UDS

LIBRO

ECUACIONES DIFERENCIALES

INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

3° CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y

Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Objetivo de la materia: Aplicar los métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver problemas que involucran sistemas dinámicos que se presentan en la ingeniería.

UNIDAD I SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

1.1.- Definición de la Transformada de Laplace.
1.2.- Funciones transformables.
1.3.- Teoremas sobre las propiedades de la transformada de Laplace.
1.4.- Función escalón unitaria, función impulso y teorema de traslación.
1.5.- Transformada inversa de Laplace.
1.6.- Uso de tablas para la transformada inversa de Laplace.
1.7.- Teoremas sobre las propiedades de la transformada inversa de Laplace.
1.8.- Fracciones parciales para la transformada inversa de Laplace.
1.9.- Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas por el método de la transformada de Laplace.
1.10.- Solución de ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas por el método de la transformada de Laplace.
1.11.- Solución de ecuaciones diferenciales de 2º. Orden.
1.12.- Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior.

UNIDAD II ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

2.1.- Teoría preliminar.
2.2.- Ecuaciones diferenciales parciales.
2.3.- Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.
2.4.- Solución por integración.
2.5.- Existencia y unidades de la solución.
2.6.- Ecuaciones Separables.
2.7.- Ecuaciones homogéneas.
2.8.- Ecuaciones diferenciales exactas.
2.9.- Factores de integración.
2.10.- Ecuaciones diferenciales Lineales.
2.11.- Ecuación de Bernoulli.

UNIDAD III ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1.- Teoría preliminar.
3.2.- Definición de ecuación diferencial de orden n.
3.3.- Ecuaciones Diferenciales lineales homogéneas de orden “n” con coeficientes constantes.
3.4.- Terminología y estructura operacional.
3.5.- Principio de superposición.
3.6.- Raíces reales distintas.
3.7.- Raíces reales repetidas.
3.8.- Raíces complejas distintas.
3.9.- Raíces complejas repetidas.
3.10.- Problemas de valor inicial.
3.11.- Teorema de existencia y unicidad.

3.12.- Métodos de coeficientes indeterminados para calcular la integral particular.
3.13.- Método de variación de parámetros.
3.14.- Ecuación lineal de Cauchy-Euler.
3.15.- Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

UNIDAD IV APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y SERIES DE FOURIER

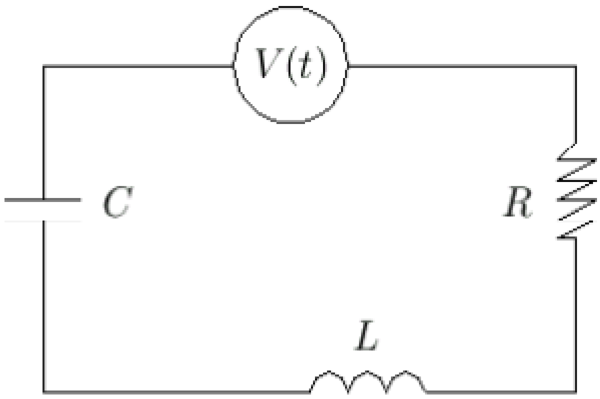
4.1.- Trayectorias Ortogonales.
4.2.- Problemas de Mecánica.
4.3.- Problemas de razón de cambio.
4.4.- Problemas en Circuitos Eléctricos.
4.5.- Problemas de Termofluidos.
4.6.- Problemas de Circuitos Hidráulicos y Neumáticos
4.7.- Métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
4.8.- Introducción a las series de Fourier.
4.9.- Series de Fourier.
4.10.- Ley de Senos y Cosenos
4.11.- Medio intervalo.

ÍNDICE

UNIDAD I: SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

1.1.- Definición de la Transformada de Laplace.

Vamos a desarrollar un tema sobre la Transformada de Laplace y su aplicación a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Estas ecuaciones surgen de manera natural en el contexto de los circuitos eléctricos. Consideremos por ejemplo el típico circuito LRC de la figura:



donde la inductancia L, la resistencia R y la capacidad de condensador C se consideran constantes. Se tiene entonces que la carga q(t) que circula por el circuito está dada por la ecuación:

$$Lq''(t) + Rq'(t) + q(t)/C = V(t).$$

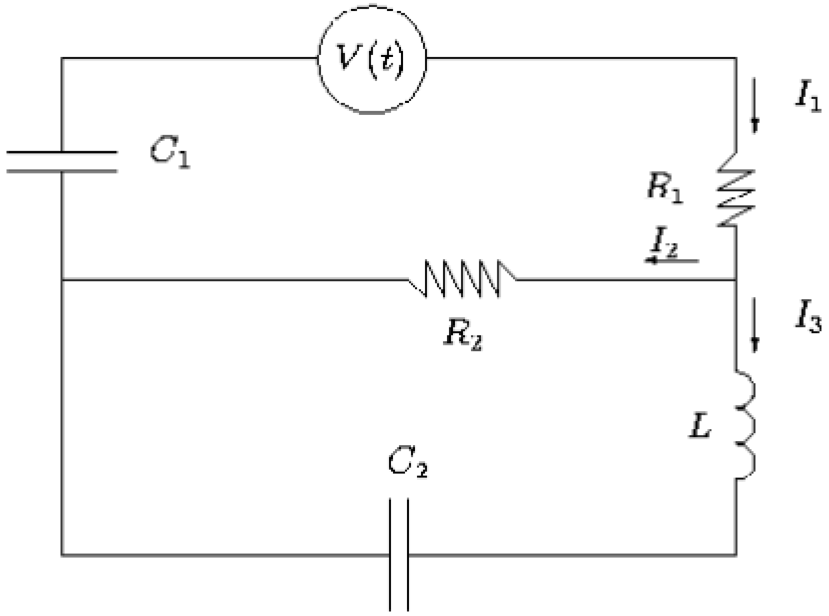
y dado que la intensidad I(t) es la derivada de la carga, ésta puede calcularse por la ecuación:

$$LI'(t) + RI(t) + \int I(s)ds/C = V(t)$$

o equivalentemente con la ecuación diferencial:

$$LI''(t) + RI'(t) + I(t)/C = V'(t)$$

De forma similar, si tenemos un circuito con varias ramas y más elementos, como por ejemplo:



podemos deducir a partir de las leyes de Kirchoff que las intensidades que circulan por los hilos eléctricos del circuito vienen dadas por:

$$\begin{cases} 0 = I_1 - I_2 - I_3, \\ V'(t) = I_1' R_1 + I_1/C_1 + I_2' R_2, \\ 0 = -I_2' R_2 + I_3'' L + I_3/C_2, \end{cases}$$

Si suponemos los elementos del circuito constantes, salvo a lo mejor el voltaje *V* (*t*), que supondremos una función derivable, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

La Transformada de Laplace es una herramienta que permite transformar los problemas anteriores en problemas algebraicos y, una vez resuelto este problema algebraico más fácil a priori de resolver, calcular a partir de la solución del problema algebraico la solución del problema de ecuaciones diferenciales.

Esta es la forma en que los ingenieros abordan el estudio de estos problemas, como pone de manifiesto las referencias [Oga1], [Sen] o [Jam]. Además este método es explicado en algunos libros de ecuaciones diferenciales como [BoPr], [Bra], [Jef] o [MCZ].

Sin embargo, para entender en su justa dimensión la Transformada de Laplace hay que dominar contenidos básicos de variable compleja que nuestros alumnos ya han estudiado durante el curso (ver por ejemplo [Mur]). Así, vamos a presentar la Transformada de Laplace en un primer lugar usando los conocimientos que el alumno tiene de funciones de variable compleja y una vez explicada ésta, procederemos a indicar algunas aplicaciones a las ecuaciones y sistemas citadas anteriormente. Nuestros alumnos también deben conocer y dominar contenidos relativos a integrales impropias que fueron explicados en la asignatura de primer curso *fundamentos matemáticos de la ingeniería*.

A modo de introducción histórica, diremos que la expresión

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t)$$

fue acuñada en primer lugar por Pierre—Simon Laplace en 1782. Su utilización dentro de la técnica se debe en su forma rigurosa a Thomas Bromwich, el cual formalizó utilizando las funciones de variable compleja y la Transformada de Laplace un cálculo operacional inventado por Oliver Heaviside para la resolución de circuitos eléctricos.

1.2.- Funciones transformables.

previamente a introducir la Transformada de Laplace, hemos de concretar qué tipo de funciones vamos a considerar para nuestros problemas. Las funciones que van a ser de importancia dentro de la ingeniería son aquellas llamadas *continuas a trozos*, que a continuación definimos.

Dados los números reales $a < b$, se dice que la función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *continua a trozos* si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, de manera que f es continuaen (t_i, t_{i+1}), $0 \leq i < n$, y existen y son finitos los límites laterales de f en cada uno de los puntos t_i, $0 \leq i \leq n$.

Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ se dice que es *continua a trozos* si para cada intervalo compacto $[a, b] \subset [0, +\infty)$ se verifica que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos.

Uno de los primeros ejemplos de función continua a trozos es

$$h_a : [0, +\infty) \to \mathbb{C},$$

donde a es un número real mayor o igual que cero. Esta función está definida por

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

y se conoce en ingeniería con el nombre de *función de Heaviside*.

1.3.- Teoremas sobre las propiedades de la transformada de Laplace.

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable, esto es, existe la integral de Riemann de f en todo intervalo compacto $[0, a] \subset [0, +\infty)$. Se define la *Transformada de Laplace* de f en $z \in \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt, \tag{1.1}$$

siempre que tal integral impropia exista. Como el alumno debe conocer, la convergencia dela integral

$$\int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)|dt$$

implica la convergencia de la integral (1.1). Denotaremos por D_f el dominio de $\mathcal{L}[f]$, es decir, el subconjunto del plano complejo donde la expresión (1.1) tiene sentido.

A continuación, vamos a ver ejemplos de Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.

- Función de Heaviside. Sea $a \geq 0$ y consideremos la función de Heaviside h_a definida anteriormente. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$ se verifica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h_a](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}h_a(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-zt}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-zt}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-za}}{z}-\frac{e^{-zx}}{z}\right) = \frac{e^{-za}}{z}.\end{aligned}$$

En particular, cuando $a = 0$ obtenemos

$$L[h_0](z) = \frac{1}{z}.$$

- Función exponencial. Sea $\omega \in C$ y consideremos la función exponencial $f(t) = e^{\omega t}$. Se verifica entonces para todo $z \in C$ tal que $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, \omega$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}e^{\omega t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\omega)t}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-(z-\omega)t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{z-\omega}-\frac{e^{-(z-\omega)x}}{z-\omega}\right) = \frac{1}{z-\omega}.\end{aligned}$$

En particular, si $\omega = 0$ se verifica que $f(t) = 1$, con lo que nuevamente

$$L[h_a](z) = \frac{1}{z} \text{ para todo } z \in C \text{ tal que } \mathrm{Re}\, z > 0.$$

1.4.- Función escalón unitaria, función impulso y teorema de traslación.

Existen varias maneras diferentes de definir la función de Heaviside, no todas ellas equivalentes. Las diferentes definiciones no equivalentes difieren solo en el valor H(0), que es convencional. La mayoría de autores lo definen como H(0)=1ya que maximiza la simetría de la función, y permite una representación de la misma a través de la función signo:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}(x))$$

1.5.- Transformada inversa de Laplace.

Para determinar la transformada inversa de Laplace de una función $F(s)$, es necesario aplicar lo siguiente:

1. Se debe descomponer $F(s)$ en términos más sencillos, esto mediante una expansión de fracciones parciales.

2. Se debe utilizar una tabla de transformadas inversas de Laplace.
3. Si es necesario, se debe aplicar la propiedad de linealidad y se suman todas las transformadas de Laplace parciales en una total.

Es importante verificar que el grado $n > m$, con lo cual se garantiza que $F(s)$ es una función racional propia, donde los polos de $F(s)$ se pueden expresar como:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)$$

en donde los p_n pueden ser reales o complejos.

1.6.- Uso de tablas para la transformada inversa de Laplace

Las transformadas de Laplace de las funciones que hemos estudiado se resumen en la tabla siguiente:

***f*(t)**	F(s)=∞∫0e−stf(t)dtF(s)=∫0∞e−stf(t)dt
$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s)+c_2 F_2(s)$
exp(*a t*)	1s−a1s−a
cos(*ωt*)	ss2+ω2ss2+ω2
sin(*ωt*)	ωs2+ω2ωs2+ω2
t^n	n!sn+1n!sn+1
exp(*at*) ·*f*(*t*) exp(*at*) ·cos(*ωt*)	*F*(*s-a*) s−a(s−a)2+ω2s−a(s−a)2+ω2
u(*t-a*)	exp(*-as*)/*s*
u(*t-a*) ·*f*(*t-a*)	exp(*-as*) ·*F*(*s*)
δ(*t-a*)	exp(*-as*)
f'(*t*) (derivada primera)	s ·*F*(*s*)-*f*(0)
f''(*t*) (derivada segunda)	s^2 ·*F*(*s*)-s ·*f*(0)-s ·*f*'(0)
g(t)=t∫0f(τ)dτg(t)=∫0tf(τ)dτ (integral)	*F*(*s*)/*s*
f(*t*)=*f*(*t*+*p*), (función periódica)	11−e−spp∫0e−stf(t)dt11−e−sp∫0pe−stf(t)dt
f(*at*)	1aF(sa)1aF(sa)

$t^n f(t)$	(−1)ndndsnF(s)(−1)ndndsnF(s)

1.7.- Teoremas sobre las propiedades de la transformada inversa de Laplace.

Propiedad de linealidad

Si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = c_1 \cdot \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$$

Tambien se aplica para más de dos funciones.

Primera propiedad de translación

Si $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} \cdot f(t)$$

Segunda propiedad de translación

Si $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, entonces

Propiedad del cambio de escala

Si $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[F(k \cdot s)] = \frac{1}{k} \cdot f(\frac{t}{k})$$

Donde k representa una constante.

1.8.- Fracciones parciales para la transformada inversa de Laplace.

Una función racional, $\frac{P(s)}{Q(s)}$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en los cuales el grado de $P(s)$ es el menor que el de $Q(s)$, puede escribirse como una suma de fracciones racionales (denominados fracciones parciales) de la forma

$$\frac{A}{(as+b)^m}, \quad \frac{As+B}{(as^2+bs+c)^m}$$

donde $m = 1, 2, 3, \cdots$. Hallando sus transformadas inversas de Laplace, se puede determinar $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]$.

Existe un método para hallar los valores de los coeficientes de cada fracción racional y es utilizando la evaluación de límites. Para poder aplicar este método, es necesario desarrollar la función racional en la suma de fracciones y la expresión que se indica en el denominador, se iguala a cero y se despeja la variable s; lo que indique el valor numérico, es el valor que se toma a evaluar en el límite. La expresión que se igualó a cero, esa expresión deberá ser multiplicada por el resto de la suma de fracciones racionales con el fin de evitar una indeterminación o un resultado infinito.

1.9.- Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas por el método de la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace se aplica a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando son lineales, de coeficientes constantes, van acompañadas de condiciones iniciales y el dominio de la función incógnita es el eje positivo. El método puede esquematizarse en los siguientes pasos:

1. aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación y utilizar la propiedad P1 sobre linealidad,
2. utilizar la propiedad P5 sobre transformada de la derivada, lo que genera una ecuación algebraica con la función transformada como incógnita,
3. despejar esa función transformada,
4. buscar su inversa.

Este método se aplica igualmente a sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes con datos iniciales; en este caso la aplicación de la transformada genera un sistema algebraico lineal de la misma dimensión que el sistema diferencial inicial. También es aplicable en algunos casos especiales de coeficientes variables, pero entonces la ecuación transformada no es algebraica, sino nuevamente diferencial.

1.10.- Solución de ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas por el método de la transformada de Laplace.

Para detallar un poco más el proceso anterior consideramos ahora el problema

$$ay'' + by' + cy = g(t) \ , \ y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_1$$

y efectuamos los pasos anteriores:

1. aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación y utilizar la propiedad P1 sobre linealidad; llamamos $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$:
$$a\mathcal{L}[y''(t)] + b\mathcal{L}[y'(t)] + cY(s) = G(s)$$
2. utilizar la propiedad P5 sobre transformada de la derivada, lo que genera una ecuación algebraica con la función transformada como incógnita:
$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay_1 = G(s)$$
3. despejar esa función transformada:
$$Y(s) = [(as + b)y_0 + ay_1 + G(s)]H(s) \ , \ \text{siendo } H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$
4. buscar su inversa.

La función $H(s)$ se conoce como función de transferencia y sólo depende de los coeficientes de la ecuación y no del término $g(t)$. La función $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ se denomina respuesta al impulso, ya que es la solución del problema

$$ay'' + by' + cy = \delta(t) \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0$$

1.11.- Solución de ecuaciones diferenciales de 2°. Orden.

Como hemos visto, la transformada de Laplace se aplica a la resolución de problemas de valor inicial cuya e.d.o. es lineal con coeficientes constantes, pues transforma una ecuación de este tipo en una algebraica lineal de la cual se despeja la transformada de la variable dependiente de la e.d.o. inicial. Cuando se trata de resolver un problema de contorno cuya e.d.p. es lineal de coeficientes constantes de dos variables, la aplicación de la transformada transforma la e.d.p. en una e.d.o. cuya variable dependiente es la transformada de la incógnita de la e.d.p. inicial. Una de las ventajas de este método es que es aplicable a ecuaciones no homogéneas. Las características que permiten o aconsejan su uso son

- la e.d.p. sea lineal (condición necesaria);
- la ecuación tenga coeficientes constantes;
- una al menos de las variables independientes tenga dominio infinito;
- el problema presente una condición inicial en esa variable;
- las operaciones de derivar respecto a una variable independiente y tomar transformada de Laplace respecto de la otra sean intercambiables, lo cual es cierto en determinadas condiciones de regularidad.

El procedimiento general de aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de problemas de contorno puede esquematizarse en los siguientes pasos:

1. transformar la e.d.p. dada mediante Laplace, respecto a una variable independiente de dominio semi-infinito (sea por ejemplo $t \in [0,\infty)$);
2. resolución de la e.d.o. resultante; la variable independiente de esta e.d.o. es la otra variable (sea por ejemplo la *x*) de la e.d.p.\ inicial y la incógnita es la función transformada; en los coeficientes de su solución intervendrá la variable *s* como parámetro;
3. aplicar transformadas de Laplace a las condiciones de frontera en la variable *x*;
4. utilizar esas nuevas condiciones para determinar los coeficientes de la solución general de la e.d.o. anterior;
5. invertir la transformada de Laplace.

1.12.- Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ejemplo Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del sistema x ′ = y/t, y ′ = t/x. Las funciones f1(t, x, y) = y/t, f1,y(t, x, y) = 1/t son continuas salvo en el cero del denominador, t = 0. La función f2(t, x, y) = t/x, f2,x(t, x, y) = −t/x2 son continuas salvo en el cero del denominador, x = 0. Las funciones f1,x(t, x, y) = 0 = f2,y(t, x, y) son constantes y continuas. Recapitulando, el sistema tiene solución única para cualquier conjunto de valores iniciales (t0, x0, y0) con t0 6= 0 6= x0. Por su parte, el problema de valores iniciales para las ecuaciones diferenciales de orden n, x n) = f t, x, x′ , . . . , xn−1) , x(t0) = x0, x′ (t0) = x ′ 0 , . . . xn−1)(t0) = x n−1) 0 , (2.3) se puede reducir al problema para un sistema de n ecuaciones diferenciales de orden uno, sin más que realizar el cambio de variables x1 = x, x2 = x ′ , . . . xn = x n−1) , que proporciona el sistema x ′ 1 = x2 · · · x ′ n−1 = xn x ′ n = f(t, x1, . . . , xn), x1(t0) = x0, x2(t0) = x ′ 0 , . . . xn(t0) = x n−1)(t0), (2.4) con lo cual el vector de funciones del sistema es simplemente F = (x2, . . . , xn, f) t y el vector de condiciones iniciales, x0, x′ 0 , . . . , x n−1) 0.

UNIDAD II: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

2.1.- Teoría preliminar.

