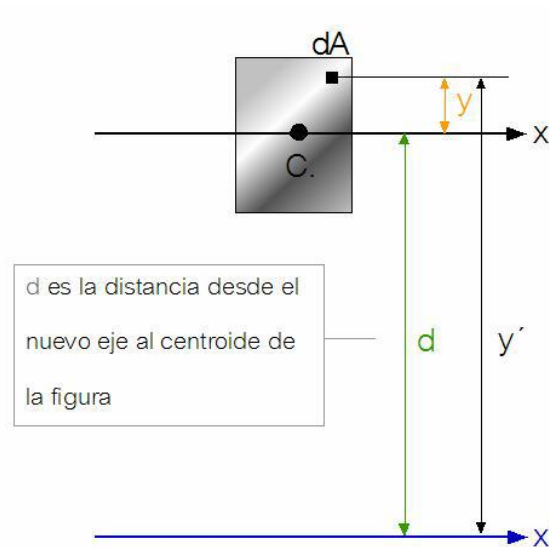


Ahora el momento de inercia se obtendrá en referencia al nuevo eje paralelo x'



Nuevo eje sobre el cual se obtendrá el momento de inercia

Figura 3.16



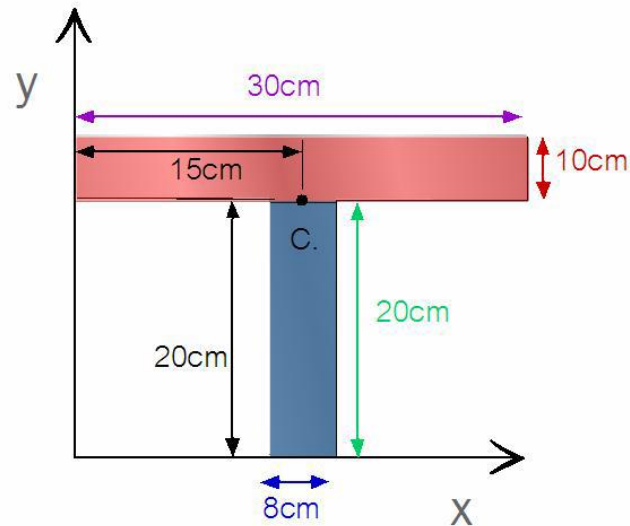
Elementos necesarios para el teorema de Steiner

Partiendo de la integral original de momento de inercia, se guía al usuario paso a paso en la sustitución de los nuevos valores hasta llegar a la nueva expresión del “Teorema de ejes paralelos”.

$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

Terminando la explicación de la determinación de la fórmula, el usuario puede continuar a un ejemplo de áreas compuestas para que se comprenda la aplicación de la expresión.

La sección empleada en el ejemplo es la misma utilizada para el concepto de centroide, ya que el usuario está familiarizado con esta sección y conoce su centroide (Figura 3.17). De igual manera que en el ejemplo anterior, se le da al usuario la opción de elegir el Momento de Inercia respecto al eje que él decida (Figura 3.18). Puesto que la sección es una viga T simétrica respecto al eje y , los cálculos de I_x son mucho más extensos que los de I_y .



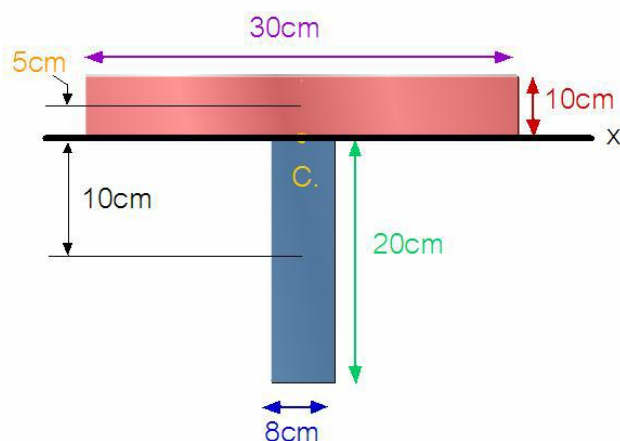
Sección transversal con la ubicación de sus centroide

Indica el Momento de Inercia que deseas obtener:

x
y

Punto de decisión

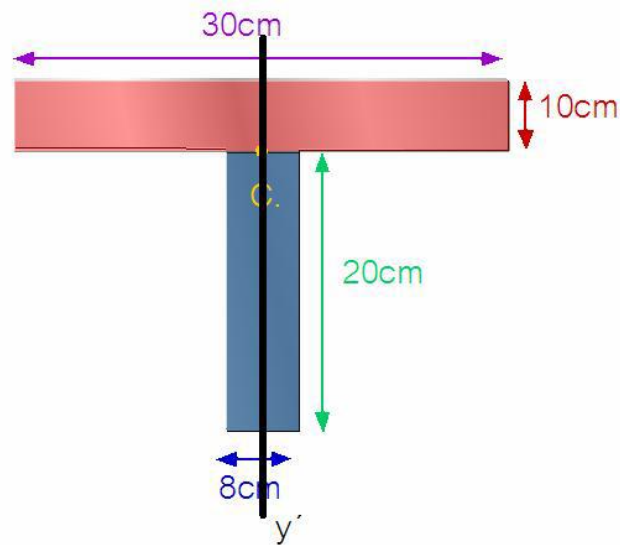
Al elegir “momento de inercia en x”, se traza un nuevo eje x en el centroide de la sección total, así como las distancias de éste hasta el centroide de las figuras individuales (Figura 3.19).



Distancias desde el eje centroidal x hasta el centroide de cada área

Aparece la fórmula del teorema de Steiner y se calculan los I_x de cada área individual con ayuda de la expresión de $bh^3/12$, ya que las secciones son rectangulares. Con una animación se llevan los datos desde la figura hasta la fórmula, para que el usuario pueda entender de dónde surge cada valor.

Para el I_y es más sencillo pues el eje centroidal de toda la figura coincide con todos los centroides de las figuras individuales (Figura 3.20). Entonces se explica que se debe cancelar el término de Ad^2 de la expresión, quedando la sumatoria de los momentos de inercia de las secciones individuales (Figura 3.21).