Las ecuaciones con las que generalmente el alumno ha trabajado responden, en su mayor parte, a la necesidad de obtener los valores numéricos de ciertas magnitudes. Pero en las aplicaciones de las matemáticas surgen con frecuencia una gran clase de problemas cualitativamente diferentes: problemas en los que la incógnita es a su vez una función. Llegamos así a las ecuaciones funcionales y su naturaleza puede ser, en general, muy diversa. De hecho, puede decirse que ya se conocen algunos ejemplos de ecuaciones funcionales: el cálculo de primitivas y las funciones implícitas. Consideraremos ahora la clase más usual e importante de ecuaciones que sirve para determinar tales funciones: las llamadas ecuaciones diferenciales, esto es, ecuaciones en las que, además de la función desconocida, aparecen también sus derivadas de distintos órdenes. Una posible clasificación de las ecuaciones funcionales está recogida en la siguiente tabla en la que se ha expandido la rama de las ecuaciones diferenciales:

$$\text{Ecuaciones funcionales} \begin{cases} \text{Ecuaciones diferenciales} \begin{cases} \text{ordinarias} \\ \text{en derivadas parciales} \end{cases} \\ \text{Ecuaciones integrales} \\ \text{Ecuaciones integro-diferenciales} \\ \text{Otras} \end{cases}$$

La primera clasificación que se puede dar para las ecuaciones diferenciales es dividirlas en ordinarias y parciales, según que la función incógnita dependa de una o de varias variables. Actualmente, las ecuaciones diferenciales se han convertido en una herramienta poderosa para la investigación de los fenómenos naturales. La mecánica, la astronomía y la tecnología han sido causa de numerosos progresos en esta área.

2.2.- Ecuaciones diferenciales parciales.

Se llama ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) a una ecuación que liga la variable independiente x, una función y = y(x) (que depende solo de la variable independiente) y sus respectivas derivadas y 0 , y00, ..., y(n) . Es decir, una expresión de la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$$

Es decir, una expresión de la forma:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0$$

A la función $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ la llamaremos *función incógnita.*

2.3.- Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición:
Dada la ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice que $z = z(x)$ $z : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *solución* de la ecuación diferencial, si satisface:

1. z es n veces derivable en I.
2. $\left(x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)\right) \in \mathcal{D} \quad \forall x \in I.$
3. $z^{(n)}(x) = f\left(x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)\right) \quad \forall x \in I.$

Es decir, solución de una E.D.O. es toda función que sustituida junto con sus derivadas en la ecuación conduce a una identidad.

Las soluciones de una E.D.O. pueden ser de tres tipos:

1. Solución general: solución de la ecuación diferencial en la que aparece tantas constantes arbitrarias como orden de la ecuación. En nuestro caso, al ser de primer orden, la solución general será una familia de curvas de la forma Φ(x, y, C) = 0, siendo C una constante arbitraria.

2. Solución particular: es una solución que se obtiene al fijar los valores de las constantes arbitrarias de la solución general, en nuestro caso, al fijar el valor de la constante arbitraria C.

3. Solución singular: es una solución que no está incluida en la solución general; es decir, no se puede obtener a partir de ella asignando un valor conveniente a la constante.

La solución de una ecuación diferencial puede venir dada de tres formas distintas:

1. En forma explícita si la incógnita y viene despejada en función de la variable independiente x.

2. En forma implícita si la solución viene expresada por una ecuación que liga la incógnita y y la variable independiente x.

3. En forma paramétrica si la solución viene dada en función de un parámetro.

2.4.- Solución por integración.

En la búsqueda de la resolución de integrales, se recurre a diversos medios e incluso a las reglas de derivación. En el planteamiento de propiedades para la derivación de funciones, se encuentra una que versa sobre la **multiplicación de dos funciones** y señala que, cuando se deriva el producto de éstas, el resultado se obtiene por el producto "cruzado" de cada función involucrada con la derivada de la otra función. Esto se muestra a continuación:

$d(uv) / dx = u\, d(v) / dx + v\, d(u) / dx$; "u" y "v" son funciones de "x" (e.1)

Si se busca aplicar la integración de funciones a (e.1), se puede expresar de la siguiente manera:

$\int f(x)\,(dx)$ (e.2)

Al aplicar (e.2) a la ecuación (e.1) y hacer que $f(x) = u(x)\,v(x)$, de manera sintética "uv":

$\int (d(uv)/dx)\,(dx)= \int u\,(d(v)/dx)(dx) + \int v\,(d(u)/dx)(dx)$ (e.3)

Al ser "dx" un término algebraico y encontrarse en numerador y denominador, (e.3) se simplifica de la siguiente manera:

$\int d(uv) = \int u\, d(v) + \int v\, d(u)$ (e.4)

Al despejar en (e.4) el primer término después del signo de igual se tiene lo siguiente:

$\int u\, d(v) = \int d(uv) - \int v\, d(u)$ (e.5)

Si se recuerda que la derivación e integración son **funciones inversas**, se pueden simplificar en (e.5), lo que implica la eliminación de la integral y derivadas indicadas de la siguiente forma:

$\int d(uv) = uv$ (e.6)

Por (e.6), la expresión (e.5) se resume como sigue:

$\int u\, d(v) = uv - \int v\, d(u)$ (e.7)

El objetivo de la expresión (e.7) es obtener una expresión más fácil de integrar; entonces, al aplicar el método propuesto en la ecuación original con el producto de dos funciones, ésta debe descomponerse en dos expresiones. Una de ellas no requiere integración (el término "uv") y la otra debe ser más directa de resolver, ya sea porque algebraicamente se simplifica o la entrada de la función compuesta es inmediata en las tablas integración convencionales.

2.5.- Existencia y unidades de la solución.

La “unicidad” significa que para todas las “x” hay un solo resultado, o dicho de otro modo a cada valor de “x” le corresponde un solo punto en la curva. La “existencia” significa que todas las “x” deben tener un punto en la curva, si hay alguna “x” que no lo tiene entonces no es función.

Te ayudo aclarando los conceptos de “unicidad” y “existencia”. La “unicidad” significa que para todas las “x” hay un solo resultado, o dicho de otro modo a cada valor de “x” le corresponde un solo punto en la curva. La “existencia” significa que todas las “x” deben tener un punto en la curva, si hay alguna “x” que no lo tiene entonces no es función.

Recordemos el concepto de dominio: El dominio es el conjunto valores numéricos que puede tomar la “x”. Analicemos algunos ejemplos: Si tenemos 1 2 f (x) x += , la “x” puede ser cualquier número, porque a todo número lo podemos elevar al cuadrado y sumarle 1, entonces decimos que su dominio son todos los números reales Y escribimos su dominio es . Si tenemos f (x) = 3x

---

5 , la “x” también puede tomar cualquier valor numérico, porque a todo número real lo podemos multiplicar por 3 y restarle 5, su dominio son todos los reales. Y escribimos su dominio es . Si tenemos 1 1

= x f x)(nos aparece un problemita, ya la “x” no puede valer 1, porque haría que el denominador fuera igual a 0, y no podemos dividir por 0, por definición de división. Sin embargo cualquier otro número sí podemos atribuirle a la “x”. Por lo tanto decimos que su dominio son todos los reales menos el 1 y escribimos su dominio es

---

{1} Recordemos el concepto de codominio: El codominio es el conjunto de valores donde pueden estar los resultados. Por ejemplo si 1 2 f (x) x += los resultados serán siempre números reales. Si f (x) = 3x

---

5 los resultados serán siempre números reales. Si 1 1

= x f x)(los resultados serán siempre números reales. Es decir el codominio de funciones con números será los reales. Recordemos el concepto de imagen: Mientras que el codominio es el conjunto de valores donde pueden estar los resultados, la imagen es el conjunto de resultados.

2.6.- Ecuaciones Separables

Metodología para resolver ecuaciones diferenciales separables

1. La ecuación diferencial se escribe en la FORMA ESTÁNDAR propia de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

dydx=f(x,y)

Ejemplo:

dydx=3x2+4x+22(y–1)

Donde:

f(x,y)=3x2+4x+22(y–1)

2. SEPARAMOS LAS VARIABLES

Mdx=Ndy

Donde:

M=f(x) y N=f(y)

2. Por último, INTEGRAMOS ambos miembros de la ecuación mediante las fórmulas y ténicas conocidas del cálculo integral

2.7.- Ecuaciones homogéneas

Definición:

Una ecuación diferencial de primer orden que se puede llevar a escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se denomina ED de primer orden ***homogénea***.

Una ecuación diferencial puede ser homogénea en dos aspectos: cuando los coeficientes de los términos diferenciales en el caso del primer orden son funciones homogéneas de las variables; o para el caso lineal de cualquier orden cuando no existen los términos constantes.

Procedimiento

Procedimiento:

Para resolver una ecuación diferencial homogénea se procede a efectuar las siguientes sustituciones:

$$v = \frac{y}{x},$$

$$\Rightarrow \quad y = vx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

Ejemplo ilustrativo

Ejemplo ilustrativo:

$$(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$$

Solución-Juan Beltrán:

$$(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0,$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + yx - x^2\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + yx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} \quad (1)$$

La (1) es una *ecuación diferencial homogénea de grado dos*, para resolverla, se hacen las siguientes sustituciones:

Sea

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx, \\ \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v^2 + v \qquad \{\text{sustituyendo } (2) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = v^2 \Leftrightarrow v^{-2}dv = x^{-1}dx \Leftrightarrow \int v^{-2}dv = \int x^{-1}dx \Leftrightarrow -v^{-1} = \ln|x| + C,$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = \ln|x| + C \qquad \left\{v = \frac{y}{x}\right\},$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = \ln|x| + C \Leftrightarrow -x = \left(\ln|x| + c\right)y;$$

$$\therefore \quad y = -\frac{x}{\ln|x| + c}.$$

2.8.- Ecuaciones diferenciales exactas

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición: Sean *P*(*x*, *y*) y *Q*(*x*, *y*) funciones reales continuas en un dominio D. Se dice que la ecuación

$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$

Es **diferencial exacta** si existe una función real *F*(*x*, *y*) tal que en el dominio D cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

La función *F*(*x*, *y*) es una primitiva de la ecuación y la integral general es:

$F(x, y)=\text{cte}$

Teorema.- La condición necesaria y suficiente para que la ecuación $P\cdot dx+Q\cdot dy=0$ sea diferencial exacta en un dominio D, siendo *P*(*x*, *y*), *Q*(*x*, *y*) y sus derivadas parciales continuas en D es que se cumpla:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ejemplos:

1. $e^{x}(y^{3}+xy^{3}+1)\,dx+3y^{2}(xe^{x}-6)dy=0$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{x}(3y^{2}+3y^{2}x)=e^{x}3y^{2}(1+x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3y^{2}(e^{x}+xe^{x})=e^{x}3y^{2}(1+x)$$

D=R^2

Resolución.- Por lo anterior se sabe que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)=e^{x}(y^{3}+xy^{3}+1)\Rightarrow F(x,y)=\int e^{x}(y^{3}+xy^{3}+1)\,dx=$$

$$=e^{x}(y^{3}+xy^{3}+1)-\int e^{x}y^{3}\,dx=e^{x}(y^{3}+xy^{3}+1)-e^{x}y^{3}=e^{x}(xy^{3}+1)+\alpha(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3xy^{2}e^{x}+\alpha'(y)$$

deberá coincidir con

$$Q(x,y)=3y^{2}(xe^{x}-6)dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha'(y)=-18y^{2}\Rightarrow\alpha(y)=-6y^{3}+\text{cte}$$

Por tanto,

$$F(x,y)=e^{x}(xy^{3}+1)-6y^{3}+\text{cte}$$

La integral general

$$e^{x}(xy^{3}+1)-6y^{3}=K$$

2.9.- Factores de integración

Factores integrantes

Definición.- Dada la ecuación $P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$, se dice que es un factor integrante en un dominio D, siendo $P(x, y)$, $Q(x, y)$ y sus derivadas parciales continuas en D, si multiplicado por la ecuación la convierte en diferencial exacta. Es decir si la ecuación

$\mu(x, y)P(x, y)dx+\mu(x, y)Q(x, y)dy=0$

es exacta. Por lo tanto deberá de cumplir:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x, \ (*)$$

1. **El factor integrante es solo función de *x***

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \begin{cases} \mu_y = 0 \\ \mu_x = \frac{d\mu}{dx} = \mu' \end{cases}$$

Sustituyendo en (*)

$$\mu(P_y - Q_x) = \mu' Q \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

Para poder integrar y obtener así el factor integrante:

$$\frac{P_y - Q_x}{Q}$$

debe ser solo función de x

Ejemplo: $(1\text{-}x^2y)dx+x^2(y\text{-}x)dy=0$

$$P_y = -x^2, \quad Q_x = 2xy - 3x^2$$

No es exacta

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y-x)} = \frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}$$

Admite factor integrante. Integrando

$$\ln \mu = -2\ln x \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

La ecuación

$$\frac{1}{x^2}(1-x^2y)dx + \frac{1}{x^2}x^2(y-x)dy = 0 = \left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)dy$$

Exacta. Solución

$$-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = K$$

2. **El factor integrante es solo función de *y***

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \begin{cases} \mu_x = 0 \\ \mu_y = \frac{d\mu}{dy} = \mu' \end{cases}$$

Sustituyendo en (*)

$$\mu(Q_x - P_y) = \mu' P \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$$

Para poder integrar y obtener así el factor integrante $\frac{Q_x - P_y}{P}$, debe ser solo función de y

Ejemplo. $x^2y^2dx+(x^3y+y+3)dy=0$

$P_y=2yx^2$, $Q_x=3yx^2$. No es exacta

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{3x^2y - 2yx^2}{x^2y^2} = \frac{1}{y}$$

Integrando

$$\ln \mu = \ln y \Rightarrow \mu = y$$

2.10.- Ecuaciones diferenciales Lineales

En matemáticas, una ecuación diferencial lineal es aquella ecuación diferencial cuyas soluciones pueden obtenerse mediante combinaciones lineales de otras soluciones. Estas últimas pueden ser ordinarias (EDOs) o en derivadas parciales (EDPs). Las soluciones a las ecuaciones diferenciales lineales cuando son homogéneas forman un espacio vectorial, a diferencia de las ecuaciones diferenciales no lineales.

Definición

La ecuación

$$\phi(x^{(n)}, \ldots, x', x, t) = 0$$

se llama *lineal* cuando la función ϕ es lineal a las variables $x^{(k)}$.

Una ecuación diferencial lineal tiene la forma:

$$Ly = f$$

donde el operador diferencial L es un operador lineal, y es la función incógnita o desconocida (una función que podría ser dependiente del tiempo $y(t)$), y del lado derecho f es una función conocida de la misma naturaleza que y (denominada **término de excitación**). Para una función dependiente del tiempo se puede escribir la ecuación más detalladamente como:

$$Ly(t) = f(t)$$

y también se puede usar la notación con corchetes:

$$L[y(t)] = f(t)$$

El operador lineal L puede ser de la siguiente forma:[2]

$$L_n(y) \equiv a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y$$

o sino:

$$L_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k(y)$$

La condición de linealidad sobre L se da mientras no aparezcan productos de la función desconocida consigo misma, ni con ninguna de sus derivadas. Es conveninente reescribir esta ecuación en donde la forma del operador es:

$$L_n(y) \equiv \left[a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D + a_0(t)\right] y$$

donde D es el operador diferencial $\frac{d}{dt}$ (es decir, $Dy = y'$, $D^2y = y''$,...), y a_k son funciones conocidas. Se dice que la ecuación tiene un **orden** n, si es el índice más alto de la derivada de y.

Estas ecuaciones tienen la propiedad de que el conjunto de las posibles soluciones tiene estructura de espacio vectorial de dimensión finita cosa que es de gran ayuda a la hora de encontrar dichas soluciones.

Si f = 0 la ecuación se denomina homogénea y sus soluciones se denominan funciones complementarias. Esta solución es muy importante para el caso general, y que cualquier función complementaria puede sumarse a la solución de la ecuación cuando es inhomogénea (f ≠ 0) y resulta en otra solución. Cuando los ak son números, la ecuación se dice que tiene coeficientes constantes.

2.11.- Ecuación de Bernoulli

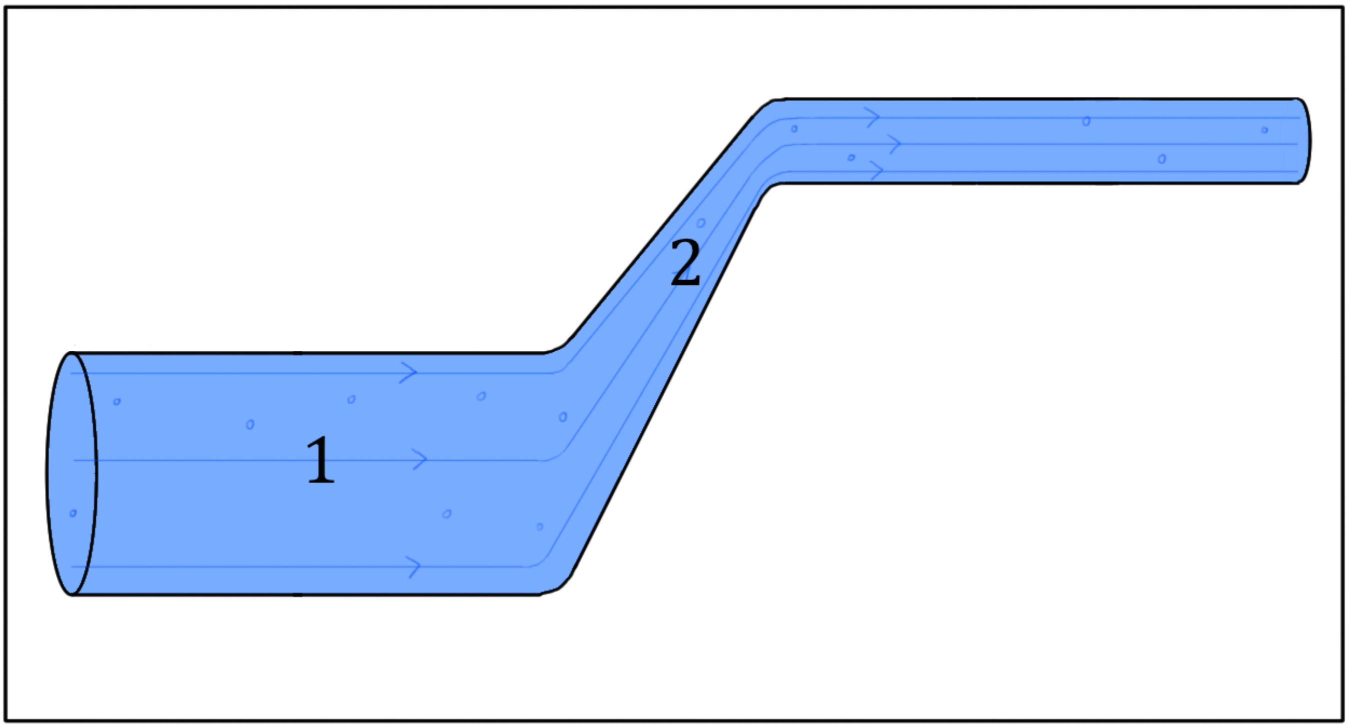
¿Qué es la ecuación de Bernoulli?

La ecuación de Bernoulli es esencialmente una manera matemática de expresar el principio de Bernoulli de forma más general, tomando en cuenta cambios en la energía potencial debida a la gravedad. Derivaremos esta ecuación en la siguiente sección, pero antes de hacerlo miremos cómo es la ecuación de Bernoulli, desarrollemos una idea de lo que dice y veamos cómo podemos usarla.

La ecuación de Bernoulli relaciona la presión, la velocidad y la altura de dos puntos cualesquiera (1 y 2) en un fluido con flujo laminar constante de densidad \rhoρrho. Usualmente escribimos la ecuación de Bernoulli de la siguiente manera:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Las variables P_1P1P, start subscript, 1, end subscript, v_1v1v, start subscript, 1, end subscript y h_1h1h, start subscript, 1, end subscript se refieren a la presión, la velocidad y la altura del fluido en el punto 1, respectivamente, mientras que las variables P_2P2P, start subscript, 2, end subscript, v_2v2v, start subscript, 2, end subscript y h_2h2h, start subscript, 2, end subscript se refieren a la presión, la velocidad y la altura del punto 2, como se muestra en el diagrama a continuación. En este podemos ver una elección particular de los dos puntos (1 y 2) en el fluido, pero la ecuación de Bernoulli es válida para cualesquiera dos puntos en el fluido.



Cuando usas la ecuación de Bernoulli, ¿cómo sabes dónde escoger tus puntos? Tienes que seleccionar uno de los puntos en donde quieres determinar una variable desconocida. De otro modo, ¿cómo podrás resolver la ecuación para esa variable? Típicamente, escogerás el segundo punto en una posición donde se te ha dado alguna información o donde el fluido está abierto a la atmósfera, ya que la presión absoluta ahí es la presión atmosférica P_{atm}=1.01\times 10^5PaPatm=1.01×105PaP, start subscript, a, t, m, end subscript, equals, 1, point, 01, times, 10, start superscript, 5, end superscript, P, a.

Observa que la hhh se refiere a la altura del fluido por encima de un nivel arbitrario que puedes escoger de cualquier forma que te resulte conveniente. Típicamente, es más fácil escoger al más bajo de los dos puntos (1 o 2) como la altura donde h=0h=0h, equals, 0. La PPP se refiere a la presión en ese punto. Puedes escoger usar la presión manométrica o la presión absoluta, pero cualquier presión que decidas usar (manométrica o absoluta) debes utilizarla en el otro lado de la ecuación. No puedes sustituir la presión manométrica en el punto 1 y la presión absoluta en el punto 2. De mismo modo, si sustituyes la presión manométrica en el punto 1 y resuelves para la presión en el punto 2, el valor que obtengas será la presión manométrica en el punto 2 (no la presión absoluta).

Los términos \dfrac{1}{2}\rho v^221ρv2start fraction, 1, divided by, 2, end fraction, rho, v, squared y \rho ghρghrho, g, h en la ecuación de Bernoulli se parecen a la energía cinética \dfrac{1}{2}m v^221mv2start fraction, 1, divided by, 2, end fraction, m, v, squared y la energía potencial mghmghm, g, h, solo con el término de la masa mmm intercambiado por el de la densidad \rhoρrho. Así que no debe sorprendernos que la ecuación de Bernoulli sea el resultado de aplicarle la conservación de la energía a un fluido que se mueve. Derivaremos la ecuación de Bernoulli por medio de la conservación de la energía en la siguiente sección.

UNIDADIII ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1.- Teoría preliminar

Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior

Como vimos en la primer entrada, una ecuación diferencial de n-ésimo orden en su forma general es

$$(1)F(x,y,y',\cdots,y(n))=0$$

Donde F es una función con valores reales de n+2 variables. La ecuación (1) se puede escribir en su forma normal como

$$(2)dnydxn=f(x,y,y',\cdots,y(n-1))$$

Con f una función continua con valores reales. Para el caso en el que la ecuación es **lineal**, una ED de n-ésimo orden se puede escribir como

$$(3)an(x)dnydxn+an-1(x)dn-1ydxn-1+\cdots+a1(x)dydx+a0(x)y=g(x)$$

Satisfaciendo las propiedades que ya conocemos. La ecuación (3) es una ecuación no homogénea, en el caso en el que g(x)=0, decimos que la ecuación es homogénea

$$(4)an(x)dnydxn+an-1(x)dn-1ydxn-1+\cdots+a1(x)dydx+a0(x)y=0$$

Las ecuaciones (3) y (4) serán entonces el tipo de ecuaciones sobre la cual desarrollaremos esta teoría preliminar.

Para comenzar, estudiemos los **problemas con valores iniciales** y **problemas con valores en la frontera** para el caso de ecuaciones diferenciales lineales.

Problema con valores iniciales para ecuaciones lineales

En la unidad anterior definimos lo que es una problema con valores iniciales, esta definición fue general, definamos ahora lo que es un problema con valores iniciales para el caso en el que la ecuación es lineal.

Definición: Sea δ un intervalo que contiene al punto x_0, el problema de resolver la ecuación lineal

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Sujeta a que se cumpla

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

Donde $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas, se llama **problema con valores iniciales (PVI)** para ecuaciones lineales.

Para el caso de segundo orden ya hemos mencionado que geométricamente un PVI involucra obtener una curva solución que pase por el punto (x_0,y_0) y la pendiente en dicho punto sea $m=y_1$.

Con fines de completez mencionaremos sin demostrar el teorema de existencia y unicidad que contiene las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución de un PVI de n-ésimo orden para el caso de ED lineales.

Teorema: Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo δ, y sea $a_n(x)\neq 0$, $\forall x \in \delta$. Si $x=x_0$ es cualquier punto en δ, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales para el caso de ED lineales existe en el intervalo y es única.

Podemos enunciar el teorema de existencia y unicidad para el caso de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden ($n=2$) de la siguiente manera:

Teorema: Sean $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo δ, y sea $a_2(x)\neq 0$, $\forall x \in \delta$. Si $x=x_0$ es cualquier punto en δ, entonces existe una única solución al problema con valores iniciales

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Sujeta a que se cumplan las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0 \quad y \quad y'(x_0)=y_1$$

en el intervalo δ.

No demostraremos este teorema pero es importante notar que dentro del enunciado hemos escrito la definición de PVI para el caso de $n=2$ (segundo orden). Veamos un ejemplo en donde apliquemos este último teorema.

Ejemplo: Probar que la función $y(x)=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ es solución al PVI

$$d2ydx2-4y=12x;y(0)=4,y'(0)=1$$

y además es única.

Solución: Primero probemos que es solución al PVI, para ello veamos que satisface la ecuación diferencial y además cumple con las condiciones iniciales.

Tenemos la función $y(x)=3e2x+e-2x-3x$, evaluemos en $x=0$:

$$y(0)=3e0+e0-0=3+1=4\Rightarrow y(0)=4$$

Se cumple la primera condición inicial. Ahora calculemos la primer derivada y verifiquemos la segunda condición inicial.

$$dydx=2(3e2x)-2(e-2x)-3\Rightarrow y'(x)=6e2x-2e-2x-3$$

Evaluando en $x=0$:

$$y'(0)=6e0-2e0-3=6-2-3=1\Rightarrow y'(0)=1$$

Se cumple la segunda condición inicial. Para concluir calculemos la segunda derivada y veamos que se satisface la ecuación diferencial.

$$d2ydx2=2(6e2x)-2(-2e-2x)\Rightarrow d2ydx2=12e2x+4e-2x$$

Notamos que

$$d2ydx2-4y=(12e2x+4e-2x)-4(3e2x+e-2x-3x)=12e2x+4e-2x-12e2x-4e-2x+12x=12x$$

Esto es, $d2ydx2-4y=12x$. Por lo tanto la función $y(x)=3e2x+e-2x-3x$ es solución al PVI.

Es claro que el intervalo de solución es $\delta=(-\infty,\infty)$ y
que $x0=0\in\delta$. Como $a2(x)=1\neq 0,a0(x)=-4$ y $g(x)=12x$ son funciones continuas en δ, por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden concluimos que la

función $y(x)=3e2x+e-2x-3x$ es única.

Al haber aumentado el orden de las ecuaciones diferenciales aparece un nuevo problema que estudiaremos a continuación.

3.2.- Definición de ecuación diferencial de orden n

Ecuaciones diferenciales lineales de orden *n*

Llamamos ecuación diferencial lineal de orden *n* a:

$$a_n(x)\,y^{(n} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1} + \ldots + a_2(x)\,y'' + a_1(x)y' + a_0(x)\,y = f(x)$$

Donde $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$,... $a_1(x)$, $a_0(x)$, $f(x)$ son funciones reales y continuas en un cierto intervalo (a, b)

Para que la ecuación diferencial sea de orden n, $a_n(x)\neq 0$, dividiendo toda la ecuación por este término la podemos poner de la siguiente forma:

$$y^{(n} + b_{n-1}(x)\,y^{(n-1} + \ldots + b_2(x)\,y'' + b_1(x)y' + b_0(x)\,y = g(x) \begin{cases} b_{n-1}(x) = \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \\ . \\ . \\ . \\ b_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_n(x)} \\ g(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

Si $g(x)\neq 0$, la la ecuación se denomina **completa** y si $g(x)=0$, **homogénea**

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden *n*

Sea

$$y^{(n} + b_{n-1}\, y^{(n-1} + \ldots + b_2\, y'' + b_1 y' + b_0\, y = 0$$

Decimos que $y_1(x)$ es solución de la ecuación si:

$$y_1{}^{(n} + b_{n-1}\, y_1{}^{(n-1} + \ldots + b_2\, y_1'' + b_1 y_1' + b_0\, y_1 = 0,\ (*)$$

Sistema fundamental de soluciones

Llamamos sistema fundamental de soluciones a *n* soluciones de la ecuación (*) linealmente independientes.

Teorema I.- La ecuación (*) admite un sistema fundamental de soluciones.

Teorema II.-Si $\{y_1, y_2 \ldots y_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones, cualquier solución de la ecuación (*) se puede expresar de la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad C_1, C_2 \ldots C_n \in R$$

3.3.- Ecuaciones Diferenciales lineales homogéneas de orden "n" con coeficientes constantes

Al igual que pasa con los sistemas lineales de orden 1, una ODE de orden n tiene n soluciones linealmente independientes de manera que toda solución de una EDO homogénea será combinación lineal de estas soluciones. Por lo tanto, resolver la EDO consistirá en encontrar estas n funciones.

Consideramos la EDOan·y(n)(x)+an−1·y(n−1)+…+a1·y′+a0·y=0donde ai son constantes.

Ejemplo

Un ejemplo de EDO de orden n homogénea sería:y″+y=0

Entonces definimos el polinomio característico de la EDO como:an·λn+an−1·λn−1+…+a1·λ+a0=0y buscamos sus n raíces.

El polinomio característico es fácil de escribir, basta canviar y por λ y elevar al orden de derivación correspondiente.

Ejemplo

Por ejemplo, en la EDO que hemos dado antes, el polinomio característico asociado es: $\lambda 2+1=0$.

Este polinomio tiene dos raíces complejas conjugadas: $\lambda 1=i$, $\lambda 2=-i$

Entonces

- Si λ es real y simple dará lugar a la solución: $e\lambda x$
- Si λ es real de multiplicidad m dará lugar a las m soluciones:$e\lambda x, x\cdot e\lambda x, x2\cdot e\lambda x, \ldots, xm-1\cdot e\lambda x$
- Si $\lambda=a+bi$ es complejo y simple, dará lugar a dos soluciones: $eax\cos(bx), eax\sin(bx)$ (hay dos porque siempre que existe una raíz compleja su conjugada también aparece)
- Si $\lambda=a+bi$ es complejo de multiplicidad m, dará lugar a las 2m soluciones:$eax\cos(bx), x\cdot eax\cos(bx), \ldots, xm-1eax\cos(bx) eax\sin(bx), x\cdot eax\sin(bx), \ldots, xm-1eax\sin(bx)$

Entonces, encontradas estas n soluciones, la solución general de la EDO será una combinación lineal de estas n soluciones.

Ejemplo

Retomemos el ejemplo del principio. Como nuestro polinomio tenía por raíces dos complejos conjudados (simples) estamos en el caso 3. Por lo tanto la solución es:$y(x)=c1\cdot\cos x+c2\cdot\sin x$donde las constantes se determinarán con las condiciones iniciales (en caso de tenerlas).

3.4.- Terminología y estructura operacional.

Una ecuación diferencial es una ecuación que incluye expresiones o términos que involucran a una función matemática incógnita y sus derivadas. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

$Y'=2xy+1$

La notación (´) prima se usa para denotar el numero de la derivada siendo esta usada hasta tres prima (´´´) de ahí en delante se utiliza notación numérica (Y)

La anterior es una ecuación diferencial ordinaria, donde (Y) representa una función no especificada de la variable independiente (X), es decir

$Y' = dy/dx$

Es la derivada de Y con respecto a X.

$(d^2 x)/(dt^2) + 16x = 0$

Una ecuación diferencial puede escribirse en diferentes notaciones para las derivadas. Se ejemplifican las notaciones para primera, segunda y tercera derivada: Notación de

Notación de Liebnitz:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$$

Notación de Lagrange:

$$f'(x), f''(x), f'''(x)$$

Nótación de Cauchy ó Jacobi:

$$D_x f, D_x^2 f, D_x^3$$

Notación de Newton:

$$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$$

La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en determinar la función que al derivarse cumpla una determinada ecuación diferencial. Existen métodos específicos para la solución de las ecuaciones diferenciales de acuerdo con su clasificación, por lo que de inicio es importante identificar a las ecuaciones diferenciales de acuerdo con su clasificación.

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. En las matemáticas aplicadas, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio y la ecuación define la relación entre ellas. Como estas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en diversas disciplinas, incluyendo la ingeniería, la física, la química, la economía y la biología.

En las aplicaciones de las matemáticas, a menudo surgen problemas en los que se desconoce la dependencia de un parámetro con respecto a otro, pero es posible escribir una expresión para la tasa de cambio de un parámetro en relación con otro (derivada). En este caso, el problema se reduce a encontrar una función por su derivada relacionada con algunas otras expresiones.

En las matemáticas puras, las ecuaciones diferenciales se estudian desde perspectivas diferentes, la mayoría concernientes al conjunto de las soluciones de las funciones que satisfacen la ecuación. Solo las ecuaciones diferenciales más simples se pueden resolver mediante fórmulas explícitas; sin embargo, se pueden determinar algunas propiedades de las soluciones de una cierta ecuación diferencial sin hallar su forma exacta.

Si la solución exacta no puede hallarse, esta puede obtenerse numéricamente, mediante una aproximación usando computadoras. La teoría de sistemas dinámicos hace énfasis en el análisis cualitativo de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, mientras que muchos métodos numéricos han sido desarrollados para determinar soluciones con cierto grado de exactitud.

Las ecuaciones diferenciales aparecieron por primera vez en los trabajos de cálculo de Newton y Leibniz. En 1671, en el Capítulo 2 de su trabajo *Método de las fluxiones y series infinitas*,[1] Isaac Newton hizo una lista de tres clases de ecuaciones diferenciales:

Resolvió estas ecuaciones y otras usando series infinitas y discutió la no unicidad de las soluciones.

Jakob Bernoulli propuso la ecuación diferencial de Bernoulli en 1695. Esta es una ecuación diferencial ordinaria de la forma

para la que luego, en los siguientes años, Leibniz obtuvo sus soluciones mediante simplificaciones.

Una ecuación diferencial ordinaria (*EDO*) es una ecuación que contiene una función de una variable independiente y sus derivadas. El término *ordinaria* se usa en contraste con la ecuación en derivadas parciales, la cual puede ser respecto a *más de* una variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales lineales, las cuales tienen soluciones que pueden sumarse y ser multiplicadas por coeficientes, están bien definidas y comprendidas, y tienen soluciones exactas que pueden hallarse. En contraste, las EDOs cuyas soluciones no pueden sumarse son no lineales, y su solución es más intrincada, y muy pocas veces pueden hallarse en forma exacta de funciones elementales: las soluciones suelen obtenerse en forma de series o forma integral. Los métodos numéricos y gráficos para EDOs pueden realizarse manualmente o mediante computadoras, se pueden aproximar las soluciones de las EDOs y su resultado puede ser muy útil, muchas veces suficientes como para prescindir de la solución exacta y analítica.

Una ecuación en derivadas parciales (*EDP*) es una ecuación diferencial que contiene una función multivariable y sus derivadas parciales. Estas ecuaciones se utilizan para formular problemas que involucran funciones de varias variables, y pueden resolverse manualmente, para crear una simulación por computadora.

Las EDPs se pueden usar para describir una amplia variedad de fenómenos tal como el sonido, el calor, la electroestática, la electrodinámica, la fluidodinámica, la elasticidad, o la mecánica cuántica. Estos distintos fenómenos físicos se pueden formalizar en términos de EDPs. Con ecuaciones diferenciales ordinarias es muy común realizar modelos unidimensionales de sistemas dinámicos, y las ecuaciones diferenciales parciales se pueden utilizar para modelos de sistemas multidimensionales. Las EDPs tienen una generalización en las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas.

Una ecuación diferencial es *lineal* cuando sus soluciones pueden obtenerse a partir de combinaciones lineales de otras soluciones. Si es lineal, la ecuación diferencial tiene sus derivadas con máxima potencia de 1 y no existen términos en donde haya productos entre la función desconocida y/o sus derivadas. La propiedad característica de las ecuaciones lineales es que sus soluciones tienen la forma de un subespacio afín de un espacio de soluciones apropiados, cuyo resultado se desarrolla en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales.

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son una subclase de las ecuaciones diferenciales lineales para la cual el espacio de soluciones es un subespacio lineal, es decir, la suma de cualquier conjunto de soluciones o múltiplos de soluciones es también una solución. Los coeficientes de la función desconocida, y sus derivadas en una ecuación diferencial lineal pueden ser funciones de la variable o variables independientes, si estos coeficientes son constantes, entonces se habla de *ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes*.

Se dice que una ecuación es lineal si tiene la forma:

Existen muy pocos métodos para resolver ecuaciones diferenciales no lineales en forma exacta; aquellas que se conocen es muy común que dependan de la ecuación teniendo simetrías particulares. Las ecuaciones diferenciales no lineales pueden exhibir un comportamiento muy complicado en intervalos grandes de tiempo, característica del caos. Cada una de las cuestiones fundamentales de la existencia, unicidad, y extendibilidad de las soluciones para ecuaciones diferenciales no lineales, y el problema bien definido de los problemas de condiciones iniciales y de contorno para EDPs no lineales son problemas difíciles y su resolución en casos especiales se considera que es un avance significativo en la teoría matemática (por ejemplo la existencia y suavidad de Navier-Stokes). Sin embargo, si la ecuación diferencial es una representación de un proceso físico significativo formulado correctamente, entonces se espera tener una solución. [11]

Las ecuaciones diferenciales no lineales suelen aparecer por medio de aproximaciones a ecuaciones lineales. Estas aproximaciones son válidas únicamente bajo condiciones restringidas. Por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico es una aproximación de la ecuación no lineal de un péndulo que es válida para pequeñas amplitudes de oscilación

3.5.- Principio de superposición.

El **principio de superposición** o **teorema de superposición** es una herramienta matemática que permite descomponer un problema lineal o de otro tipo en dos o más subproblemas más sencillos, de tal manera que el problema original se obtiene como "superposición" o "suma" de estos subproblemas más sencillos.

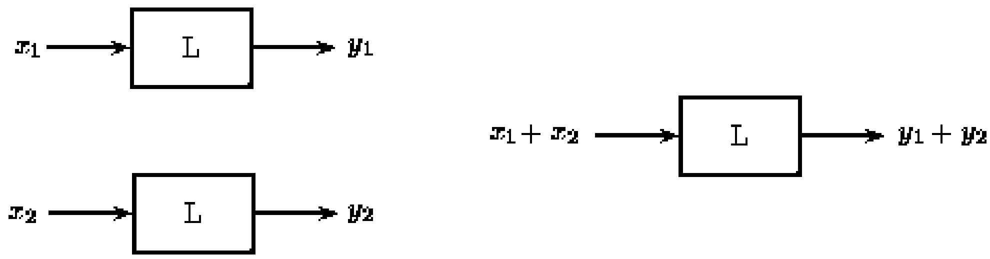
Técnicamente, el principio de superposición afirma que cuando las ecuaciones de comportamiento que rigen un problema físico son lineales, entonces el resultado de una medida o la solución de un problema práctico relacionado con una magnitud extensiva asociada al fenómeno, cuando están presentes los conjuntos de factores causantes A y B, puede obtenerse como la suma de los efectos de A más los efectos de B.

Propiedades a cumplir [editar]

Artículos principales: Aplicación lineal, No linealidad *y* Sistema LTI.

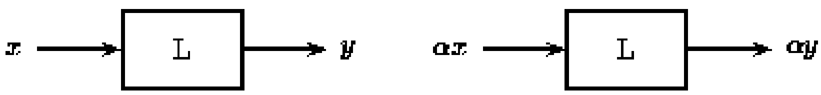
En matemáticas una función lineal es aquella que satisface las siguientes propiedades:

- Aditividad: $f(x+y) = f(x) + f(y)$



- Homogeneidad/Proporcionalidad: $f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x)$

Si



Cualquier sistema físico, modelo científico o problema matemático caracterizado por funciones lineales que satisfacen las condiciones anteriores es susceptible de ser tratado parcialmente mediante el principio de superposición.

Ejemplos

Teorema de superposición en electrónica

En el teorema de superposición en teoría de circuitos se establece que la tensión entre dos nodos de un circuito o la corriente que atraviesa una rama es igual a la suma de las tensiones o de las corrientes producidas por cada uno de los generadores de tensión y de los generadores de corriente del circuito. En cada uno de los cálculos parciales, se conserva uno solo de los generadores y se remplazan los otros generadores de tensión por cortocircuitos y los otros generadores de corriente por circuitos abiertos.

Campos de fuerzas en mecánica newtoniana

En mecánica newtoniana el laplaciano del campo gravitatorio es proporcional a la densidad de masa; eso hace que la igualdad de distribución y a distancias idénticas el campo sea proporcional a la densidad de masa (sin embargo, en teoría de la relatividad general, el campo gravitatorio viene descrito en términos de ecuaciones diferenciales no lineales).