Eje centroidal en y

$$I_y = I_{y1} + Ad^2 + I_{y2} + Ad^2$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

Reducción de la fórmula de ejes paralelos para I_y para el ejemplo

3.6 Figuras y cuerpos compuestos (aplicación digital).

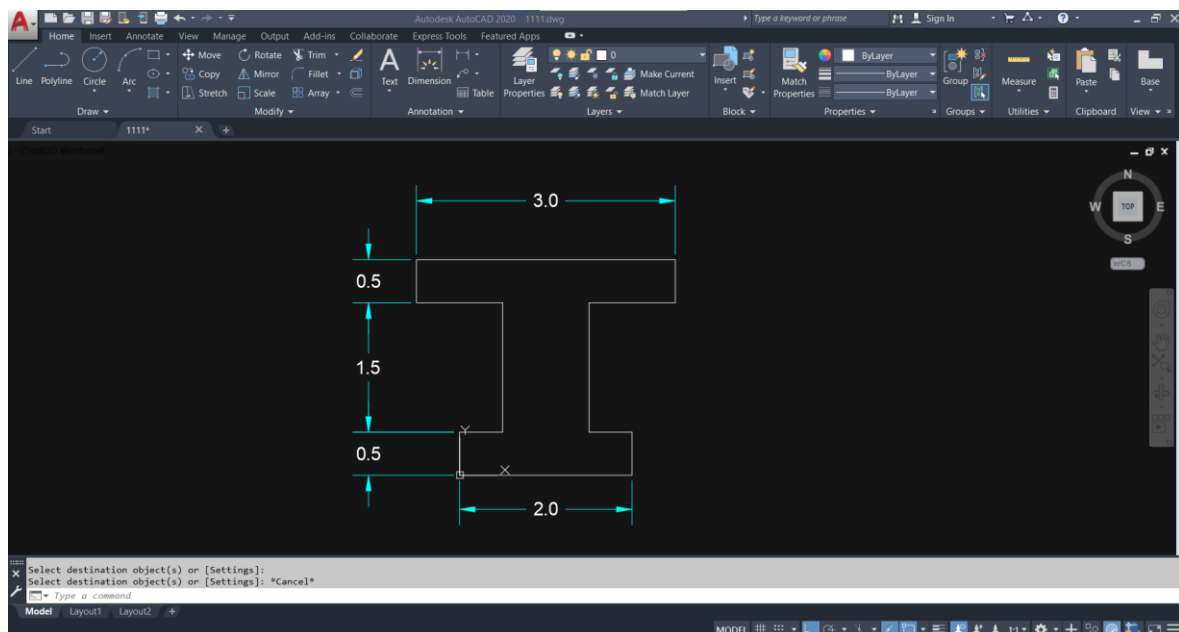
- 1.- Dibujar el polígono deseado con el comando línea **(LI)**.
- 2.- Unir las líneas para hacer una misma polilínea, con el comando **(JOIN)** Seleccionar líneas y enter.
- 3.- Crea una región con el comando **(REG)** y seleccionar todo el polígono.
- 4.- Mover el polígono a las coordenadas $X= 0$ $Y= 0$ y $Z= 0$ desde el punto de inicio del polígono.

Con el comando mover **(M)** y digitalizando el siguiente texto con la ubicación de las coordenadas #0,0,0 / Enter.

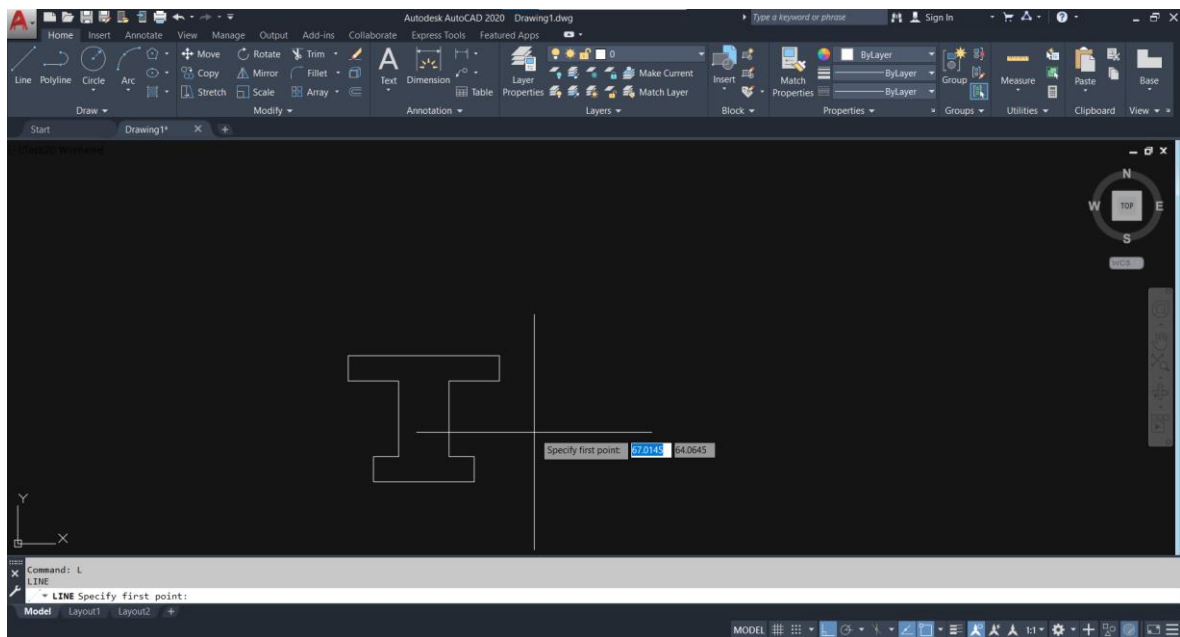
- 5.- Digitalizar el comando **(MASSPROP)** Seleccionar el polígono y enter.

El la ventana abierta estarán los datos de perímetro, área y centroides en los ejes X y Y.

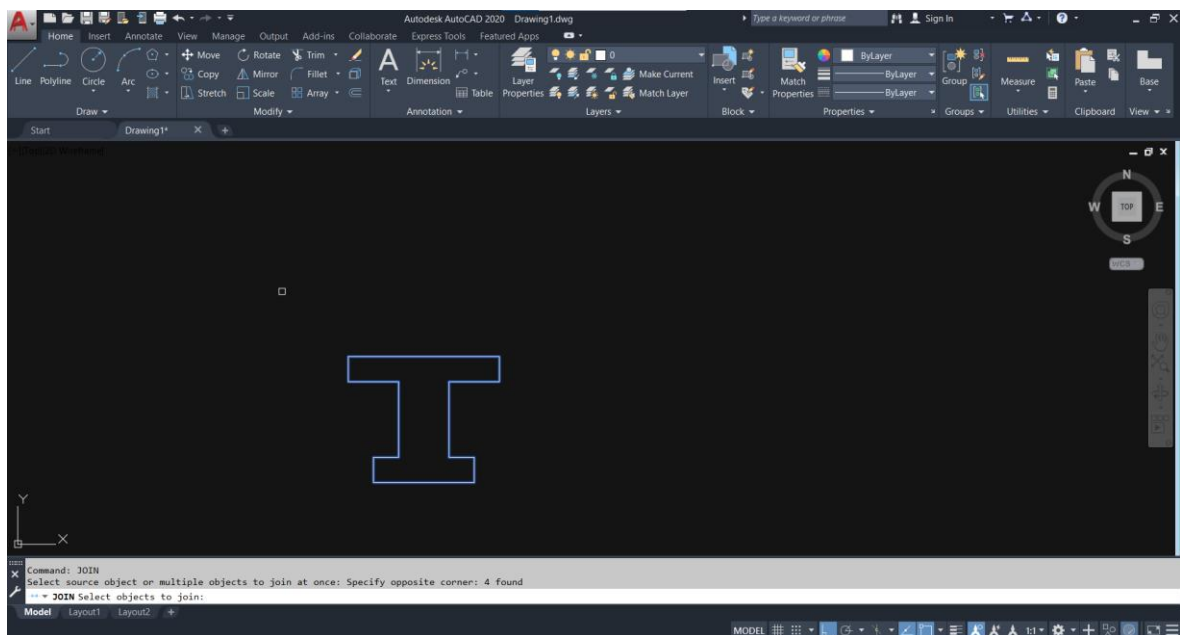
3.7 Ejercicios de comprensión (aplicación digital).



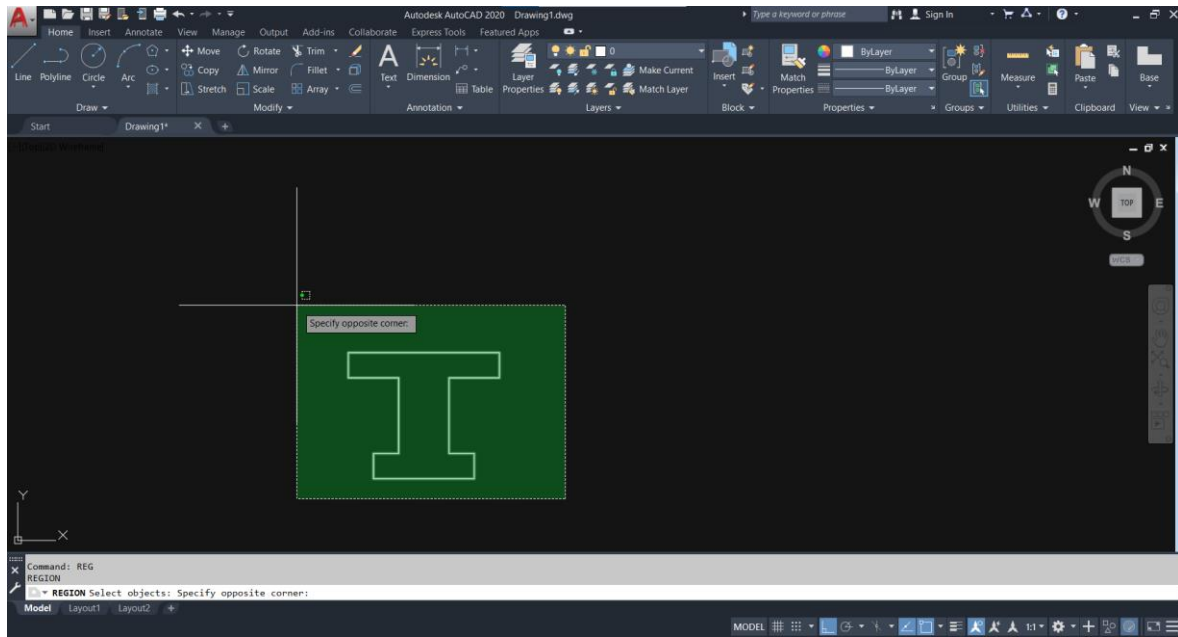
1.-



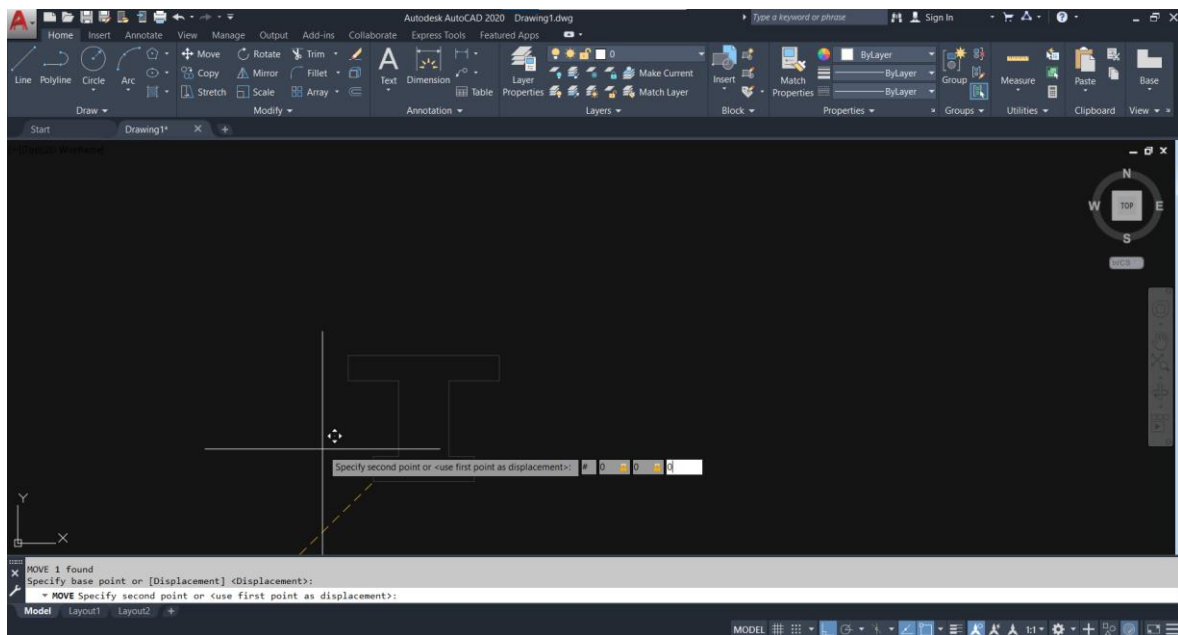
2.-



3.-



4.-



Ventana MASSPROP

```
AutoCAD Text Window - Drawing1.dwg
Edit

Command: MASSPROP

Select objects: 1 found

Select objects:
----- REGIONS -----

Area:                4.0000
Perimeter:           13.0000
Bounding box:        X: -0.5000 -- 2.5000
                    Y: 0.0000 -- 2.5000
Centroid:            X: 1.0000
                    Y: 1.3750
Moments of inertia:  X: 10.3333
                    Y: 5.5833
Product of inertia:  XY: -5.5000
Radii of gyration:   X: 1.6073
                    Y: 1.1815
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 2.7708 along [1.0000 0.0000]
                    J: 1.5833 along [0.0000 1.0000]

Write analysis to a file? [Yes/No] <N>:
```

UNIDAD IV

ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

4.1 Esfuerzo y deformación.

Cuerpos bajo la acción de una carga

$$\left\{ \begin{array}{l} - \textit{Esfuerzo} \\ - \textit{Deformación} \end{array} \right.$$

Esfuerzo. Es la intensidad de las fuerzas internas que actúan sobre un plano dado y es la respuesta que ofrece el material a las cargas aplicadas.