Otro ejemplo lo constituyen los campos electrostático y magnetostático, que tanto en mecánica clásica como en teoría de la relatividad resultan lineales; es decir, el potencial eléctrico y el potencial vector, fijada una distribución de cargas, es proporcional al valor de estas.

Problemas en mecánica de sólidos

Las ecuaciones de equilibrio de un sólido resistente que relacionan las fuerzas exteriores sobre un sólido con las tensiones internas son lineales; eso significa que para cualquier sólido que no plastifique, si se duplica el valor de las fuerzas se duplicará el valor de las tensiones.

Eso sucede con independencia de la ecuación constitutiva del material, sea este o no elástico, siempre y cuando el estado final no dependa del modo de aplicación de las cargas. En problemas de plasticidad esta condición no se cumple en general, ya que el estado final depende de la "trayectoria" que siga el estado tensional; es decir, del modo, orden y velocidad con la que se aplican las cargas.

Problemas en teoría de la elasticidad lineal

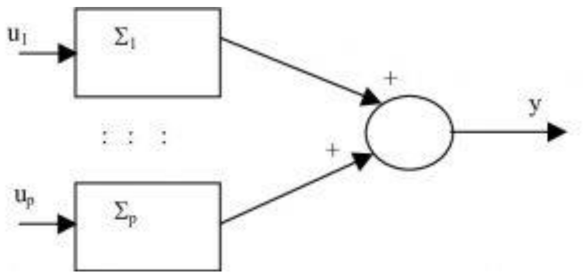
Para un amplio rango de tensiones y deformaciones, en los materiales elásticos la tensión es proporcional a la deformación (es decir, que las componentes de los tensores de deformación y tensión están relacionadas linealmente).

Si, además, las fuerzas sobre los cuerpos son moderadas y las deformaciones resultan pequeñas (del orden del 10^{-2} o 10^{-3}), que es el rango de "deformaciones infinitesimales", entonces los desplazamientos de los puntos del sólido resultan, salvo por un movimiento de sólido rígido, casi-proporcionales a las deformaciones. Este último hecho se usa comúnmente en la resolución de problemas prácticos en ingeniería, donde se usa muy extensivamente el principio de superposición en términos de fuerzas y desplazamientos.

El **principio de superposición** es una idea general en la física donde un sistema se encuentra en todos los estados posibles al mismo tiempo. Una vez que se mide, cae a uno de los estados base en los que se forman la superposición, destruyendo la configuración original. Es a través de esta ley que se explica la rareza cuántica observada a través de muchos experimentos de la física moderna.

Mediante la doctrina de superposición, se explican algunos supuestos de la física y las leyes que determinan el funcionamiento del universo. Tal es el caso de la doble rendija. Cuando hay dos rendijas en una barrera que permiten el paso de los electrones, se encontrará un patrón de interferencia no predicho por la mecánica clásica.

A través de los procesos de la superposición es que se explican los procesos de interacción física detrás de la aparición de franjas oscuras y brillantes registradas en los detectores de la salida de los interferómetros ópticos. Del mismo modo, es a través de dicho principio donde se establece una función que se puede ampliar como una combinación lineal de los estados propios normalizados. Siempre que sea un operador en particular que constituyen una base del espacio ocupado.



Si quieres saber más sobre el **Principio de superposición y cuál es su aplicación**, te invitamos a que te quedes hasta el final del artículo. A continuación, explicaremos en detalle para que todos puedan entender en qué se basa la superposición y cómo afecta a la física en general. ¿Te interesa? ¡Acompáñanos!

¿Qué es el Principio de superposición?

El Principio de superposición, como se ha mencionado anteriormente, es una idea aplicada en la física que establece dos preceptos importantes: Cuando dos o más ondas del mismo tipo se interceptan en algún punto, el desplazamiento resultante en ese punto es igual a la suma de los desplazamientos. Esto debido a cada onda individual.

También se puede definir como un sistema, o función, que **responde a la entrada y salida de sistemas lineales**. La respuesta neta es causada por dos o más estímulos, siendo la suma de las respuestas que habría sido causada por cada estímulo individualmente.

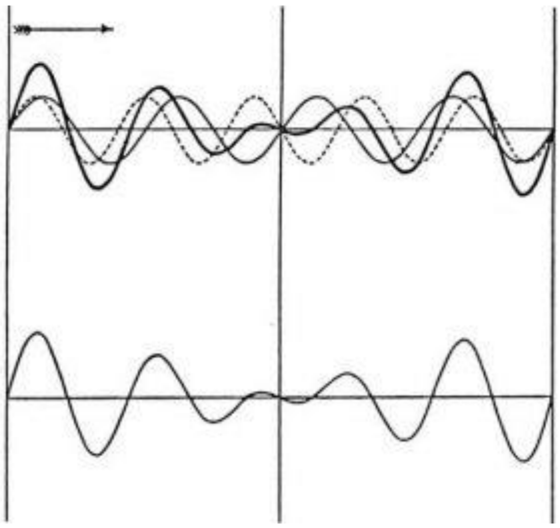
Gracias al principio de superposición se puede afirmar que cualquier sistema, o función, que respete el principio dicho anteriormente, es un sistema lineal. Y, también, el principio de superposición se aplica a todos los sistemas lineales y funciones. Para tener una visión más amplia, es importante entender que el sistema se define como lineal si cumple una serie de propiedades.

Características del principio de superposición

En el principio de superposición se establece que los **desplazamientos se suman vectorialmente**. Sin embargo, las vibraciones y las oscilaciones ocurren dentro de un plano individualmente, así que dichos desplazamientos se agregan algebraicamente. Solo hay que incluir los signo de más, dividir y menos.

Otra característica importante del principio es que el comportamiento depende de las líneas del medio. Una vez que pasan por las ondas o cuando las partes del medio poseen un doble desplazamientos. Es cuando este tendrá el doble de fuerza de restauración. En el caso de amplitudes más grandes, se suele romper obteniendo armónicos.

En el caso de las ideas y el lenguaje que se transfieran a ondas electromagnéticas, no habrá desplazamiento mecánicos del medio. Y, cuando las olas pasan más allá de ese punto de intersección, separando nuevamente las olas que no cambian por completo. A menos que el medio se haya estirado demasiado.



Una vez que se produzca lo que establece el principio de superposición, las ondas mecánicas lentas se observarán en amplitud. Para ondas que ocurran con mayor frecuencia, como el sonido de las ondas, la intensidad se medirá a través de la **energía que es proporcional**.

¿Dónde se puede visualizar la superposición?

En general, la superposición se puede ver en cosas mundanas y comunes. Tal es el caso de las **ondas en los charcos**, ondas de las cuerdas y los auriculares con cancelación del ruido. Cada una de estas cosas muestra una superposición. Una vez que las olas se encuentran, se superponen e interactúan entre sí.

De esta forma se suman más ondas pequeñas hasta que se logre a formar más grande, o cancelándose entre sí. Los dos actos mencionados anteriormente pueden ocurrir al mismo tiempo y ser una combinación de ambos. Los auriculares con cancelación de ruido, escucharán el ruido constante y de su alrededor. Reproduciendo exactamente el sonido opuesto para cancelar los ruidos molestos. Uno de estos ruidos molestos son los motores de los aviones, por no nombrar alguno.

Superposición de las ondas

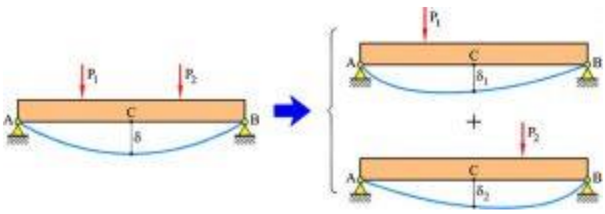
Cada vez que dos ondas se superponen entre sí, dependerá en cuál fase en el punto de cruce para dar una interferencia constructiva. También si se encuentran en antifaces en el punto de cruce, para dar interferencia destructiva.

La superposición ocurre en un instante en el tiempo y solo en una ubicación. La amplitud es el mayor del desplazamiento en una sola ubicación. Para visualizarlo mejor, hay que ver un **patrón de interferencia fijo o estacionarlo**, viendo la amplitud en cualquier punto constante. Mientras que el desplazamiento variará continuamente.

Principio de superposición en la cuántica

En un ámbito más confuso, la superposición y el principio en general, pueden significar algo completamente diferente a lo establecido anteriormente. La superposición cuando ocurre a una **escala cuántica**, las partículas también se pueden considerar como unas ondas que se superponen entre sí. Dichas partículas existen en diferentes estados y estar en diferentes posiciones. Asimismo, es normal que las partículas posean diferentes energías o moverse a un grupo desigual de velocidades.

La mecánica cuántica es extraña, así en lugar de pensar en que una partícula se encuentra en un estado en específico o cambiando en varios estados, lo mejor, y lo establecido por los científicos es que estos se encuentran en todos los estados conocidos al mismo tiempo. Tal análisis y evaluación de las partículas hace suponer que se aplique el principio, donde las olas se superponen entre sí.



La situación descrita se conoce como **superposición de los estados**. Si se piensa en términos de partículas, significa que una partícula puede estar en dos lugares al mismo tiempo. Aunque no tena un sentido intuitivo, es una de las extrañas realidades que se pueden observar en el mundo de la física cuántica.

3.6.- Raíces reales distintas.

Si x es un número positivo o igual a cero, entonces la **raíz** será un número **real**, pero **si** x es un número negativo, la **raíz** sera un número completo. El resultado de la **raíz** es un número complejo.

Aunque, ¿cuáles son las raíces reales?

Las **raíces** de un polinomio pueden ser **reales** o complejas. En la gráfica de la función polinomial se identifican las **raíces reales** como las intersecciones con el eje x (aquellos valores en que la función vale cero). Ejemplo. ... Con lo cual se comprueba que 4, −1, 2 y 3 sí son **raíces** del polinomio.

En la misma linea, ¿cómo saber cuántas raíces complejas tiene un polinomio?

Para conocer si un **polinomio** tiene **raíces complejas** y sus correspondientes conjugadas basta examinar el cambio de signo de los coeficientes en sucesivas iteraciones, a partir, por ejemplo, de la segunda.

Ahora, ¿cómo saber si un número es raíz de un polinomio?

RAÍCES DE UN **POLINOMIO**: **Se** dice **que** un valor x = a es **raíz de un polinomio** P(x), **cuando** al sustituir dicho valor en el **polinomio**, el resultado es 0; es decir, **cuando** P(a) = 0. Las raíces de un **polinomio**, también **se** llaman ceros del **polinomio**.

La fórmula de la ecuación de segundo grado tiene una raíz cuadrada, por lo que la naturaleza de las raíces viene determinada por el radicando **$b^2 – 4ac$**, que se se llama discriminante.

A qué llamamos Discriminante de un polinomio

Es una condición que han de satisfacer los coeficientes de un polinomio, para que éste tenga raíces múltiples. Así el discriminante del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ (ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$) se simboliza por la letra griega delta **Δ**, y vale $\Delta = b^2 – 4ac$.

Según el valor del **dicriminante $\Delta = b^2 – 4ac$** sea mayor, igual o menor que cero se verifica:

- Si $\Delta = b^2 – 4ac > 0$ entonces hay dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = b^2 – 4ac = 0$ entonces hay una raíz doble (dos raíces reales iguales).
- Si $\Delta = b^2 – 4ac < 0$ entonces no hay raíces reales (dos raíces imaginarias conjugadas).

Ejemplo 1: Dada la ecuación $2x^2 - 3x + k + 2 = 0$, determina el valor de **k** para que las raíces (soluciones) sean iguales.

Tenemos $a = 2$; $b = -3$; $c = k + 2$;

Para que las soluciones sean iguales el discriminante ha de ser CERO: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, sustituyendo los valores =>

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 8 \cdot (k + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 8k - 16 = 0 \Rightarrow -8k - 7 = 0 \Rightarrow -8k = 7 \Rightarrow k = -7/8$

Si **k** $= -7/8$ las dos raíces son iguales (una raíz doble).

Ejemplo 2: Dada la ecuación $4x^2 - kx + 2k - 7 = 0$, estudiar sus soluciones según los valores de **k**

Tenemos $a = 4$; $b = -k$; $c = 2k - 7$.

Para ello, hallamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4 \cdot 4(2k - 7) = k^2 - 16(2k - 7) = k^2 - 32k + 112$

Este **discriminante** a su vez es una ecuación de segundo grado en **k**; debemos encontrar los valores de **k** que la hacen menor, igual o mayor que CERO.

Se hallan resolviendo la ecuación de segundo grado: $k^2 - 32k + 112 = 0$, => los coeficientes son $a = 1$; $b = -32$; $c = 112$

Puesto que el coeficiente **b** es par y un número no pequeño utilizamos la fórmula mitad: **b´** $= -32/2 = -16$:

$$k = -(-16) \pm \sqrt{256 - 112} = 16 \pm \sqrt{144} = 16 \pm 12 \Rightarrow \begin{cases} 28 \\ 4 \end{cases}$$

Por tanto la descomposición factorial es: $k^2 - 32k + 112 = (k - 4)(k - 28)$

Si ponemos las raíces entre $(-\infty, \infty)$ en orden creciente $-\infty \quad 4 \quad 28 \quad \infty$ obtenemos los intervalos $(-\infty, 4)$, $(4, 28)$ y $(28, \infty)$

Dando un valor cualquiera a **k** dentro de cada intervalo en la ecuación $k^2 - 32k + 112 = (k - 4)(k - 28)$ obtenemos un valor positivo o negativo en ese intervalo, que nos determina la naturaleza de las raíces.

En el intervalo $(-\infty, 4)$ damos el valor **k** $= 0 \Rightarrow k^2 - 32k + 112 = 112 > 0$ (positivo)
En $(4, 28)$ damos el valor **k** $= 10 \Rightarrow k^2 - 32k + 112 = 100 - 320 + 112 = -108 < 0$ (negativo)
En $(28, \infty)$ hacemos **k** $= 30 \Rightarrow 900 - 960 + 112 = 52 > 0$ (positivo)

Por tanto si **k** €(– ∞, 4) o **k** € (28, ∞) => **Δ** = $b^2 - 4ac > 0$ => Dos soluciones reales distintas
Si **k** = 4 ó **k** = 28 => **Δ** = 0 => Dos raíces reales iguales (una raíz real doble).
Si **k** € (4, 28) => el discriminante **Δ** < 0 => No hay soluciones reales (hay dos soluciones imaginarias conjugadas).

3.7.- Raíces reales repetidas.

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x. Cuando la raíz se repite como por ejemplo en $x^2=0$, la raíz x=0 se repite. Gráficamente las raíces múltiples se pueden ver cuando la curva toca en forma tangencial al eje x. Las raíces múltiples se repiten un número par de veces cuando la función no cambia de signo, y un número impar de veces cuando la función cambia de signo.

Su estructura es muy similar a la de Newton-Raphson, pero se requiere la segunda derivada y puede operar cuando la derivada es cero, inclusive, la hace más efectiva.

En este método partimos de la ecuación que tenemos para Newton-Raphson y nuestra función ya no será f(x)=0 sino que será u(x)=0, siendo u(x)=f(x) / f'(x).

Teniendo u(x) como nuestra nueva función, sacamos su derivada así:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$u'(x) = \frac{f'(x) \times f'(x) - f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$$

Metemos nuestra función y su derivada a la ecuación de Newton-Raphson de esta manera:

$$g(x) = x - \frac{\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{\left(\frac{[f'(x)]^2 - f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}\right)}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x) \times f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) \times f''(x)}$$

Lo escribimos ahora de forma general para obtener la ecuación de Newton modificado o raíces múltiples con “x_{n+1}” como la nueva mejor aproximación a la raíz y con “x_n” como nuestro punto de partida. La ecuación queda de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \times f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n) \times f''(x_n)}$$

Pasos a seguir para utilizar el método de Newton modificado o raíces múltiples:

- A partir de la función f(x)=0 que se necesita solucionar, se realiza la derivada para hallar la recta tangente al punto de partida que escogimos. Con f(x) y f’(x) obtenemos u(x) y haciendo al derivada de u(x) hallamos la recta tangente a nuestro punto de partida en u(x).
- La recta tangente cortará en algún punto con el eje x y ese será nuestra nueva aproximación. Se repite el proceso anterior desde la imagen de este punto hasta que se encuentre la solución o se cumpla alguno de los criterios de parada.

Ventajas del método de Newton modificado o raíces múltiples:

- Es de convergencia cuadrática.
- No necesita de un intervalo para trabajar.
- Se usan menos operaciones aritméticas.

Desventajas del método de Newton modificado o raíces múltiples:

- El método no siempre converge.
- La derivada debe ser ingresada por el usuario y éste puede no conocerla.
- Necesita de dos derivadas, lo que puede presentar problemas para el usuario.

llegaremos a una solución, que es = Cuando las raíces de la

+ *(b a)m* + c = 0 son iguales, el discriminante de los tiene que ser cero. De acuerdo con la formula cuadrática, la raíz debe ser = *-(b*

Podemos formar ahora una segunda solución, empleando (5) de la sección 4.2. Primero escribimos la ecuación de Cauchy-Euler en la forma

e identificamos = e = x. Así

. = *(b*

=

Entonces, la solución general es

y = + x

Ecuación de Cauchy-Euler: raíces repetidas Resuelva + + y 0

S O L U C I Ó N La sustitución y = da

cuando + *4m* + 1 = 0, o (2m + = 0. Como la solución general es

y = + x. n

Para las ecuaciones de orden superior se puede demostrar que si es raíz de multiplicidad

k, entonces

x, . .

son *k* soluciones linealmente independientes. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de esas *k* soluciones.

CASO raíces complejas conjugadas Si las raíces de (1) son el par conjugado =

+ donde y 0 son reales, una solución es

y = +

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, conviene formular la solución en términos de funciones reales. Vemos la identidad

Sección 4.7 Ecuación de Cauchy-Euler

que, según la fórmula de Euler, es lo mismo que

= lnx) + lnx).

De igual manera, = x) x).

Sumamos y restamos los últimos dos resultados para obtener

+ = 2 x) y *2i* sen@ x),

respectivamente. Basándonos en = + es una solución para todos los valores de las constantes vemos, a la vez, para = = I y = I, = -I, que

Y

o bien = x) = x)

también son soluciones. Como In x)) 0, 0 en el intervalo (0, llegamos a la conclusión

= x) y = x)

forman un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial; por lo tanto, la solución general es

x) + x)]. *(4)*

Un problema de valores iniciales Resuelva el problema de valor inicial

S O L U C I Ó N Tenemos que

cuando *2m* + 3 0. Aplicamos la fórmula cuadrática y vemos que = -1 + y -1 Si identificamos -1 y de acuerdo con la solución general de la ecuación diferencial es

y = x) + x)].

Al aplicar las condiciones 1, y'(l) -5 a la solución anterior, resulta que 1 y = 2 Así, la solución al problema de valores iniciales es

y = 4.5

A continuación mostraremos un ejemplo de solución de una ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden.

Ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden

SOLUCIÓN Las primeras tres derivadas dey = son

así que la ecuación diferencial del problema se transforma en

+ 2) + + + 2) + 1) 8)

+ 4m + 8) = + + 4) = 0.

En este caso vemos que = será una solución de la ecuación cuando -2, = y = En consecuencia, la solución general es

y = + x) + x). n

Dado que el método de los coeficientes indeterminados se puede aplicar a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, no es aplicable directamente a una ecuación no homogénea de Cauchy-Euler.

Método de variación de parámetros Resuelva la ecuación no homogénea

+ =

Sustituimos y = y llegamos a la ecuación auxiliar

Entonces = +

Antes de emplear variación de parámetros para encontrar una solución particular = + recordemos que las fórmulas = y (donde y son los determinantes definidos en la pagina 164) se dedujeron la hipótesis de que la ecuación diferencial se había puesto en la forma reducida, y'' + + por consiguiente, dividiremos la ecuación dada entre y, de

= Entonces, con x, y 0 **0 = =** *I 3x2* **2 x 3 ,** *,* = = encontramos Y **2x3**

La integral de la última función es inmediata; pero en el caso de integraremos dos veces por partes. Los resultados son + y por consiguiente,

= = + + =

Por ultimo, llegamos ay + + + n

la semejanza entre las formas de las soluciones a las ecuaciones de Cauchy-Euler y a **las ecuaciones lineales con coeficientes constantes no es mera coincidencia; por ejemplo, cuando las raíces de las ecuaciones auxiliares de ay'' + + o y + bxy' + = 0 son distintas y reales, las soluciones generales respectivas son**

y y

En vista de la identidad 0, la segunda solución de (5) se puede expresar en la misma forma que la primera:

donde = Este último resultado ilustra otro hecho matemático: toda ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir en la forma de una ecuación lineal con coeficientes constantes, mediante la sustitución x La idea es resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable siguiendo los métodos de las secciones anteriores, y una vez obtenido la solución general, restituir = x. Dado que con este procedimiento se repasa muy bien la regla de la cadena para diferenciación, se recomienda no dejar de resolver los problemas 35 a en los ejercicios 4.7.