Deformación. Es todo cambio en sus dimensiones que sufre un cuerpo bajo efectos externos.

Deformación

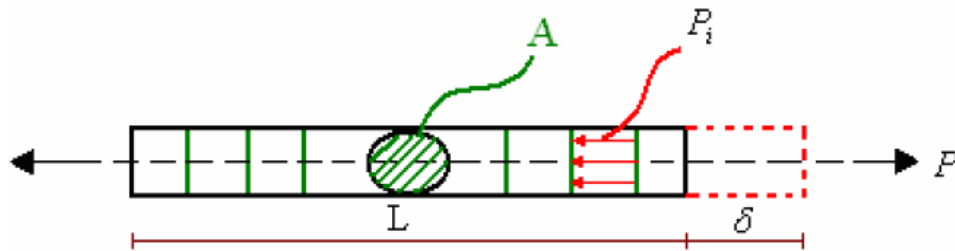
$$\left\{ \begin{array}{ll} - \textit{Elastica} & \text{Se deforma pero puede regresar a su condición inicial} \\ - \textit{Plastica} & \text{Se deforma permanentemente} \end{array} \right.$$

Esfuerzos Normales

Carga Axial. Es aquella que actúa a través del eje del cuerpo y puede actuar a:

- Tensión.
- Compresión.

Esta carga produce un esfuerzo normal (σ) y una deformación(δ). Considere la figura.



Barra sometida a la acción de una fuerza axial.

$$\sigma = \frac{\sum P_i}{A} = \frac{P}{A} \quad \dots (2.1)$$

DONDE:

$$\sigma = \text{Esfuerzo normal} \left[\frac{N}{m^2} \circ \frac{lb}{pulg^2} \circ \frac{kg}{cm^2} \right]$$

P = Carga aplicada

A = Area de la sección transversal

Para la deformación total:

$$\varepsilon = \frac{L_F - L_i}{L_i} = \frac{\delta}{L_i} \dots (2.2)$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \dots (2.3)$$

Donde:

E = Modulo de elasticidad
o de young

ε = Deformacion unitaria

L_F = Longitud final de la barra

Sustituyendo la ec. (2.2) en (2.3) se obtiene.

$$E = \frac{\sigma \cdot L}{\delta}$$

Despejando a δ se obtiene:

$$\delta = \frac{\sigma \cdot L}{E} = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$E_{ac} = 30 \times 10^6 \frac{lb}{pu \cdot lg^2}$$

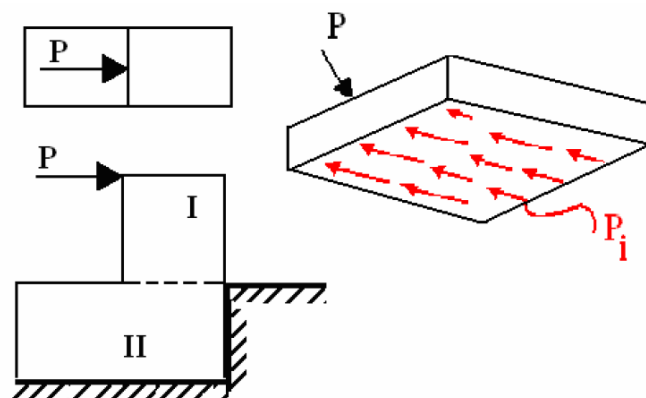
$$E_{al} = 10 \times 10^6 \frac{lb}{pu \cdot lg^2}$$

Para que estas ecuaciones sean aplicables, deben cumplirse las condiciones siguientes:

1. La línea de acción de la carga aplicada o de la resultante de las cargas debe pasar por el centroide del área analizada.
2. La carga aplicada y el área analizada deben ser perpendiculares entre sí.

4.2 Esfuerzos de Corte o Cortantes

Este tipo de esfuerzos se producen en un cuerpo cuando las cargas aplicadas tienden a cortar o deslizar una parte del mismo con respecto a otra, se presentan en elementos sometidos a corte directo como: cuñas, pernos, remaches, etc., en vigas y elementos sometidos a torsión (flechas y resortes. Considérese la figura.



Cuerpo formado por dos bloques, sometido a una fuerza De la figura se tiene:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum P_i}{A} = \frac{P}{A} \quad \dots\dots (2.5)$$

DONDE:

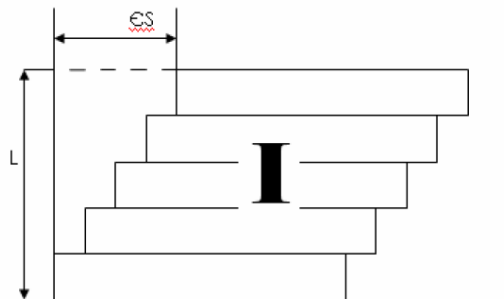
$\bar{\sigma}$ = Es el esfuerzo al corte.

P = Carga aplicada.

A = Área expuesta al corte

Deformación por Corte

Aislando al bloque I y considerando que esta formado por delgadas laminillas se tiene lo mostrado en la figura.



Bloque I aislado y formado por delgadas laminillas.

$$\gamma = \frac{\Delta s}{L} \quad \dots\dots (2.6)$$

Donde:

γ : deformación unitaria al corte

Por analogía se obtiene:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad \dots\dots (2.7)$$

Donde:

G : es el modulo de elasticidad al corte

Existiendo la relación siguiente:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \dots (2.8)$$

Donde :

μ es el módulo o relación de Poisson

Nota:

$$E \neq G$$

Dos placas se unen por medio de 2 remaches de 10mm de diámetro como se muestra en la figura 2.4. Calcule el esfuerzo cortante que se produce en los remaches cuando se aplica una carga de 2500kg

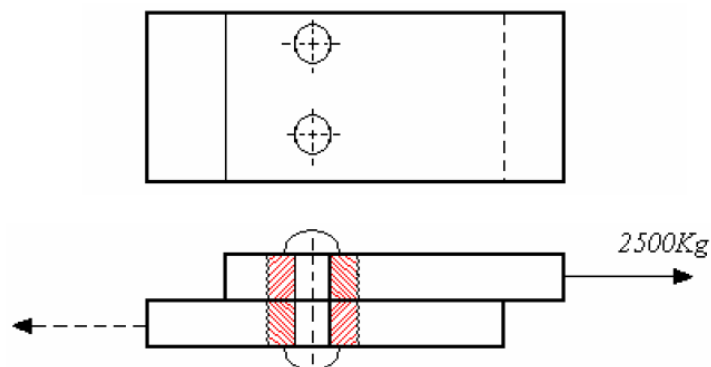


Figura 2.4.

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{n \cdot A_r}$$

$$A_r = \frac{\pi(d_r)^2}{4}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{P(4)}{n \cdot \pi \cdot (d_r)^2} = \frac{4 \times 2500}{2(\pi)(1)^2} = \underline{1591.5 \frac{Kg}{cm^2}}$$

4.3 Relación esfuerzo-deformación, módulo de Poisson.

MODULO DE YOUNG (E). Es una medida de la rigidez del material

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$E =$ *Modulo de elasticidad de Yung*
 $\varepsilon =$ *Elasticidad unitaria*
 $\sigma =$ *Esfuerzo normal convencional*

Ductilidad. Es la capacidad que tiene un material de deformarse plásticamente antes de romperse

Porcentaje de elongación

$$\% \varepsilon = \frac{l_f - l_i}{l_i} \times 100\% > 8\% \quad \text{El material es ductil}$$

Porcentaje de Reducción de Área

$$\% R \text{ de } A = \frac{A_i - A_f}{A_i} \times 100\%$$

Se ha observado que para muchos de los materiales de uso corriente en ingeniería, la resistencia a la fluencia al corte se relaciona con la resistencia a la fluencia normal mediante la expresión siguiente:

$$\tau_F = 0.6\sigma_F$$

Donde:

$\sigma_F =$ *Resistencia a la fluencia o cedencia normal*

$\tau_F =$ *Resistencia a la fluencia de corte*

Modulo o Relación de Poisson

Se define como el valor absoluto de la relación que existe entre la deformación transversal y la deformación longitudinal en un elemento sometido a tensión o compresión pura. Considérese el elemento prismático que se muestra en la figura.

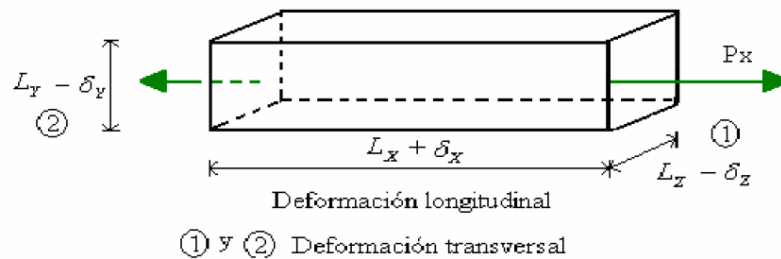


Figura 2.8. Elemento prismático sometido a una fuerza axial de tensión.

Se obtienen las deformaciones unitarias sobre cada uno de los ejes

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{-\delta_y}{L_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{-\delta_z}{L_z}$$

Y en base a la definición antes dada se tiene que:

$$\mu = \left| \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right| \dots\dots\dots (2.9)$$

Donde:

μ =Modulo o relación de Poisson

En la práctica el valor μ esta entre: $0.3 < \mu < 0.4$

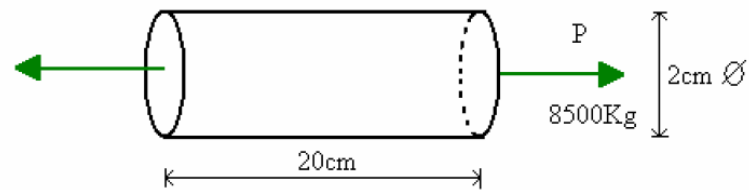
Cuando se desconoce el valor del material se toma como: $\mu = \frac{1}{3}$

Se deben remarcar 2 puntos

- μ es una relación entre deformaciones unitarias.
- La deformación trasversal siempre será de sentido opuesto a la deformación longitudinal.

En una prueba de tensión una varilla de acero de 2cm de diámetro se somete a una fuerza de 8500kg si se sabe que $\mu = 0.33$ calcule a) el alargamiento de la varilla en una longitud inicial de 20 cm.

b) El diámetro final de la varilla



Acero

$$\mu = 0.33$$

$$\delta_x = ?$$

$$\delta_y = ?$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_x}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{A \cdot E} = \frac{P(4)}{\pi \times d^2 (E)} = \frac{8500 \text{Kg} \cdot (4)}{\pi \times (2 \text{cm})^2 (2.1 \times 10^6)} = 1.3 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$$

$$a) \quad \epsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x} \quad \delta_x = \epsilon_x \cdot L_x = (1.3 \times 10^{-3})(20) = \underline{0.026 \text{cm}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{L_y} \quad \delta_y = -4.2 \times 10^{-4} (2 \text{cm}) = \underline{-8.5 \times 10^{-4}}$$

$$b) \quad \mu = \left| \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| \quad \text{despejando } \epsilon_y$$

$$\epsilon_y = (\mu)(-\epsilon_x) = (0.33)(-1.3 \times 10^{-3}) = \underline{4.29 \times 10^{-4}}$$

$$d_f = d_0 + \delta_y = 2 - 8.5 \times 10^{-4} = \underline{1.9991 \text{cm}}$$

4.4 Esfuerzo cortante.

Fuerza Cortante y Momento Flexionante.

Ya se dijo que en cualquier sección transversal de una viga sometida a carga actúa de manera simultánea una fuerza cortante y un momento flexionante. Para entender mejor su naturaleza

Considérese una viga prismática bajo la acción de una carga P como se muestra en la figura 4.1, a continuación, córtese dicha viga mediante un plano transversal A-A' localizado a una distancia X con respecto a la reacción de la izquierda y por último trácese el diagrama de cuerpo libre de dicha sección.