En los problemas 1 a 22 resuelva la ecuación diferencial respectiva.

1. 2y = 0 3. xy'' + y' = 0 5. + xy' + 4y = 0 7. 2y = 0 9. + + y = 0 ll. + 5xy' + 4y = 0 13. xy' + 2y = 0 15. + + y = 0 17. = 0 2. + = 0y 4. xy'' y' = 0 6. + + = 0 8. + 4y = 0 10. + 4xy' = 0y + = 0 14. 7xy' + 41y = 0 16. + xy' + y = 0 18. + xy' = 0y 19. 20. 21. 22.

En los problemas 23 a 26 resuelva cada ecuación diferencial, sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

23. + = 0, = 0, y'(l) = 4

24. + = 0, = 32, = 0 25. + xy' + y y(l) = 1, y'(l) = 2

26. + = 0, = 5, y'(l) = 3

En los problemas 27 y 28 resuelva la ecuación diferencial respectiva sujeta a las condiciones iniciales indicadas. [Sugerencia: sea

27. + =y 0 , = = 4

Sección 4.8 Sistemas de ecuaciones lineales 177 Resuelva los problemas 29 a 34 por el método de variación de parámetros.

29. xy'' + y' = 30. =

31. + + y = 32. + = 33. xy' + y = 2x 34. + = x

En los problemas 35 a 40 use la sustitución = para transformar la ecuación respectiva de Cauchy-Euler en una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Resuelva la ecuación original a través de la nueva ecuación mediante los procedimientos de las secciones 4.4 y 4.5.

35. 37. 38. 39. 40. 36. + = **= 4 3x 3y = 1 + 2x + + 2oy =**

Problema *para discusión*

41. El valor del primer coeficiente, de toda ecuación de Cauchy-Euler es cero cuando

= 0. Se dice que **0 es un punto singular** de la ecuación diferencial (véase 6.2). Un punto singular es potencialmente problemático porque las soluciones de la ecuación diferencial *pueden* llegar a ser no acotadas o presentar algún comportamiento peculiar cerca del punto. Describa la naturaleza de los pares de raíces y de la ecuación auxiliar de (1) en cada uno de los siguientes casos: 1) reales distintas (por ejemplo, positiva y positiva); 2) reales repetidas, y 3) complejas conjugadas.

Determine las soluciones correspondientes y, con una calculadora graficadora o graficador, trace 'esas soluciones.

3.8.- Raíces complejas distintas.

El teorema fundamental del Álgebra nos asegura que cualquier polinomio con coeficientes de número real puede factorizarse completamente sobre el campo de los números complejos .

En el caso de los polinomios cuadráticos , las raíces son complejas cuando el discriminante es negativo.

Ejemplo 1:

Factorice completamente, usando números complejos.

$$x^3 + 10x^2 + 169x$$

Primero, factorice una *x* .

$$x^3 + 10x^2 + 169x = x(x^2 + 10x + 169)$$

Ahora use la fórmula cuadrática para la expresión dentro del paréntesis, para encontrar los valores de *x* para los cuales $x^2 + 10x + 169 = 0$.

Aquí *a* = 1, *b* = 10 y *c* =169.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(169)}}{2(1)} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 676}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{2} \end{aligned}$$

Escriba la raíz cuadrada usando números imaginarios.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-10 \pm 24i}{2} \\
&= -5 \pm 12i
\end{aligned}
$$

Ahora sabemos que los valores de *x* para los cuales la expresión

$$x^2 + 10x + 169$$

es igual a 0 son $x = -5 + 12i$ y $-5 - 12i$.

Así, el polinomio original puede factorizarse como

$$x^3 + 10x^2 + 169x = x(x - (-5 + 12i))(x - (-5 - 12i))$$

Puede verificar esto usando el FOIL .

Algunas veces, puede factorizar un polinomio usando números complejos sin usar la fórmula cuadrática. Por ejemplo, la regla de la diferencia de cuadrados :

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Esto también puede ser usado con números complejos cuando a^2 es negativa, como sigue:

$$x^2 + 25 = (x + 5i)(x - 5i)$$

El número de raíces en un polinomio es igual al grado de ese polinomio. Por ejemplo, en los polinomios cuadráticos, siempre tendremos dos raíces contadas por multiplicidad. Estas raíces podrían ser reales o complejas dependiendo en el determinante de la ecuación cuadrática.

A continuación, aprenderemos sobre el teorema fundamental del álgebra y el teorema de raíces conjugadas. Usaremos estos teoremas para aprender sobre las raíces complejas de un polinomio. Además, veremos algunos ejemplos para aprender a obtener las raíces complejas de un polinomio cuadrático usando la fórmula cuadrática.

¿Cómo saber cuántas raíces complejas tiene un polinomio?

Para determinar cuántas raíces complejas tiene un polinomio, tenemos que usar el teorema fundamental del álgebra. Este teorema nos dice que:

Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado *n* con coeficientes complejos tiene, contado con multiplicidad, exactamente *n* raíces.

La parte “contado con multiplicidad” significa que debemos contar a las raíces por su multiplicidad, es decir, por las veces que se repiten. Por ejemplo, en la ecuación , tenemos un polinomio de grado cuatro.

Sin embargo, solo podemos contar dos raíces reales. Esto se debe a que la raíz en es una raíz múltiple con multiplicidad de tres. Entonces, el número total de raíces, cuando contando con multiplicidad, es cuatro.

Raíces complejas de un polinomio cuadrático

Primero, empecemos considerando el teorema de raíces conjugadas:

Teorema de raíces conjugadas

Tenemos que es un polinomio con coeficientes complejos. Si es que el número complejo es una raíz del polinomio *p*, entonces, su conjugado también es una raíz.

Del teorema fundamental del cálculo, sabemos que cualquier ecuación cuadrática tendrá dos raíces. Y del teorema de raíces conjugadas, sabemos que si es que el polinomio tiene coeficientes reales y si es que no tiene raíces reales, entonces, sus raíces serán un par de conjugados complejos.

Si es que tiene raíces reales, puede o bien tener dos raíces reales distintas o una raíz real repetida. No es posible tener una raíz conjugada y una raíz real. Para distinguir entre estos casos diferentes, tenemos el concepto de la discriminante

Discriminante

El discriminante de una ecuación cuadrática es definido como . Muchas veces, es usado para denotar a la discriminante.

3.9.- Raíces complejas repetidas.

Las raíces complejas conjugadas de un polinomio son aquellas raíces complejas que son conjugadas la una de la otra. Recordemos que los conjugados son dos números complejos que tienen la misma parte real y tienen a la parte negativa con un signo diferente la una de la otra. A continuación, haremos una revisión de los números complejos conjugados. También, conoceremos el teorema de raíces conjugadas de un polinomio. Finalmente, veremos varios ejercicios de raíces complejas conjugadas para mirar la aplicación de este teorema.
Las raíces complejas conjugadas pueden ser descritas usando el teorema de raíces conjugadas:

Teorema de raíces conjugadas

Si es que el número complejo es una raíz del polinomio en una variable con coeficientes reales, entonces, el conjugado complejo también es una raíz de ese polinomio.
Este teorema resulta muy útil para encontrar raíces de polinomios. Por ejemplo, supongamos que estamos intentando encontrar todas las raíces de un polinomio y a medida que vamos resolviendo, encontramos que es una raíz del polinomio.
Sabiendo esto, automáticamente conocemos otra raíz más. Por el teorema de raíces conjugadas, sabemos que si es que es una raíz, entonces, debe ser una raíz.
Por ejemplo, si es que encontramos que es una raíz de un polinomio, entonces, también es una raíz de ese polinomio. Este teorema nos ahorra tiempo y esfuerzo al no tener que usar un proceso adicional para encontrar esa raíz.

Raíces reales y distintas
Un polinomio cuyas raíces son reales y distintas es el caso más simple que se nos puede presentar. Volvemos a estudiar el polinomio $x^3 - 4x^2 + x + 6$, cuyas raíces como se puede comprobar fácilmente por simple sustitución son 3, 2, y -1. Creamos la tabla de las sucesivas potencias

m (2^m)	a_0	a_1	a_2	a_3
0 (1)	1.0	-4.0	1.0	6.0
1 (2)	1.0	14.0	49.0	36.0
2 (4)	1.0	98.0	1393.0	1296.0
3 (8)	1.0	6818.0	$1.6864\ 10^{6}$	$1.6796\ 10^{6}$
4 (16)	1.0	$4.3112\ 10^{7}$	$2.8212\ 10^{12}$	$2.8211\ 10^{12}$
5 (32)	1.0	$1.8553\ 10^{15}$	$7.9587\ 10^{24}$	$7.9587\ 10^{24}$
6 (64)	1.0	$3.4337\ 10^{30}$	$6.334\ 10^{49}$	$6.334\ 10^{49}$
7 (128)	1.0	$1.179\ 10^{61}$	$4.012\ 10^{99}$	$4.012\ 10^{99}$
8 (256)	1.0	$1.3901\ 10^{122}$	$1.6096\ 10^{199}$	$1.6096\ 10^{199}$

9 (512)	1.0	$1.9323\ 10^{244}$	$2.5908\ 10^{398}$	$2.5908\ 10^{398}$

Los módulos de las raíces reales, se calculan mediante la fórmula (4). Para hallar las raíces con gran exactitud tomaremos los coeficientes que figuran en la última fila, resultado de elevar el polinomio a la potencia 512.

$\log r_0=(\log(a_1)-\log(a_0))/2^m$

$\log r_0=(\log(1.9323\ 10^{244})-\log(1))/512$

r_0 sale 3

$\log r_1=(\log(a_2)-\log(a_1))/2^m$

$\log r_1=(\log(2.5908\ 10^{398})-\log(1.9323\ 10^{244}))/512$

r_1 sale 2

$\log r_2=(\log(a_3)-\log(a_2))/2^m$

$\log r_2=(\log(2.5908\ 10^{398})-\log(2.5908\ 10^{398}))/512$

r_2 sale 1

Una raíz compleja y su conjugada

Los polinomios pueden tener también raíces complejas, y sus respectivas conjugadas. El caso más simple es el del un polinomio x^2+1 que tiene una raíz compleja y su correspondiente conjugada. Sea el polinomio $x^3-7x^2+25x-39$ que tiene las siguientes raíces exactas: 3, 2-3i, 2+3i.

Examinando en la tabla los valores y los signos de los coeficientes en las sucesivas iteraciones, vemos que el segundo coeficiente a_1 cambia de signo en la tercera iteración, además el valor del coeficiente en una iteración no es aproximadamente igual al cuadrado de su valor en la siguiente iteración, sino la mitad de dicho valor, un comportamiento similar al de las raíces dobles. Al coeficiente a_1 le denominaremos coeficiente excepcional.

m (2^m)	a_0	a_1	a_2	a_3
0 (1)	1.0	-7.0	25.0	-39.0
1 (2)	1.0	-1.0	79.0	1521.0
2 (4)	1.0	-157.0	9283.0	$2.3134\ 10^{6}$
3 (8)	1.0	6083.0	$8.1259\ 10^{8}$	$5.352\ 10^{12}$
4 (16)	1.0	$-1.5882\ 10^{9}$	$5.952\ 10^{17}$	$2.8644\ 10^{25}$
5 (32)	1.0	$1.3319\ 10^{18}$	$4.4524\ 10^{35}$	$8.2048\ 10^{50}$
6 (64)	1.0	$8.8358\ 10^{35}$	$1.9606\ 10^{71}$	$6.7319\ 10^{101}$
7 (128)	1.0	$3.886\ 10^{71}$	$3.8437\ 10^{142}$	$4.5318\ 10^{203}$
8 (256)	1.0	$7.4134\ 10^{142}$	$1.4774\ 10^{285}$	$2.0537\ 10^{407}$

9 (512)	1.0	2.5411 10^{285}	2.1827 10^{570}	4.2177 10^{814}

Dos raíces complejas y sus conjugadas

Supongamos ahora el polinomio $x^5 - 4x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 10x - 52$ que tiene una raíz real 2, y dos raíces complejas y sus correspondientes conjugadas, 2+3i, 2-3i, -1+i, -1-i. Examinando la tabla vemos que los coeficientes segundo a_1 y quinto a_4 cambian de signo, y además, se comportan de modo similar al de las raíces dobles, signo inequívoco de una raíz compleja. Por tanto, el polinomio tendrá dos raíces complejas y sus respectivas conjugadas, en total cuatro raíces que es el máximo número que permite este procedimiento.

m (2^m)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0 (1)	1.0	-4.0	11.0	4.0	-10-0	-52.0
1 (2)	1.0	-6.0	133.0	652.0	516.0	2704.0
2 (4)	1.0	-230.0	2.6545 10^4	2.554 10^5	-3.2598 10^6	7.3116 10^6
3 (8)	1.0	-190.0	8.156 10^8	2.3493 10^{11}	6.8913 10^{12}	5.346 10^{13}
4 (16)	1.0	-1.6312 10^9	6.6531 10^{17}	4.3949 10^{22}	2.2371 10^{25}	2.8579 10^{27}
5 (32)	1.0	1.3301 10^{18}	4.4278 10^{35}	1.9018 10^{45}	2.4926 10^{50}	8.1678 10^{54}
6 (64)	1.0	8.8357 10^{35}	1.9605 10^{71}	3.6165 10^{90}	3.1066 10^{100}	6.6714 10^{109}
7 (128)	1.0	3.886 10^{61}	3.8437 10^{142}	1.3079 10^{181}	4.8255 10^{200}	4.4507 10^{219}
8 (256)	1.0	7.4134 10^{142}	1.4774 10^{275}	1.7107 10^{362}	1.1643 10^{401}	1.9809 10^{439}
9 (512)	1.0	2.5411 10^{285}	2.1827 10^{570}	2.9265 10^{724}	6.7774 10^{801}	3.9238 10^{878}

Denotaremos las dos raíces complejas y sus respectivas conjugadas como $u_1 \pm v_1 i$ y $u_2 \pm v_2 i$.
Conocidos u_1 y u_2 se calcula v_1 y v_2 mediante las fórmulas

$$v_1 = \sqrt{r_1^2 - u_1^2} \qquad v_2 = \sqrt{r_2^2 - u_2^2}$$

Para determinar u_1 y u_2 se emplean las siguientes fórmulas

$$u_1 + u_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\text{coeficiente de } x^{n-1} + \text{ suma de todas las raíces reales}\right)$$

$$u_1 r_2^2 + u_2 r_1^2 = \frac{(-1)^{n-1} a_{n-1}}{2(\text{producto de todas las n - 4 raíces reales})}$$

$$-\frac{r_1^2 r_2^2}{2}(\text{suma de las inversas de todas las n - 4 raíces reales})$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de las que se despeja u_1 y u_2

En la función denominada *dosRaicesComplejas*, la primera tarea será la de calcular la suma de todas las raíces reales, el producto, y la suma de las inversas de dichas raíces.

Después calcularemos los segundos miembros de cada una de las dos ecuaciones y los guardaremos en las variables locales *y* y *z*

La solución del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es

$$u_1 = \frac{yr_1^2 - z}{r_1^2 - r_2^2} \qquad u_2 = \frac{-yr_2^2 + z}{r_1^2 - r_2^2}$$

lo que nos permite calcular u_1 y u_2 y posteriormente, v_1 y v_2

Para determinar el signo de la raíz real, hallaremos el valor del polinomio para dos valores *raiz* y -*raiz*, uno de los dos tiene que ser cero o muy próximo a cero. Una vez hallada la raíz real, su valor absoluto y su signo, se guarda en el array *raicesReales*.

Raíces reales dobles

En el apartado anterior, hemos supuesto que las raíces de un polinomio son reales y distintas, por lo que la aplicación del método de Graeffe es inmediata. Supongamos el polinomio $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ que tiene una raíz doble 2, y una simple 3. Examinemos el comportamiento de sus coeficientes en el proceso de elevación al cuadrado en la tabla. Observaremos que el segundo coeficiente a_1 se comporta como hemos descrito en el apartado anterior, cada coeficiente en una iteración es aproximadamente el cuadrado de la iteración precedente. Sin embargo, este comportamiento no se produce en el tercer coeficiente a_2, ya que se obtiene la mitad del valor esperado. Por ejemplo, el valor de a_2 en la séptima iteración es $8.024\ 10^{99}$ y su cuadrado es $6.4384\ 10^{199}$, sin embargo, se obtiene la mitad $3.2192\ 10^{199}$. Lo mismo ocurre en octava iteración el cuadrado de $3.2192\ 10^{199}$ es $1.0363\ 10^{399}$, sin embargo, obtenemos la mitad de este valor $5.1817\ 10^{398}$. Al tercer coeficiente, a_2 (índice 2), se denomina excepcional, y señala la presencia de raíces reales dobles.

m (2^m)	a_0	a_1	a_2	a_3
0 (1)	1.0	-7.0	16.0	-12.0
1 (2)	1.0	17.0	88.0	144.0
2 (4)	1.0	113.0	2048.0	20736.0
3 (8)	1.0	7073.0	$3.4248\ 10^{6}$	$4.2998\ 10^{8}$
4 (16)	1.0	$4.3178\ 10^{7}$	$5.6465\ 10^{12}$	$1.8488\ 10^{17}$
5 (32)	1.0	$1.853\ 10^{15}$	$1.5917\ 10^{25}$	$3.4182\ 10^{34}$
6 (64)	1.0	$3.4337\ 10^{30}$	$1.2668\ 10^{50}$	$1.1684\ 10^{69}$
7 (128)	1.0	$1.179\ 10^{61}$	$8.024\ 10^{99}$	$1.3652\ 10^{138}$
8 (256)	1.0	$1.3901\ 10^{122}$	$3.2192\ 10^{199}$	$1.8638\ 10^{276}$
9 (512)	1.0	$1.9323\ 10^{244}$	$5.1817\ 10^{398}$	$3.4737\ 10^{552}$

Para obtener la raíz doble, se ha de aplicar la siguiente fórmula que damos sin justificar. La raíz repetida se puede hallar calculando la raíz *2*2ᵐ* de la razón de los coeficientes que inmediatamente preceden y siguen al coeficiente excepcional. Si *i* es el coeficiente excepcional, el módulo de la raíz doble se calcula mediante la fórmula

$$|r_i| = \sqrt[2^{m+1}]{\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}}} \quad (5)$$

3.10.- Problemas de valor inicial.

En matemática, en el campo de las ecuaciones diferenciales, un **problema de valor inicial** (también llamado por algunos autores como *el* problema de Cauchy) es una ecuación diferencial ordinaria junto con un valor especificado, llamado la condición inicial, de la función desconocida en un punto dado del dominio de la solución. En física o en otras ciencias, es muy común que el modelado de un sistema utilice el problema de valor inicial para la resolución; en este contexto, la ecuación diferencial es una ecuación que evoluciona especificando cómo el sistema evoluciona con el tiempo, dadas las condiciones iniciales.
En la mayoría de las aplicaciones estamos interesados no en la solución general de una ecuación diferencial, sino en una solución particular que satisfaga ciertas condiciones dadas. Esto da origen a los problemas de valor inicial.

Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial ordinaria que tiene un pre-requisito inicial sujeto con la misma. Este pre-requisito es la salida de la función indefinida para algún valor que se encuentra dentro del dominio de la ecuación diferencial dada.

Se puede expresar como:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Los problemas de valor inicial ayudan a determinar una respuesta exclusiva a partir de las múltiples respuestas posibles para la ecuación diferencial dada. Sin embargo, aunque es posible establecer una serie de pre-requisitos inicial es para una ecuación diferencial en particular y sólo unos pocos de ellos nos llevaría a una respuesta exclusiva para el problema dado. Por lo tanto, es posible concluir que para algunos pre-requisitos iniciales pueden existir muchas o ninguna solución. Por este motivo, hacer una correcta elección del pre-requisito a ser establecido es la mayor confusión.

En la mayoría de las aplicaciones estamos interesados no en la solución general de una ecuación diferencial, sino en una solución particular que satisfaga ciertas condiciones dadas. Esto da origen a los problemas de valor inicial.

Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial ordinaria que tiene un pre-requisito inicial sujeto con la misma. Este pre-requisito es la salida de la función indefinida para algún valor que se encuentra dentro del dominio de la ecuación diferencial dada.

Se puede expresar como:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Los problemas de valor inicial ayudan a determinar una respuesta exclusiva a partir de las múltiples respuestas posibles para la ecuación diferencial dada. Sin embargo, aunque es posible establecer una serie de pre-requisitos inicial es para una ecuación diferencial en particular y sólo unos pocos de ellos nos llevaría a una respuesta exclusiva para el problema dado. Por lo tanto, es posible concluir que para algunos pre-requisitos iniciales pueden existir muchas o ninguna solución. Por este motivo, hacer una correcta elección del pre-requisito a ser establecido es la mayor confusión.

3.11.- Teorema de existencia y unicidad.

En este artículo mostraremos un ejemplo que te permitirá entender claramente el cómo interpretar el Teorema de Existencia de una solución única aplicado a las Ecuaciones Diferenciales (ED) Ordinarias de Primer Orden.

En el caso de las Ecuaciones Diferenciales (ED's), existen 3 casos particulares que se pueden presentar al obtener las soluciones de una ED Ordinaria de Primer Orden, sobre todo si estas soluciones no se encuentran dentro de los límites que enuncia el Teorema de Existencia y Unicidad, y es en esta circunstancia particular, cuando se presentan los casos en donde la solución de las ED's Ordinarias de Primer Orden, pueden ser:

– Una solución Única (cómo en el caso en donde la solución si está dentro de los límites del Teorema de Existencia y Unicidad)

– Una infinidad de soluciones

– Ninguna solución

Veamos estos casos para entender conceptos como el de intervalo de solución (representado por la letra Iy la región de continuidad o definición Rde los valores: f(x,y) (o lado derecho de una ED

Ordinaria de Primer Orden, dydx=f(x,y)) y ∂f∂y (o derivada parcial del lado derecho de la ED Ordinaria de Primer Orden).

RAZONAMIENTO INTUITIVO PARA ENTENDER EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Primero, recordemos las siguientes definiciones:

FORMA GENERAL DE UN ECUACIÓN LINEAL DE 1ER ORDEN

---

a1(x)dxdy+a0(x)y=g(x)

Notacion Estandar de la forma general de un Ecuación Lineal de 1er Orden

dydx+P(x)y=f(x) (1)

Dónde:

P(x)=a0(x)a1(x) y

f(x)=g(x)a1(x)

Otra forma de representar una Ecuación Diferencial de 1er Orden:

dydx=f(x,y)

Donde f(x,y), sería equivalente a:

f(x,y)=−P(x)y+f(x)

Si despejamos la forma estándar para una EDO lineal representada por la ecuación (1)

Ahora podemos leer con más claridad el Teorema, para entenderlo:

Teorema de Existencia y Unicidad de una Solución

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA SOLUCIÓN

“Supóngase que tanto la función f(x,y) y su derivada parcial ∂f∂yson continuas en algún rectángulo R en el plano xy que contiene el punto (x0,y0) en su interior. Entonces, para algún intervalo abierto I conteniendo el punto x0, el problema del valor inicial dydx=f(x,y) , y(x0)=y0

Tiene una y solo una solución que está definida en el intervalo I. (Como se ilustra en la figura 1, el intervalo de solución I puede no ser tan "ancho "en continuidad como el rectángulo original R)".

Los conceptos importantes a considerar son:

– Función de dos variables

– Continuidad de una función de dos variables, y

– Solución de una ED Ordinaria de Primer Orden f(x,y) con y(x0)=y0; esto es un problema de valores iniciales (PVI).

El **teorema de existencia y unicidad** establece las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación diferencial de primer orden, con condición inicial dada, tenga una solución y que además dicha solución sea la única.

Sin embargo el teorema no da ninguna técnica ni indicación de cómo hallar tal solución. El teorema de existencia y unicidad se extiende también a ecuaciones diferenciales de orden superior con condiciones iniciales, lo que se conoce como problema de Cauchy.

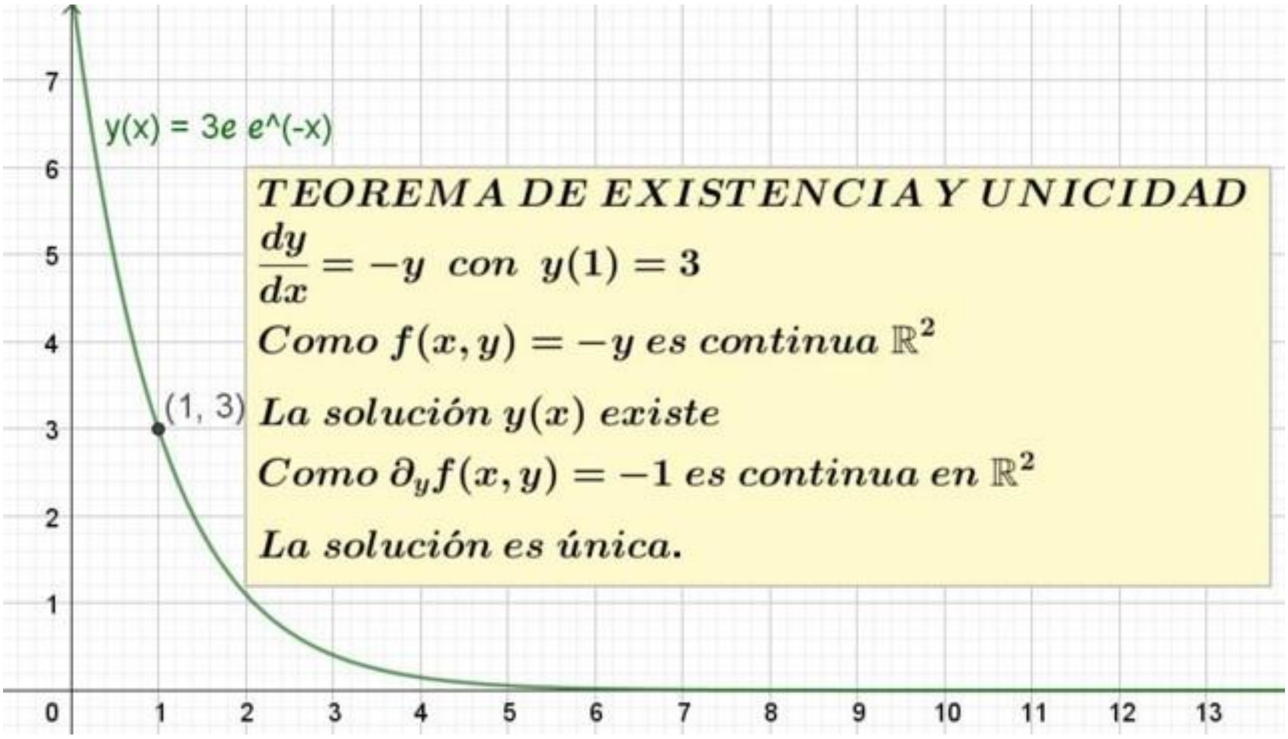


Figura 1. Se muestra una ecuación diferencial con condición inicial y su solución. El Teorema de Existencia y Unicidad garantiza que es la única solución posible.

El enunciado formal del teorema de existencia y unicidad es el siguiente:

"Para una ecuación diferencial *y'(x) = f(x,y)* con condición inicial *y(a) = b*, existe al menos una solución en una región rectangular del plano *XY* que contiene al punto *(a,b)*, si *f(x,y)* es continua en dicha región. Y si la derivada parcial de *f* respecto de *y*: *g = ∂f/ ∂y* es continua en esa misma región rectangular, entonces la solución es única en un entorno del del punto *(a,b)* contenido en la región de continuidad de *f* y *g*."

La utilidad de este teorema radica primero en conocer cuáles son las regiones del plano XY en las que puede existir una solución y además, saber si la solución encontrada es la única posible o si existen otras.

Para este teorema se conocen dos demostraciones posibles, una de ellas es la demostración de Charles Émile Picard (1856-1941) y la otra se debe a Giuseppe Peano (1858-1932) basado en los trabajos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Es de notar que en la demostración de este teorema participaron las mentes matemáticas más brillantes del siglo XIX, por lo que se puede intuir que ninguna de las dos es sencilla.

Para demostrar formalmente el teorema se requiere establecer primero una serie de conceptos de matemáticas más avanzadas, como funciones tipo Lipschitz, espacios de Banach, teorema de existencia de Carathéodory y varios más, que escapan del propósito del artículo.

Una gran parte de las ecuaciones diferenciales que se manejan en física tratan con funciones continuas en las regiones de interés, por lo tanto nos limitaremos a mostrar la forma en que se aplica el teorema en ecuaciones sencillas.

Ejemplos

– Ejemplo 1

Consideremos la siguiente ecuación diferencial con una condición inicial:

$y'(x) = -y$; con $y(1) = 3$

¿Existe una solución para este problema? ¿Es la única solución posible?

Respuestas

En primer lugar se evalúa la existencia de la solución de la ecuación diferencial y que además que cumpla la condición inicial.

En este ejemplo $f(x,y) = -y$ la condición de existencia requiere saber si $f(x,y)$ es continua en una región del plano *XY* que contenga al punto de coordenadas x=1, y=3.

Pero $f(x,y)=-y$ es la *función afín,* que es continua en el dominio de los números reales y existe en todo el rango de los números reales.

Por lo tanto se concluye que f(x,y) es continua en R^2, por lo que el teorema garantiza la existencia de al menos una solución.

Sabiendo esto, toca evaluar si la solución es única o si por el contrario hay más de una. Para esto es necesario calcular la derivada parcial de *f* respecto de la variable *y*:

$\partial f/\partial y = \partial(-y)/\partial y = -1$

Entonces $g(x,y) = -1$ que es una función constante, que también está definida para todo R^2 y además es continua allí. Se sigue que el teorema de existencia y unicidad garantiza que este problema de valor inicial sí tiene una solución única, aunque no nos dice cuál es.

– Ejemplo 2

Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial:

$y'(x) = 2\sqrt{y}$; $y(0) = 0$.

¿Existe una solución *y(x)* para este problema? En caso afirmativo determinar si hay una o más de una.

Respuesta

Consideramos la función $f(x,y) = 2\sqrt{y}$. La función f está definida únicamente para $y \geq 0$, pues sabemos que un número negativo carece de raíz real. Además $f(x,y)$ es continua en el semiplano superior de R^2 incluido el eje X, por lo que *el teorema de existencia y unicidad garantiza* al menos una solución en dicha región.

Ahora bien, la condición inicial x=0,y=0 está en el borde de la región de solución.
Entonces tomamos la derivada parcial de f(x,y) respecto de y:

$\partial f/\partial y = 1/\sqrt{y}$

En este caso la función <u>no está definida</u> para y=0, precisamente donde está la condición inicial.

¿Qué nos dice el teorema? Nos dice que aunque sabemos que existe al menos una solución el semiplano superior del eje X incluido el eje X, como no se cumple la condición de unicidad, no hay garantía que exista una solución única.

Esto significa que podría haber una o más de una solución en la región de continuidad de f(x,y). Y como siempre, el teorema no nos dice cuáles podrían ser.

<u>Ejercicios resueltos</u>

– Ejercicio 1

Resolver el problema de Cauchy del ejemplo 1:

$y'(x) = -y$; con $y(1) = 3$.

Hallar la función y(x) que satisface la ecuación diferencial y la condición inicial.

Solución

En el ejemplo 1 se determinó que este problema tiene solución y además es única. Para encontrar la solución, lo primero que debe notarse es que se trata de una ecuación diferencial de primer grado de variables separables, la cual se escribe de la siguiente manera:

$dy/dx = -y \rightarrow dy = -y\,dx$

Dividiendo entre y en ambos miembros para separar las variables nos queda:

$dy/y = -dx$

Se aplica la integral indefinida en ambos miembros:

$\int(1/y)\,dy = -\int dx$

Resolviendo las integrales indefinidas se tiene:

$\ln(y) = -x + C$

donde C es una constante de integración que se determina mediante la condición inicial:

$ln(3) = -1 + C$, *es decir que* $C = 1 + ln(3)$

Sustituyendo el valor de C y reorganizando queda:

$ln(y) – ln(3) = -x + 1$

Aplicando la siguiente propiedad de los logaritmos:

La diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente

La expresión anterior puede reescribirse así:

$ln(y/3) = 1 – x$

Se aplica la función exponencial con base e en ambos miembros para obtener:

$y / 3 = e^{(1 – x)}$

Que equivale a:

$y = 3e\ e^{-x}$

Esta es la solución única de la ecuación y' = -y con y(1) = 3. El gráfico de dicha solución se muestra en la figura 1.

– Ejercicio 2

Hallar dos soluciones para el problema planteado en el ejemplo 2:

$y'(x) = 2\sqrt{(y)}$; $y(0) = 0$.

Solución

También se trata de una ecuación de variables separables, que escrita en forma diferencial queda así:

$dy / \sqrt{(y)} = 2\ dx$

Tomando la integral indefinida en ambos miembros queda:

$2 \sqrt{(y)}= 2 x + C$

Como se sabe que $y≥0$ en la región de solución nos queda:

$y = (x + C)^2$

Pero como debe cumplirse la condición inicial x=0, y=0, entonces la constante C es cero y queda la siguiente solución:

$y(x) = x^2$.

Pero esta solución no es única, la función $y(x) = 0$ también es solución del problema planteado. El teorema de existencia y unicidad aplicado a este problema en el ejemplo 2 ya había predicho que podía existir más de una solución.

3.12.- Métodos de coeficientes indeterminados para calcular la integral particular.

El método de coeficientes indeterminados permite calcular una solución particular de una ecuación lineal de segundo orden no homogénea (ecuación completa) de coeficientes constantes:

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=g(x)$$

- Se basa en preparar una solución inspirada en la forma de la función $g(x)$. Sólo nos servirá para ciertos tipos de funciones $g(x)$, así que su uso es mucho más limitado que el del método de variación de constantes; sin embargo, en los casos en que sí pueda aplicarse, facilita la resolución pues no requiere cálculo de primitivas. En la siguiente tabla se recogen las funciones $g(x)$ y las funciones $yp(x)$ que les corresponden:

$g(x)$	$yp(x)$
$a0+a1x+\ldots+amxm$	$xs(A0+A1x+\ldots+Amxm)$
$a0coskx+a1senkx$	$xs(A0coskx+A1senkx)$
$a0ekx$	$A0xsekx$

- El número s se elige como el menor entero tal que ningún sumando de la solución particular sea solución de la ecuación homogénea asociada. Si la función $g(x)$ fuera producto de varias de las que figuran en la tabla, también la solución particular se propondría como el producto de la que correspondan a cada factor de $g(x)$.
- Una vez que se ha escrito la forma de la solución yp se deriva dos veces y se sustituye en la ecuación. Eso generará un sistema de ecuaciones algebraico en los coeficientes de yp.

Ejemplo 1:

La ecuación homogénea $d^2ydx^2 - y = 0$ tiene como solución general $y = Ae^x + Be^{-x}$

La ecuación no-homogénea $d^2ydx^2 - y = 2x^2 - x - 3$ tiene como solución particular

$$y = -2x^2 + x - 1$$

Entonces la solución completa de la ecuación diferencial $d^2ydx^2 - y = 2x^2 - x - 3$ es

$$y = Ae^x + Be^{-x} - 2x^2 + x - 1$$

Verifiquemos que la respuesta sea correcta:

$y = Ae^x + Be^{-x} - 2x^2 + x - 1$

Primera y segunda derivada:

$dydx = Ae^x - Be^{-x} - 4x + 1$
$d^2ydx^2 = Ae^x + Be^{-x} - 4$

Entonces

$d^2ydx^2 - y$

$= Ae^x + Be^{-x} - 4 - (Ae^x + Be^{-x} - 2x^2 + x - 1)$

$= Ae^x + Be^{-x} - 4 - Ae^x - Be^{-x} + 2x^2 - x + 1$

$= 2x^2 - x - 3$ Correcto ✓

Entonces, en este caso hemos demostrado que la respuesta es correcta, pero ¿cómo encontramos las soluciones particulares?

¡Podemos intentar suponer o adivinar ...!

Este método solo es fácil de aplicar si f(x) es una de los siguientes:

Ya sea:f(x) es una función polinomial.

O bien:f(x) es una combinación lineal de funciones seno y coseno.

O:f(x) es una función exponencial.

Y aquí hay una guía para ayudarnos a hacer una buena suposición:

f(x) y(x) *suposición/adivinando*

ae^{bx}	Ae^{bx}
$a\cos(cx) + b\sin(cx)$	$A\cos(cx) + B\sin(cx)$
kx^n *(n=0,1,2,...)*	$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0$

Pero hay una regla importante que debe aplicarse:

Primero debes encontrar la solución general a la ecuación homogénea.

Verás por qué mientras continuamos.

Ejemplo 1 (de nuevo): Resolver $d^2ydx^2 - y = 2x^2 - x - 3$

1. Encuentra la solución general de

$d^2ydx^2 - y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 - 1 = 0$

Factoriza: $(r - 1)(r + 1) = 0$

$r = 1$ o -1

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$y = Ae^x + Be^{-x}$

2. Encuentra la solución particular de

$d^2ydx^2 - y = 2x^2 - x - 3$

Ahora hay que suponer la que podría ser la solución:

Sea $y = ax^2 + bx + c$

$dydx = 2ax + b$
$d^2ydx^2 = 2a$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 - y = 2x^2 - x - 3$

$2a - (ax^2 + bx + c) = 2x^2 - x - 3$

$2a - ax^2 - bx - c = 2x^2 - x - 3$
$- ax^2 - bx + (2a - c) = 2x^2 - x - 3$

Iguala los coeficientes:

coeficientes con x^2:	$-a = 2 \Rightarrow a = -2$ ...	(1)
coeficientes con x:	$-b = -1 \Rightarrow b = 1$ ...	(2)
Coeficientes constantes:	$2a - c = -3$ ...	(3)

Sustituye $a = -2$ de (1) en (3)

$-4 - c = -3$
$c = -1$

$a = -2$, $b = 1$ y $c = -1$, entonces la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y = - 2x^2 + x - 1$$

Finalmente, combinamos nuestras dos respuestas para obtener la solución completa:

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} - 2x^2 + x - 1$$

¿Por qué supusimos $y = ax^2 + bx + c$ (una función cuadrática) y no incluimos un término cúbico (o superior)?

La respuesta es simple. La función f(x) en el lado derecho de la ecuación diferencial no tiene término cúbico (o superior); entonces, si y tuviera un término cúbico, su coeficiente tendría que ser cero.

Por tanto, para una ecuación diferencial del tipo $d^2ydx^2 + pdydx + qy = f(x)$ donde f(x) es un polinomio de grado n, nuestra suposición de *y* también será un polinomio de grado n.

Ejemplo 2: Resolver

$6d^2ydx^2 - 13dydx - 5y = 5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$

1. Encuentra la solución general de $6d^2ydx^2 - 13dydx - 5y = 0$

La ecuación característica es: $6r^2 - 13r - 5 = 0$

Factoriza: $(2r - 5)(3r + 1) = 0$

$r = 52$ o -13

De modo que la solución general de la ecuación diferencial es

$y = Ae^{(5/2)x} + Be^{(-1/3)x}$

2. Encuentra la solución particular de $6d^2ydx^2 - 13dydx - 5y = 5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$

Hay que suponer que la solución es cúbica porque $5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$ es cúbica.