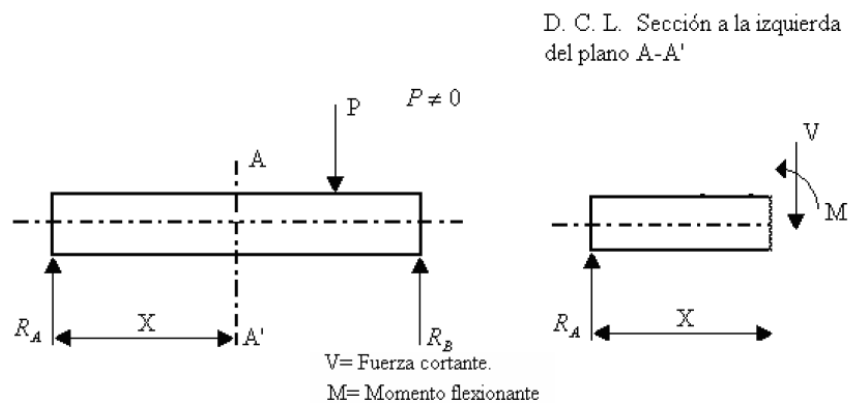


Figura 4.1. Conceptos de la fuerza cortante y momento flexionante

De la figura se puede establecer que:

$$V = \sum (F_{izq}) \dots\dots(4.1)$$

Y:

$$M = \sum (M_{izq}) = \sum (F_{izq} \cdot X) \dots\dots(4.2)$$

Y se puede establecer la siguiente convención de signos:

Para la fuerza cortante: Si las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección lo hacen hacia arriba se consideran como positivas y negativas si lo hacen hacia abajo.

- Para el momento flexionante:

Se considera como positivo si actúa en sentido horario $+$ y
negativo si lo hace en sentido antihorario $-$

También se puede establecer de acuerdo a la forma en que se deforma la viga, tal y como se muestra en la figura 4.2

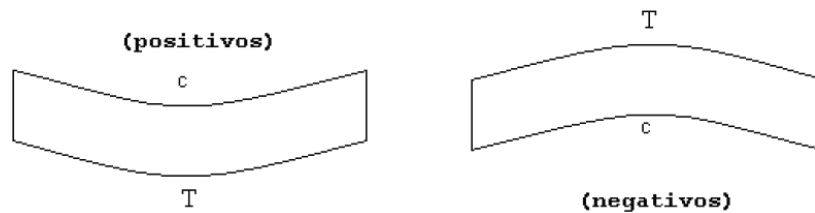


Figura 4.2. Convención de signos para el momento flexionante

4.5 Diagramas de Momentos flexionantes y Fuerzas cortantes

El análisis de una viga muestra adicionalmente el inconveniente siguiente: que la fuerza cortante y el momento flexionante varían de una sección a otra a lo largo de la viga dependiendo de las condiciones de carga de la misma, por lo tanto de hace necesario determinar dicho comportamiento y la mejor forma de hacerlo es mediante el trazo de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, existiendo 2 métodos para hacerlo, a saber:

- Por el método de ecuaciones.
- Por el método de suma de áreas.

Con la ayuda de estos diagramas es posible determinar la magnitud y sentido tanto de la fuerza cortante como del momento flexionante en cualquier posición de la viga, esto es muy importante ya que a partir de ellos se pueden calcular los esfuerzos máximos que se producen en la viga.

Método de ecuaciones

Este método consiste en lo siguiente:

1. Se calculan las reacciones de la viga.
2. Se divide la viga en tantas secciones como cambios en las condiciones de carga existan.
3. Se hallan las ecuaciones que definen la fuerza cortante y el momento flexionante para cada sección.
4. Se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Método de suma de áreas

El momento flexionante se puede definir como:

$$M = \int_{x_0}^{x_1} V \cdot dx \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

Donde.

x_0 y x_1 son los límites de integración

Puesto que el producto $V \cdot dx$ representa el área del diagrama de fuerza cortante y, por tanto, la integral representa el área de este diagrama comprendida entre las ordenadas de los puntos x_0 y x_1 . La ecuación (4.4) indica que la variación del momento flexionante entre dos secciones cualesquiera es igual al área del diagrama de fuerza cortante en ese mismo intervalo

$$M_1 - M_0 = \Delta M = (\text{área})_{\text{de cortante}} \quad \dots\dots (4.4)$$

4.6 Ejercicios de comprensión (Diagramas de Momentos flexionantes y Fuerzas cortantes).

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

4.7 Fuerza Cortante y Momento flexionante en Vigas

Las diversas fuerzas aplicadas a una viga llegan a producir fuerza cortante y momento flexionante internos.

En la primera escena se muestra una viga; subsiguientemente se aplican fuerzas a ella (Figura 4.1) y, debido a estas cargas, la viga sufre una deformación. Para explicarle al usuario lo que ocurre internamente en la viga es necesario realizar un corte en una sección C (Figura 4.2).

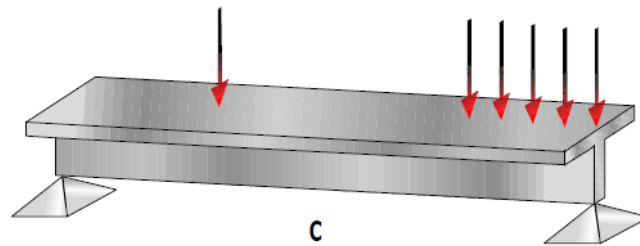


Figura 4.1 Viga sometida a cargas

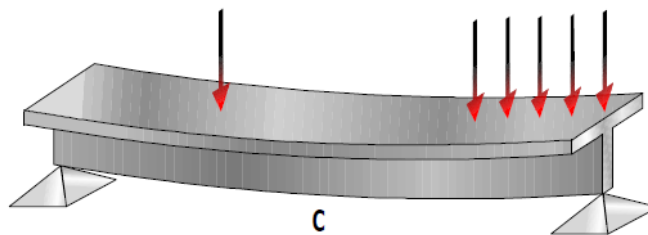


Figura 4.2 Flexión de la viga debido a cargas

Antes de pasar al corte se le indica al usuario que es necesario realizar el diagrama de cuerpo libre y encontrar las reacciones.

Hecho esto, la viga se divide en dos partes para estudiar lo que ocurre en el corte (Figura 4.3). Se realiza un cambio de perspectiva para favorecer la visión de las acciones internas (Figura 4.4 a) que equilibran al cuerpo con las fuerzas externas aplicadas y, entonces, visualmente acciones las fuerzas V y M . Posteriormente se dibujan los esfuerzos que causa la flexión en la viga (Figura 4.4 b) y cuya obtención se estudiará en el capítulo siguiente.