Sea $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$dydx = 3ax^2 + 2bx + c$

$d^2ydx^2 = 6ax + 2b$

Sustituye esos valores en $6d^2ydx^2 - 13dydx - 5y = 5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$

$6(6ax + 2b) - 13(3ax^2 + 2bx + c) - 5(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$

$36ax + 12b - 39ax^2 - 26bx - 13c - 5ax^3 - 5bx^2 - 5cx - 5d = 5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$

$-5ax^3 + (-39a - 5b)x^2 + (36a - 26b - 5c)x + (12b - 13c - 5d) = 5x^3 + 39x^2 - 36x - 10$

Iguala los coeficientes:

coeficientes con x^3:	$-5a = 5 \Rightarrow a = -1$
coeficientes con x^2:	$-39a - 5b = 39 \Rightarrow b = 0$
coeficientes con x:	$36a - 26b - 5c = -36 \Rightarrow c = 0$
coeficientes constantes:	$12b - 13c - 5d = -10 \Rightarrow d = 2$

Entonces la solución particular es:

$y = -x^3 + 2$

Finalmente, combinamos nuestras dos respuestas para obtener la solución completa:

$y = Ae^{(5/2)x} + Be^{(-1/3)x} - x^3 + 2$

Ejemplo 3: Resolver $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = -130\cos(x) + 16e^{3x}$

En este caso, necesitamos resolver tres ecuaciones diferenciales:

1. Encontrar la solución general de $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 0$

2. Encontrar la solución particular de $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = -130\cos(x)$

3. Encontrar la solución particular de $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{3x}$

Entonces, así es como se hace:

1. Encuentra la solución general de $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 + 3r - 10 = 0$

Factoriza: $(r - 2)(r + 5) = 0$

$r = 2$ o -5

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$y = Ae^{2x}+Be^{-5x}$

2. Encuentra la solución particular de $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = -130\cos(x)$

Haz una suposición: dado que f(x) es una función coseno, supondremos que y es una combinación lineal de las funciones seno y coseno:

Prueba $y = a\cos(x) + b\sin(x)$

$dydx = - a\sin(x) + b\cos(x)$

$d^2ydx^2 = - a\cos(x) - b\sin(x)$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = -130\cos(x)$

$-a\cos(x) - b\sin(x) + 3[-a\sin(x) + b\cos(x)] - 10[a\cos(x)+b\sin(x)] = -130\cos(x)$

cos(x)[−a + 3b − 10a] + sin(x)[−b − 3a − 10b] = −130cos(x)

cos(x)[−11a + 3b] + sin(x)[−11b − 3a] = −130cos(x)

Iguala los coeficientes:

Coeficientes de cos(x):	−11a + 3b = −130 ... (1)
Coeficientes de sin(x):	−11b − 3a = 0 ... (2)

De la ecuación (2), a = −*11b*3

Sustituye en la ecuación (1)

*121b*3 + 3b = −130

*130b*3 = −130

b = −3

a = −*11(−3)*3 = 11

Entonces la solución particular es:

y = 11cos(x) − 3sin(x)

3. Encuentra la solución particular para $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{3x}$

Adivina.

Prueba con $y = ce^{3x}$

$dydx = 3ce^{3x}$

$d^2ydx^2 = 9ce^{3x}$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{3x}$

$9ce^{3x} + 9ce^{3x} - 10ce^{3x} = 16e^{3x}$

$8ce^{3x} = 16e^{3x}$

$c = 2$

Entonces la solución particular es:

$y = 2e^{3x}$

Finalmente, combinamos nuestras tres respuestas para obtener la solución completa:

$y = Ae^{2x} + Be^{-5x} + 11\cos(x) - 3\sin(x) + 2e^{3x}$

Ejemplo 4: Resolver $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = -130\cos(x) + 16e^{2x}$

Esto es exactamente lo mismo que en el Ejemplo 3 excepto por el término final, que ha sido reemplazado por $16e^{2x}$.

Entonces, los pasos 1 y 2 son exactamente iguales. Continúa con el paso 3:

3. Encuentra la solución particular para $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{2x}$

Adivina.

Intenta con $y = ce^{2x}$

$dydx = 2ce^{2x}$

$d^2ydx^2 = 4ce^{2x}$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{2x}$

$4ce^{2x} + 6ce^{2x} - 10ce^{2x} = 16e^{2x}$

$0 = 16e^{2x}$

¡Caracoles! Parece que algo salió mal. ¿Cómo puede ser que $16e^{2x} = 0$?

Bueno, no se puede, y no hay nada de malo aquí, excepto que no hay una solución particular para la ecuación diferencial $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{2x}$

...¡Espera un momento!
La solución general a la ecuación homogénea $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 0$, que es $y = Ae^{2x} + Be^{-5x}$, ya tiene un término Ae^{2x}, así que la función que supusimos $y = ce^{2x}$ ya satisface la ecuación diferencial $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 0$ (era solo una constante diferente).

Entonces debemos probar con $y = cxe^{2x}$

Veamos qué ocurre:

$dydx = ce^{2x} + 2cxe^{2x}$

$d^2ydx^2 = 2ce^{2x} + 4cxe^{2x} + 2ce^{2x} = 4ce^{2x} + 4cxe^{2x}$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 + 3dydx - 10y = 16e^{2x}$

$4ce^{2x} + 4cxe^{2x} + 3ce^{2x} + 6cxe^{2x} - 10cxe^{2x} = 16e^{2x}$

$7ce^{2x} = 16e^{2x}$

$c = 167$

Entonces, en el caso actual, nuestra solución particular es

$y = 167xe^{2x}$

Por lo tanto, nuestra solución final completa en este caso es:

$y = Ae^{2x} + Be^{-5x} + 11\cos(x) - 3\sin(x) + 167xe^{2x}$

Ejemplo 5: Resolver $d^2ydx^2 - 6dydx + 9y = 5e^{-2x}$

1. Encuentra la solución general para $d^2ydx^2 - 6dydx + 9y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r - 3)^2 = 0$

$r = 3$, que es una raíz repetida.

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$

2. Encuentra la solución particular para $d^2ydx^2 - 6dydx + 9y = 5e^{-2x}$

Haz una buena suposición.

Prueba con $y = ce^{-2x}$

$dydx = -2ce^{-2x}$

$d^2ydx^2 = 4ce^{-2x}$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 - 6dydx + 9y = 5e^{-2x}$

$4ce^{-2x} + 12ce^{-2x} + 9ce^{-2x} = 5e^{-2x}$

$25ce^{-2x} = 5e^{-2x}$

$c = 15$

Entonces la solución particular es:

$y= 15e^{-2x}$

Finalmente, combinamos nuestras dos respuestas para obtener la solución completa:

$y= Ae^{3x} + Bxe^{3x} + 15e^{-2x}$

Ejemplo 6: Resolver $d^2ydx^2 + 6dydx + 34y = 109\cos(5x)$

1. Encuentra la solución general para $d^2ydx^2 + 6dydx + 34y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 + 6r + 34 = 0$

Usa la fórmula de la ecuación cuadrática

$r = -b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}2a$

con $a = 1$, $b = 6$ y $c = 34$

Luego

$r = -6 \pm \sqrt{[6^2 - 4(1)(34)]}2(1)$

$r = -6 \pm \sqrt{(36-136)}2$

$r = -6 \pm \sqrt{(-100)}2$

$r = -3 \pm 5i$

Y se tiene:

$y = e^{-3x}(A\cos(5x) + iB\sin(5x))$

2. Encuentra la solución particular para $d^2ydx^2 + 6dydx + 34y = 109\sin(5x)$

Dado que f(x) es una función seno, asumimos que y es una combinación lineal de las funciones seno y coseno:

Adivina.

Prueba con $y = a\cos(5x) + b\sin(5x)$

Nota: dado que no tenemos sin(5x) o cos(5x) en la solución de la ecuación homogénea (tenemos $e^{-3x}\cos(5x)$ y $e^{-3x}\sin(5x)$, que son funciones diferentes), nuestra suposición debería funcionar.

Continuemos y veamos qué sucede:

$dydx = -5a\sin(5x) + 5b\cos(5x)$

$d^2ydx^2 = -25a\cos(5x) - 25b\sin(5x)$

Sustituye esos valores en $d^2ydx^2 + 6dydx + 34y = 109\sin(5x)$

$-25a\cos(5x) - 25b\sin(5x) + 6[-5a\sin(5x) + 5b\cos(5x)] + 34[a\cos(5x) + b\sin(5x)] = 109\sin(5x)$

$\cos(5x)[-25a + 30b + 34a] + \sin(5x)[-25b - 30a + 34b] = 109\sin(5x)$

$\cos(5x)[9a + 30b] + \sin(5x)[9b - 30a] = 109\sin(5x)$

Iguala los coeficientes de cos(5x) y sin(5x):

Coeficientes de cos(5x):	$9a + 30b = 109$ ... (1)
Coeficientes de sin(5x):	$9b - 30a = 0$ ... (2)

De la ecuación (2), $a = 3b10$

Sustituye en la ecuación (1)

$9(3b10) + 30b = 109$

$327b = 1090$

$b = 103$

$a = 1$

Entonces la solución particular es:

$y = \cos(5x) + 103\sin(5x)$

Finalmente, combinamos nuestras respuestas para obtener la solución completa:

$y = e^{-3x}(A\cos(5x) + iB\sin(5x)) + \cos(5x) + 103\sin(5x)$

3.13.- Método de variación de parámetros.

Esta página trata sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden de este tipo:

$$d^2y\mathbf{dx^2} + P(x)dy\mathbf{dx} + Q(x)y = f(x)$$

donde P(x), Q(x) y f(x) son funciones de x.

El caso más simple, cuando f(x) = 0:

$$d^2y\mathbf{dx^2} + P(x)dy\mathbf{dx} + Q(x)y = 0$$

es "homogéneo" y se explica en Introducción a las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden. Primero aprende ese método, ya que te ayudará a comprender esta página.

Dos métodos

Hay dos métodos principales para resolver ecuaciones como esta

$$d^2y\mathbf{dx^2} + P(x)dy\mathbf{dx} + Q(x)y = f(x)$$

Coeficientes indeterminados, que solo funciona cuando f(x) es un polinomio, una exponencial, seno, coseno o una combinación lineal de esas.

Variación de Parámetros, (el cual aprenderemos aquí), que es un método un poco más complicado pero funciona en una gama más amplia de funciones.

Variación de Parámetros

Para simplificar las cosas, solo miraremos el caso:

$$d^2y\mathbf{dx^2} + pdy\mathbf{dx} + qy = f(x)$$

cuando **p** y **q** son constantes y f(x) es una función de x distinta de cero.

La **solución completa** a tal ecuación se puede encontrar combinando dos tipos de solución:

- La **solución general** de la ecuación homogénea $d^2y\mathbf{dx^2} + pdy\mathbf{dx} + qy = 0$
- **Soluciones particulares** de la ecuación no-homogénea $d^2y\mathbf{dx^2} + pdy\mathbf{dx} + qy = f(x)$

Toma en cuenta que f(x) podría ser una sola función o una suma de dos o más funciones.

Una vez que hayamos encontrado la solución general y todas las soluciones particulares, la solución completa se encuentra sumando todas las soluciones.

Este método se basa en integración.

El problema con este método es que, aunque puede dar una solución, en algunos casos la solución debe dejarse como una integral.

Comienza con la solución general

En Introducción a las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden se puede aprender a encontrar la solución general.

Básicamente tomamos la ecuación

$$d^2y\mathbf{dx^2} + pdy\mathbf{dx} + qy = 0$$

y se reduce a su "ecuación característica":

$$r^2 + pr + q = 0$$

La cual es una ecuación cuadrática que tiene tres posibles tipos de solución dependiendo del discriminante $\mathbf{p^2 - 4q}$. Cuando $\mathbf{p^2 - 4q}$ es

positivo, obtenemos dos raíces reales, y la solución es

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

cero, obtenemos una raíz real, y la solución es

$$y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$$

negativo, obtenemos dos raíces complejas $\mathbf{r_1 = v + wi}$ y $\mathbf{r_2 = v - wi}$, y la solución es

$$y = e^{vx} (C\cos(wx) + iD\sin(wx))$$

Las soluciones fundamentales de la ecuación

En los tres casos anteriores, la "y" consta de dos partes:

- $\mathbf{y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$ se compone de $\mathbf{y_1 = e^{r_1 x}}$ y $\mathbf{y_2 = e^{r_2 x}}$
- $\mathbf{y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}}$ se compone de $\mathbf{y_1 = e^{rx}}$ y $\mathbf{y_2 = xe^{rx}}$
- $\mathbf{y = e^{vx} (C\cos(wx) + iD\sin(wx))}$ se compone de $\mathbf{y_1 = e^{vx}\cos(wx)}$ y $\mathbf{y_2 = e^{vx}\sin(wx)}$

y_1 y y_2 se conocen como las soluciones fundamentales de la ecuación.

Además, se dice que y_1 y y_2 son **linealmente independientes** porque ninguna función es un múltiplo constante de la otra.

Las soluciones fundamentales de la ecuación

En los tres casos anteriores, la "y" consta de dos partes:

- $\mathbf{y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}}$ se compone de $\mathbf{y_1 = e^{r_1x}}$ y $\mathbf{y_2 = e^{r_2x}}$
- $\mathbf{y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}}$ se compone de $\mathbf{y_1 = e^{rx}}$ y $\mathbf{y_2 = xe^{rx}}$
- $\mathbf{y = e^{vx}\ (\ C\cos(wx) + iD\sin(wx)\ )}$ se compone de $\mathbf{y_1 = e^{vx}\cos(wx)}$ y $\mathbf{y_2 = e^{vx}\sin(wx)}$

y_1 y y_2 se conocen como las soluciones fundamentales de la ecuación.

Además, se dice que y_1 y y_2 son **linealmente independientes** porque ninguna función es un múltiplo constante de la otra.

El Wronskiano

Cuando y_1 y y_2 son las dos soluciones fundamentales de la ecuación homogénea

$d^2y\mathbf{dx^2} + p\,dy\mathbf{dx} + qy = 0$

entonces el Wronskiano $W(y_1, y_2)$ es el determinante de la matriz

Es decir:

$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$

El **Wronskiano** lleva el nombre del matemático y filósofo polaco Józef Hoene-Wronski (1776−1853).

Puesto que y_1 y y_2 son linealmente independientes, el valor del Wronskiano no puede ser igual a cero.

La solución particular

Usando el Wronskiano ahora podemos encontrar la solución particular de la ecuación diferencial

$d^2y\mathbf{dx^2} + p\,dy\mathbf{dx} + qy = f(x)$

usando la fórmula:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

Ejemplo 1: Resuelve $d^2y\mathbf{dx^2} - 3dy\mathbf{dx} + 2y = e^{3x}$

1. Encuentra la solución general de $d^2y\mathbf{dx^2} - 3dy\mathbf{dx} + 2y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 - 3r + 2 = 0$

Factoriza: $(r - 1)(r - 2) = 0$

$r = 1$ o 2

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es $y = Ae^x + Be^{2x}$

Entonces en este caso las soluciones fundamentales y sus derivadas son:

$y_1(x) = e^x$

$y_1'(x) = e^x$

$y_2(x) = e^{2x}$

$y_2'(x) = 2e^{2x}$

2. Calcula el Wronskiano:

$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$

3. Encuentra la solución particular usando la fórmula:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

4. Primero se resuelven las integrales:

$\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

$= \int e^{2x}e^{3x}\mathbf{e^{3x}}dx$

$= \int e^{2x}dx$

$= 12e^{2x}$

Por lo tanto:

$-y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx = -(e^x)(12e^{2x}) = -12e^{3x}$

Y también:

$\int y_1(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx$

$= \int e^x e^{3x} \mathbf{e^{3x}} dx$

$= \int e^x dx$

$= e^x$

Luego:

$y_2(x) \int y_1(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx = (e^{2x})(e^x) = e^{3x}$

Finalmente:

$y_p(x) = -y_1(x) \int y_2(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int y_1(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx$

$= -12e^{3x} + e^{3x}$

$= 12e^{3x}$

y la solución completa de la ecuación diferencial $d^2y\mathbf{dx^2} - 3dy\mathbf{dx} + 2y = e^{3x}$ es

$y = Ae^x + Be^{2x} + 12e^{3x}$

Que se ve así (valores de ejemplo de A y B):

Ejemplo 2: Resuelve $d^2y\mathbf{dx^2} - y = 2x^2 - x - 3$

1. Encuentra la solución general de $d^2y\mathbf{dx^2} - y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 - 1 = 0$

Factoriza: $(r - 1)(r + 1) = 0$

$r = 1$ o -1

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es $y = Ae^{x}+Be^{-x}$

De modo que, en este caso, las soluciones fundamentales y sus derivadas son:

$y_1(x) = e^{x}$

$y_1'(x) = e^{x}$

$y_2(x) = e^{-x}$

$y_2'(x) = -e^{-x}$

2. Calcula el Wronskiano:

$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = -e^{x}e^{-x} - e^{x}e^{-x} = -2$

3. Encuentra la solución particular usando la fórmula:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

4. Resuelve las integrales:

Cada una de las integrales puede calcularse empleando Integración por Partes dos veces:

$\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

$= \int e^{-x}(2x^2-x-3)\mathbf{-2}dx$

$= -12 \int(2x^2-x-3)e^{-x}dx$

$= -12[\ -(2x^2-x-3)e^{-x} + \int(4x-1)e^{-x}\,dx\ ]$

$= -12[\ -(2x^2-x-3)e^{-x} - (4x - 1)e^{-x} + \int 4e^{-x}dx\ ]$

$= -12[\ -(2x^2-x-3)e^{-x} - (4x - 1)e^{-x} - 4e^{-x}\ ]$

$= e^{-x}2[\ 2x^2 - x - 3 + 4x -1 + 4\ ]$

$= e^{-x}2[\ 2x^2 + 3x\ ]$

Luego:

$-y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx = (-e^x)[e^{-x}2(\ 2x^2 + 3x\ )] = -12(2x^2 + 3x)$

Y ahora esta:

$\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx$

$= \int e^x\ (2x^2-x-3)\mathbf{-2}dx$

$= -12\ \int(2x^2-x-3)e^x dx$

$= -12[\ (2x^2-x-3)e^x - \int(4x-1)e^x\ dx\ ]$

$= -12[\ (2x^2-x-3)e^x - (4x - 1)e^x + \int 4e^x dx\ ]$

$= -12[\ (2x^2-x-3)e^x - (4x - 1)e^x + 4e^x\ ]$

$= -e^x2[\ 2x^2 - x - 3 - 4x + 1 + 4\ ]$

$= -e^x2[\ 2x^2 - 5x + 2\ ]$

Luego:

$y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx = (e^{-x})[-e^x2(\ 2x^2 - 5x + 2\ )\ ] = -12(\ 2x^2 - 5x + 2\ )$

Finalmente:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx + y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx$

$= -12(\ 2x^2 + 3x\ ) - 12(\ 2x^2 - 5x + 2\ )$

$= -12(\ 4x^2 - 2x + 2\ )$

$= -2x^2 + x - 1$

y la solución completa de la ecuación diferencial $d^2y\mathbf{dx^2} - y = 2x^2 - x - 3$ es

$\mathbf{y = Ae^x + Be^{-x} - 2x^2 + x - 1}$

(Esta es la misma respuesta que obtuvimos en el Ejemplo 1 en la página Método de Coeficientes Indeterminados).

Ejemplo 3: Resuelve $d^2y\mathbf{dx^2} - 6dy\mathbf{dx} + 9y = 1\mathbf{x}$

1. Encuentra la solución general de $d^2y\mathbf{dx^2} - 6dy\mathbf{dx} + 9y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 - 6r + 9 = 0$

Factoriza: $(r - 3)(r - 3) = 0$

$r = 3$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$

Y así, en este caso, las soluciones fundamentales y sus derivadas son:

$y_1(x) = e^{3x}$

$y_1'(x) = 3e^{3x}$

$y_2(x) = xe^{3x}$

$y_2'(x) = (3x + 1)e^{3x}$

2. Calcula el Wronskiano:

$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = (3x + 1)e^{3x}e^{3x} - 3xe^{3x}e^{3x} = e^{6x}$

3. Encuentra la solución particular usando la fórmula:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

4. Resuelve las integrales:

$\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

$= \int(xe^{3x})x^{-1}\mathbf{e^{6x}}dx$ (Nota: $1\mathbf{x} = x^{-1}$)

$= \int e^{-3x}dx$

$= -13e^{-3x}$

Por lo tanto:

$-y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx = -(e^{3x})(-13e^{-3x}) = 13$

Y ahora esta:

$\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx$

$= \int e^{3x}x^{-1}\mathbf{e^{6x}}dx$

$= \int e^{-3x}x^{-1}dx$

Esto no se puede integrar, por lo que este es un ejemplo en el que la respuesta debe dejarse como una integral.