Figura 4.3 Corte en la viga

Figura 4.4 (a) Surgen las fuerzas que equilibran al elemento

Figura 4.4

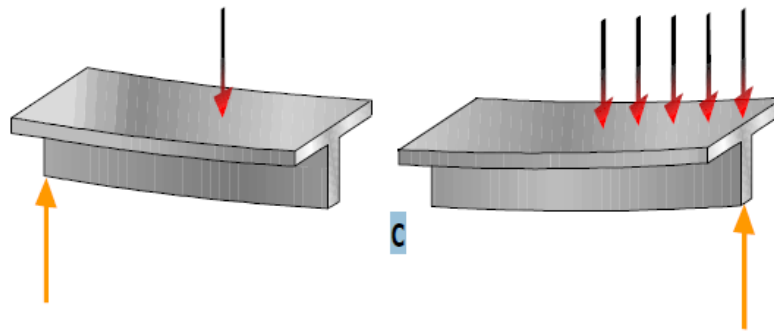


Figura 4.3 Corte en la viga

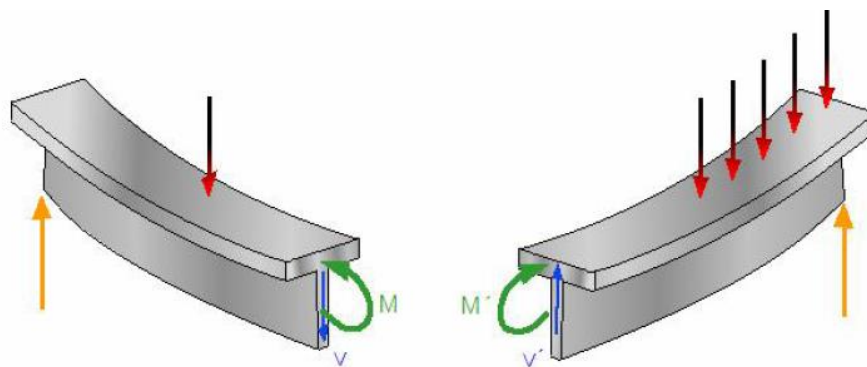


Figura 4.4 (a) Surgen las fuerzas que equilibran al elemento

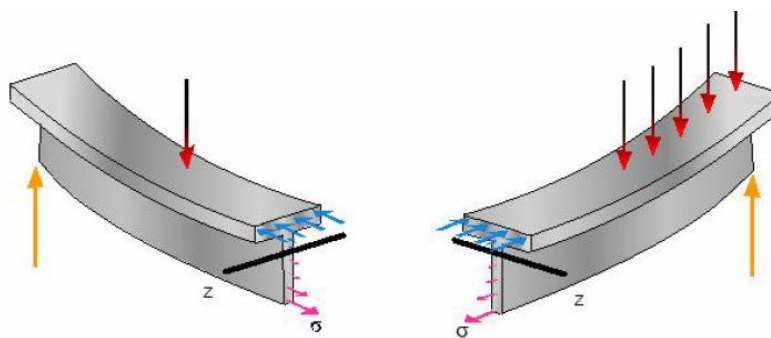


Figura 4.4 (b) Esfuerzos producidos por momento flexionante

También se le proporciona información al usuario de la utilidad y necesidad de saber dónde se ubican los momentos flexionantes y cortantes máximos. Esto último se explica en escenas más adelante en la secuela de cálculo .

CONVENCIÓN DE SIGNOS

Para analizar vigas sometidas a cargas se ha adoptado una convención de signos para que los cortantes y momentos estudiados tengan significado. En el paquete didáctico se dan los ejemplos y circunstancias en los que un momento se considera positivo o negativo. Se empieza con una escena donde se observan dos vigas sin carga alguna (Figura 4.5).

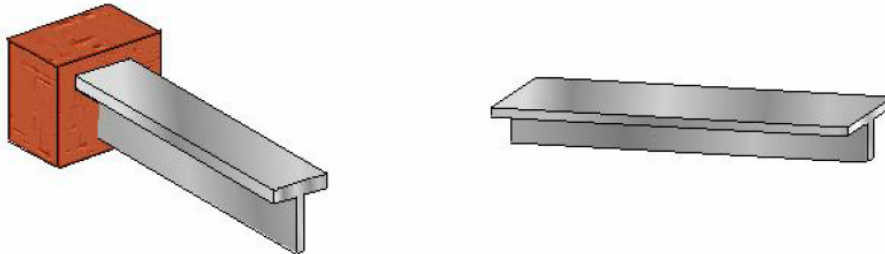


Figura 4.5 Vigas libre de cargas

Posteriormente a cada una se le aplican acciones externas diferentes, una fuerza vertical a la primera viga y a la segunda momentos. Con esto se observa una deformación “cóncava” de las vigas como se muestra en las figura 4.6.

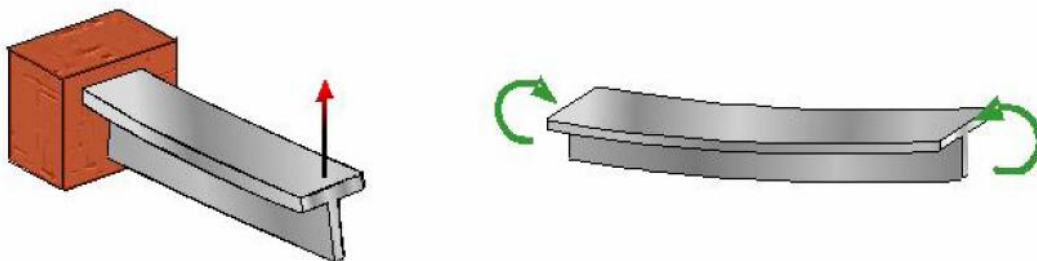


Figura 4.6 Flexión positiva

Siguiendo, se cambia el sentido de las acciones externas y la deformación de las vigas se es ahora “convexa” (Figura 4.7). Cada deformación va acompañada de su texto indicando si el momento es positivo o negativo.

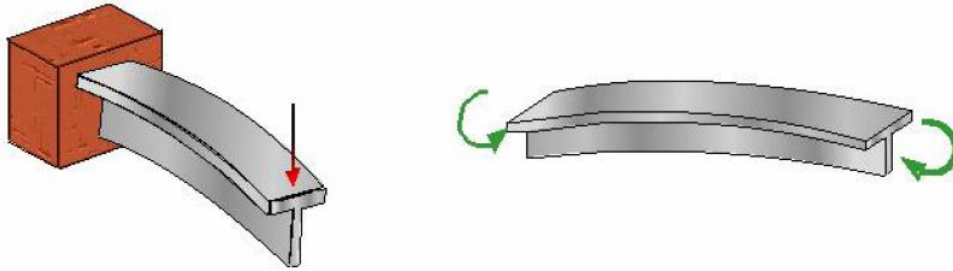
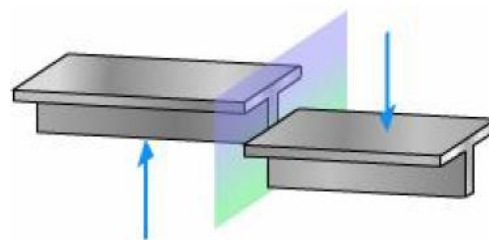


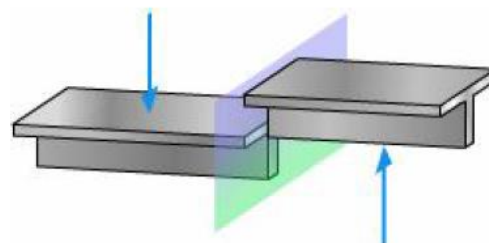
Figura 4.7 Flexión negativa

Al pasar a la siguiente escena se presenta la convención de signos usada para la fuerza cortante. Aquí se presenta la animación de una viga libre de cargas y se le hace un corte por la mitad.

Se le aplican cargas a la viga, de ambos lados del corte, y la viga se corta. Dependiendo del sentido de las cargas aplicadas, la viga se corta de dos diferentes maneras. Al usuario se le indica qué cargas logran el corte positivo y de igual forma cuáles el corte negativo (Figura 4.8).



Positivo



Negativo

Convención de signos para cortante

Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante

Para la secuela de cálculo, el paquete reúne tres casos de vigas, de diferentes claros, diferente ubicación de apoyos, y con diferentes tipos de cargas aplicadas a ellas (puntuales, distribuidas, triangulares). Con esto se trata de abarcar los escenarios más comunes en que una viga está sometida a fuerzas.

En cada ejemplo se guía al usuario con la metodología usual para determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE INGENIERÍA

La mayor parte de propiedades mecánicas de un material se obtienen a partir de la prueba de tensión o tracción, para ello, una probeta de dimensiones normalizadas como la que se muestra en la figura 2.6 se somete a la acción de una carga axial P , la cual se incrementa poco a poco hasta que la probeta se rompe.

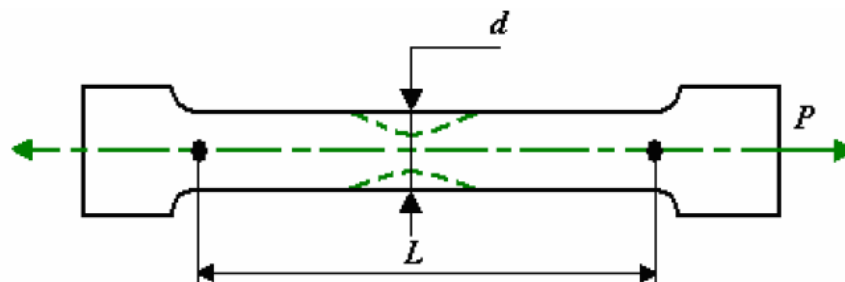


Figura 2.6. Probeta sometida a una carga axial P

Para cada valor de P se produce un esfuerzo y una deformación de acuerdo a las ecuaciones siguientes:

$$\sigma = \frac{P_i}{A} \quad \cdot \quad \varepsilon = \frac{l_i - l}{l}$$

Con los valores de esfuerzo y deformación obtenidos se traza lo que se conoce como diagrama esfuerzo-deformación de ingeniería, mostrándose en la figura 2.7 el obtenido para un acero NOM-1018

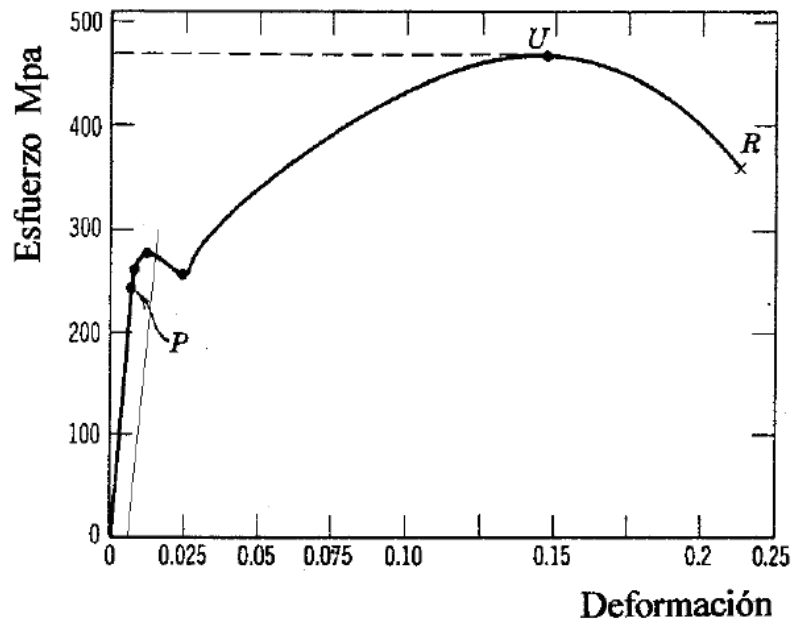


Diagrama esfuerzo - deformación para un acero de bajo contenido de carbono. En el diagrama, P es llamado Límite de Proporcionalidad

A partir de una deformación unitaria igual a 0.002 (0.2%) se traza una línea paralela a la parte lineal de la gráfica hasta intersectar a la curva, proyectándose este punto sobre el eje vertical se obtiene la resistencia a la fluencia o a la cedencia del material (σ_f)

Otras propiedades que se pueden obtener son las siguientes:

Es el esfuerzo más grande que puede soportar un material sin fracturarse.

Resistencia a la ruptura es el esfuerzo que causa la fractura del material.

4.8 Ejercicios de comprensión (Fuerza Cortante y Momento flexionante en Vigas)

EJERCICIOS DADOS EN CLASE.

Bibliografía básica y complementaria:

- Miguel Cervera Ruiz, Elena Blanco Díaz, Mecánica de estructuras. Libro I. Resistencia de materiales Díaz (2001). Barcelona
- Juan Miquel Canet, Resistencia de Materiales y Estructuras (2012). (CIMNE), España.
- M. en I. Felipe Díaz del Castillo Rodríguez. Fundamentos de Mecánica de Sólidos (2008), Cuautitlán Izcalli.