Entonces:

$y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx = (\ xe^{3x}\ )(\ \int e^{-3x}x^{-1}dx\ ) = xe^{3x}\int e^{-3x}x^{-1}dx$

Finalmente:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx + y_2(x)\int y_1(x)f(x)\mathbf{W(y_1,\ y_2)}dx$

$= 13 + xe^{3x}\int e^{-3x}x^{-1}dx$

Entonces la solución completa de la ecuación diferencial $d^2y\mathbf{dx^2} - 6dy\mathbf{dx} + 9y = 1x$ es

$\mathbf{y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + 13 + xe^{3x}\int e^{-3x}x^{-1}dx}$

Ejemplo 4 (un ejemplo más difícil): Resuelve $d^2y\mathbf{dx^2} - 6dy\mathbf{dx} + 13y = 195\cos(4x)$

Este ejemplo usa las siguientes identidades trigonométricas

$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

$\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) \pm \cos(\theta)\sin(\phi)$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \quad \sin(\theta)\sin(\phi)$

$\sin(\theta)\cos(\phi) = \frac{1}{2}[\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)]$
$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)]$

1. Encuentra la solución general de $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0$

La ecuación característica es: $r^2 - 6r + 13 = 0$

Usa la fórmula de la ecuación cuadrática

$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

con a = 1, b = −6 y c = 13

Queda así:

$r = \frac{-(-6) \pm \sqrt{[(-6)^2 - 4(1)(13)]}}{2(1)}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{[36-52]}}{2}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{[-16]}}{2}$

$= \frac{6 \pm 4i}{2}$

$= 3 \pm 2i$

De modo que $\alpha = 3$ y $\beta = 2$

$\Rightarrow y = e^{3x}[A\cos(2x) + iB\sin(2x)]$

Y en este caso tenemos:

$y_1(x) = e^{3x}\cos(2x)$

$y_1'(x) = e^{3x}[3\cos(2x) - 2\sin(2x)]$

$y_2(x) = e^{3x}\sin(2x)$

$y_2'(x) = e^{3x}[3\sin(2x) + 2\cos(2x)]$

2. Calcula el Wronskiano:

$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

$= e^{6x}\cos(2x)[3\sin(2x) + 2\cos(2x)] - e^{6x}\sin(2x)[3\cos(2x) - 2\sin(2x)]$

$= e^{6x}[3\cos(2x)\sin(2x) + 2\cos^2(2x) - 3\sin(2x)\cos(2x) + 2\sin^2(2x)]$

$= 2e^{6x}$

3. Encuentra la solución particular usando la fórmula:

$y_p(x) = -y_1(x)\int y_2(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x)\int y_1(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx$

4. Resuelve las integrales:

$\int y_2(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx$

$= \int e^{3x} \sin(2x)[195\cos(4x)] \mathbf{2e^{6x}} dx$

$= 195\mathbf{2}\int e^{-3x}\sin(2x)\cos(4x)dx$

$= 195\mathbf{4}\int e^{-3x}[\sin(6x) - \sin(2x)]dx \quad \ldots \quad (1)$

En este caso, no haremos la integración todavía, por razones que se aclararán en un momento.

La otra integral es:

$\int y_1(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)} dx$

$= \int e^{3x}\cos(2x)[195\cos(4x)] \mathbf{2e^{6x}} dx$

$= 195\mathbf{2}\int e^{-3x}\cos(2x)\cos(4x)dx$

$= 195\mathbf{4}\int e^{-3x}[\cos(6x) + \cos(2x)]dx \quad \ldots \quad (2)$

De las ecuaciones (1) y (2) vemos que hay cuatro integraciones muy similares que necesitamos realizar:

$I_1 = \int e^{-3x}\sin(6x)dx$
$I_2 = \int e^{-3x}\sin(2x)dx$
$I_3 = \int e^{-3x}\cos(6x)dx$
$I_4 = \int e^{-3x}\cos(2x)dx$

Cada una de estas se puede obtener usando Integración Por Partes dos veces, pero hay un método más fácil:

$I_1 = \int e^{-3x}\sin(6x)dx = -16e^{-3x}\cos(6x) - 36\int e^{-3x}\cos(6x)dx = -16e^{-3x}\cos(6x) - 12I_3$

$\Rightarrow \mathbf{2I_1 + I_3 = -13e^{-3x}\cos(6x)}$ **... (3)**

$I_2 = \int e^{-3x}\sin(2x)dx = -12e^{-3x}\cos(2x) - 32\int e^{-3x}\cos(2x)dx = -12e^{-3x}\cos(2x) - 32I_4$

$\Rightarrow \mathbf{2I_2 + 3I_4 = -e^{-3x}\cos(2x)}$ **... (4)**

$I_3 = \int e^{-3x}\cos(6x)dx = 16e^{-3x}\sin(6x) + 36\int e^{-3x}\sin(6x)dx = 16e^{-3x}\sin(6x) + 12I_1$
$\Rightarrow \mathbf{2I_3 - I_1 = 13e^{-3x}\sin(6x)}$ **... (5)**
$I_4 = \int e^{-3x}\cos(2x)dx = 12e^{-3x}\sin(2x) + 32\int e^{-3x}\sin(2x)dx = 12e^{-3x}\sin(2x) + 32I_2$

$\Rightarrow \mathbf{2I_4 - 3I_2 = e^{-3x}\sin(2x)}$ **... (6)**

Resuelve las ecuaciones (3) y (5) simultáneamente:

$2I_1 + I_3 = -13e^{-3x}\cos(6x)$ ... (3)

$2I_3 - I_1 = 13e^{-3x}\sin(6x)$ ... (5)

Multiplica la ecuación (5) por 2 y súmalas (el término I_1 se neutralizará):

$\Rightarrow 5I_3 = -13e^{-3x}\cos(6x) + 23e^{-3x}\sin(6x)$

$= 13e^{-3x}[2\sin(6x) - \cos(6x)]$

$\Rightarrow \mathbf{I_3 = 115e^{-3x}[2\sin(6x) - \cos(6x)]}$

Multiplica la ecuación (3) por 2 y réstalas (el término I_3 se neutralizará):

$\Rightarrow 5I_1 = -23e^{-3x}\cos(6x) - 13e^{-3x}\sin(6x)$

$= -\ 13e^{-3x}[2\cos(6x) + \sin(6x)]$

$\Rightarrow \boldsymbol{I_1 = -\ 115e^{-3x}[2\cos(6x) + \sin(6x)]}$

Resuelve las ecuaciones (4) y (6) simultáneamente:

$2I_2 + 3I_4 = -e^{-3x}\cos(2x)$ ... (4)

$2I_4 - 3I_2 = e^{-3x}\sin(2x)$ ... (6)

Multiplica la ecuación (4) por 3 y la ecuación (6) por 2 y suma (el término I_2 se neutralizará):

$\Rightarrow 13I_4 = -3e^{-3x}\cos(2x) + 2e^{-3x}\sin(2x)$

$= e^{-3x}[2\sin(2x) - 3\cos(2x)]$

$\Rightarrow \boldsymbol{I_4 = 113e^{-3x}[2\sin(2x) - 3\cos(2x)]}$

Multiplica la ecuación (4) por 2 y la ecuación (6) por 3 y resta (el término I_4 se neutralizará):

$\Rightarrow 13I_2 = -\ 2e^{-3x}\cos(2x) - 3e^{-3x}\sin(2x)$

$= -\ e^{-3x}[2\cos(2x) + 3\sin(2x)]$

$\Rightarrow \boldsymbol{I_2 = -\ 113e^{-3x}[2\cos(2x) + 3\sin(2x)]}$

Sustituye en (1) y (2):

$\int y_2(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

$= 1954\int e^{-3x}[\sin(6x) - \sin(2x)]dx$ ... (1)

$= 1954[-\ 115e^{-3x}[2\cos(6x) + \sin(6x)] - [-113e^{-3x}[2\cos(2x) + 3\sin(2x)]]]$

$= e^{-3x}4[-13(2\cos(6x)+\sin(6x))+15(2\cos(2x)+3\sin(2x))]$

$\int y_1(x) f(x) \mathbf{W(y_1, y_2)}dx$

$= 1954\int e^{-3x}[\cos(6x) + \cos(2x)]dx$ ... (2)

$= 1954[115e^{-3x}[2\sin(6x) - \cos(6x)] + 113e^{-3x}[2\sin(2x) - 3\cos(2x)]]$

$= e^{-3x}4[13(2\sin(6x) - \cos(6x)) + 15(2\sin(2x) - 3\cos(2x))]$

Por lo que $y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{\mathbf{W(y_1, y_2)}}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{\mathbf{W(y_1, y_2)}}dx$

$= -e^{3x}\cos(2x)e^{-3x}4[-13(2\cos(6x)+\sin(6x)) + 15(2\cos(2x)+3\sin(2x))] + e^{3x}\sin(2x)e^{-3x}4[13(2\sin(6x) - \cos(6x)) + 15(2\sin(2x) - 3\cos(2x))]$

$= -14\cos(2x)[-13(2\cos(6x) - \sin(6x)) + 15(2\cos(2x) + 3\sin(2x))] + 14\sin(2x)[13(2\sin(6x) - \cos(6x)) + 15(2\sin(2x) - 3\cos(2x))]$

$= 14[26\cos(2x)\cos(6x) + 13\cos(2x)\sin(6x) - 30\cos^2(2x) - 45\cos(2x)\sin(2x) + 26\sin(2x)\sin(6x) - 13\sin(2x)\cos(6x) + 30\sin^2(2x) - 45\sin(2x)\cos(2x)]$

$= 14[26[\cos(2x)\cos(6x) + \sin(2x)\sin(6x)] + 13[\cos(2x)\sin(6x) - \sin(2x)\cos(6x)] - 30[\cos^2(2x) - \sin^2(2x)] - 45[\cos(2x)\sin(2x) + \sin(2x)\cos(2x)]]$

$= 14[26\cos(4x) + 13\sin(4x) - 30\cos(4x) - 45\sin(4x)]$

$= 14[-4\cos(4x) - 32\sin(4x)]$

$= -\cos(4x) - 8\sin(4x)$

Entonces la solución completa de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13y = 195\cos(4x)$ es

$\mathbf{y = e^{3x}(A\cos(2x) + iB\sin(2x)) - \cos(4x) - 8\sin(4x)}$

3.14 Ecuación lineal de Cauchy-Euler.

Definición: Una ecuación diferencial lineal de la forma

(1)anxndnydxn+an−1xn−1dn−1dxn−1+⋯+a1xdydx+a0y=g(x)

donde los coeficientes an, an−1,⋯,a0 son constantes, se conoce como **ecuación de Cauchy-Euler**.

Enseguida puedes darte cuenta que los coeficientes bn(x)=anxn,⋯,b1(x)=a1x1, b0(x)=a0x0, son dependientes de x, es decir, son coeficientes variables, además la característica importante de esta ecuación es que el grado k=n,n−1,⋯,1,0 de los coeficientes monomiales xk coincide con el orden k de la derivación dkydxk.

Como se ha hecho a lo largo de la unidad, vamos a desarrollar con todo detalle el método de resolución de la ecuación de Cauchy-Euler para el caso de segundo orden, recordando que es posible extender el método a cualquier orden n de manera análoga.

Iniciaremos nuestro análisis con un estudio detallado de las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

(2)ax2d2ydx2+bxdydx+cy=0

con a, b y c constantes. Para resolver la ecuación no homogénea

(3)ax2d2ydx2+bxdydx+cy=g(x)

con g(x)≠0, basta aplicar el método de variación de parámetros (o de coeficientes indeterminados) una vez que se ha determinado la función complementaria yc, es decir la solución general a la ecuación homogénea (2).

Una consideración importante es que el coeficiente ax2 de d2ydx2 es cero en x=0, para garantizar los resultados fundamentales del teorema de existencia y unicidad y sean aplicables a la ecuación de Cauchy-Euler debemos encontrar soluciones generales definidas en el intervalo δ=(0,∞). Las soluciones en el intervalo (−∞,0) se obtienen al sustituir t=−x en la ecuación diferencial.

Método de resolución

En el caso de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes propusimos como solución una función de la forma y=ekx, de manera similar, en este caso se prueba una solución de la forma y=xk, donde k es un valor que se debe determinar. Al sustituir xk, cada término de una ecuación de Cauchy-Euler se convierte en un polinomio en k veces xk, puesto que

anxndnydxn=anxn[k(k−1)(k−2)⋯(k−n+1)xk−n]=[ank(k−1)(k−2)⋯(k−n+1)]xk

Por ejemplo, cuando sustituimos y=xk y las respectivas derivadas en la ecuación de segundo orden se obtiene que

ax2d2ydx2+bxdydx+cy=ax2[k(k−1)xk−2]+bx[kxk−1]+cxk=ak(k−1)xk+bkxk+cxk(4)=[ak(k−1)+bk+c]xk

Así, y=xk es una solución de la ecuación diferencial homogénea siempre que k sea una solución de la ecuación auxiliar

(5)ak(k−1)+bk+c=0oak2+(b−a)k+c=0

Hay tres casos distintos a considerar que dependen de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales o complejas.

Caso 1: Raíces reales y distintas

Sean k1 y k2 las raíces reales de (5), tales que k1≠k2. Entonces y1=xk1 y y2=xk2 forman un conjunto fundamental de soluciones. El Wronskiano esta dado como

W(xk1,xk2)=|xk1xk2k1xk1−1k2xk2−1|=k2x(k1+k2−1)−k1x(k2+k1−1)

Como W(xk1,xk2)=(k2−k1)xk1+k2−1≠0, ∀x∈δ, entonces la solución general a la ecuación de Cauchy-Euler para x>0, en el caso en el que las raíces son reales y distintas, es

(6)y(x)=c1xk1+c2xk2

Caso 2: Raíces reales repetidas

Si las raíces de (5) son repetidas, es decir k1=k2, entonces se obtiene sólo una solución particular, y=xk1=xk2=xk. Cuando las raíces de la ecuación auxiliar (5) son iguales, el discriminante de los coeficientes necesariamente es cero, es así que de la fórmula cuadrática se deduce que las raíces deben ser k=−(b−a)2a.

Cuando estudiamos el método de reducción de orden vimos que conocida una solución no trivial y1, una segunda solución y2, tal que y1 y y2 formen un conjunto fundamental de soluciones, puede ser determinada por la expresión

(7)y2(x)=y1(x)∫e−∫P(x)dxy12(x)

Para usar este resultado escribamos a la ecuación de Cauchy-Euler en su forma estándar.

(8)d2ydx2+baxdydx+cax2y=0

Identificamos que P(x)=bax y Q(x)=cax2, vemos que

∫P(x)dx=∫baxdx=baln(x)

Sustituyendo en (7) obtenemos lo siguiente

y2(x)=xk∫e−(b/a)ln(x)x2kdx=xk∫x−b/ax2kdx=xk∫x−b/ax−(b−a)/adx=xk∫dxx=xkln(x)

En el proceso se ha considerado que e−(b/a)ln(x)=eln(x−b/a)=x−b/a y 2k=−(b−a)a.
Entonces y2=xkln(x). Vemos que

$$W(x^k, x^k\ln(x)) = \begin{vmatrix} x^k & x^k\ln(x) \\ kx^{k-1} & kx^{k-1}\ln(x)+x^{k-1} \end{vmatrix} = kx^{2k-1}\ln(x)+x^{2k-1}-kx^{2k-1}\ln(x) = x^{2k-1}$$

Como $W(x^k, x^k\ln(x)) = x^{2k-1} \neq 0$, $\forall x \in \delta$, entonces la solución general a la ecuación de Cauchy-Euler para $x>0$, en el caso en el que las raíces son iguales, es

$$(9) \quad y(x) = c_1x^k + c_2x^k\ln(x)$$

Para ecuaciones de orden superior, si k es una raíz de multiplicidad r, entonces se puede demostrar que $x^k, x^k\ln(x), x^k(\ln(x))^2, \cdots, x^k(\ln(x))^{r-1}$ son r soluciones linealmente independientes. En correspondencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de estas r soluciones.

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Si las raíces de (5) son el par conjugado $k_1=\alpha+i\beta$ y $k_2=\alpha-i\beta$, donde α y $\beta>0$ son reales, entonces una solución es

$$(10) \quad y(x) = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$$

De tarea moral muestra que $W(x^{\alpha+i\beta}, x^{\alpha-i\beta}) = -2i\beta x^{2\alpha-1} \neq 0$, lo que indica que la solución (10) está compuesta por las funciones del conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler.

Tal como lo hicimos en el caso de coeficientes constantes, se desea escribir la solución sólo en términos de funciones reales. Consideremos la identidad

$$(11) \quad x^{i\beta} = (e^{\ln(x^{i\beta})}) = e^{i\beta\ln(x)}$$

Usando la fórmula de Euler podemos escribir

$$(12) \quad x^{i\beta} = \cos(\beta\ln(x)) + i\sin(\beta\ln(x))$$

De forma similar,

$$(13) \quad x^{-i\beta} = \cos(\beta\ln(x)) - i\sin(\beta\ln(x))$$

Si se suman y restan los dos últimos resultados, se obtiene lo siguiente, respectivamente

$$(14) \quad x^{i\beta}+x^{-i\beta} = 2\cos(\beta\ln(x)) \quad y \quad x^{i\beta}-x^{i\beta} = 2i\sin(\beta\ln(x))$$

Debido a que (10) es una solución para cualquier valor de las constantes, podemos notar que si elegimos $C_1=C_2=1$ y, por otro lado, $C_1=1, C_2=-1$, obtenemos las siguientes dos soluciones, respectivamente

$$(15) \quad y_1=x^{\alpha}(x^{i\beta}+x^{-i\beta}) \quad y \quad y_2=x^{\alpha}(x^{i\beta}-x^{-i\beta})$$

que si usamos (14) podemos escribir como

$$(16) \quad y_1=2x^{\alpha}\cos(\beta\ln(x)) \quad y \quad y_2=2ix^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))$$

De tarea moral muestra que $W(x^{\alpha}\cos(\beta\ln(x)), x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x)))=\beta x^{2\alpha-1}\neq 0$, con esto se concluye que

$$(17) \quad y_1=x^{\alpha}\cos(\beta\ln(x)) \quad y \quad y_2=x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Así, la solución general a la ecuación de Cauchy-Euler para $x>0$, en el caso en el que las raíces son complejas conjugadas, es

$$(18) \quad y(x)=x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln(x))+c_2\sin(\beta\ln(x))]$$

Realicemos algunos ejemplos en los que apliquemos cada caso.

Ejemplo: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{3}x\frac{dy}{dx}-\frac{2}{9}y=0$.

Solución: Consideremos la solución $y=x^k$, las respectivas derivadas son

$$\frac{dy}{dx}=kx^{k-1} \quad y \quad \frac{d^2y}{dx^2}=k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial

$$x^2[k(k-1)x^{k-2}]+\frac{2}{3}x[kx^{k-1}]-\frac{2}{9}x^k=x^k\left[k(k-1)+\frac{2}{3}k-\frac{2}{9}\right]=0$$

Como $x\neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es

$$k(k-1)+\frac{2}{3}k-\frac{2}{9}=0 \quad o \quad k^2-\frac{1}{3}k-\frac{2}{9}=0$$

Resolviendo para k obtenemos las raíces $k_1=\frac{2}{3}$ y $k_2=-\frac{1}{3}$. Como las raíces son reales y distintas, de acuerdo a (6), la solución a la ecuación de Cauchy-Euler es

$$y(x)=c_1x^{2/3}+c_2x^{-1/3}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$.

Solución: Consideremos la solución $y=x^k$, las respectivas derivadas son

$$\frac{dy}{dx}=kx^{k-1} \quad y \quad \frac{d^2y}{dx^2}=k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial

$$x^2[k(k-1)x^{k-2}]+3x[kx^{k-1}]+x^k=x^k[k(k-1)+3k+1]=0$$

Como $x\neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es

$$k(k-1)+3k+1=0 \quad o \quad k^2+2k+1=0$$

Resolviendo para k obtenemos las raíces $k_1=k_2=-1$. Como las raíces son reales repetidas, por (9) concluimos que la solución general a la ecuación de Cauchy-Euler es

$$y(x)=c_1x^{-1}+c_2x^{-1}\ln(x)=\frac{1}{x}[c_1+c_2\ln(x)]$$

Ejemplo: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler: $3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}+y=0$.

Solución: Consideremos la solución $y=x^k$, las respectivas derivadas son

$$\frac{dy}{dx}=kx^{k-1} \quad y \quad \frac{d^2y}{dx^2}=k(k-1)x^{k-2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial

$$3x^2[k(k-1)x^{k-2}]+6x[kx^{k-1}]+x^k=x^k[3k(k-1)+6k+1]=0$$

Como $x\neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es

$$3k(k-1)+6k+1=0 \quad o \quad 3k^2+3k+1=0$$

Resolviendo para k obtenemos las raíces $k_1=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{3}}$ y $k_2=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Identificamos que $\alpha=-\frac{1}{2}$ y $\beta=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Las raíces son complejas conjugadas de manera que la solución esta dada por (18), así, la solución general a la ecuación de Cauchy-Euler es

$$y(x)=x^{-1/2}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(x)\right)+c_2\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(x)\right)\right]$$

Caso no homogéneo

Para resolver la ecuación no homogénea (3) podemos aplicar el método de variación de parámetros visto en la entrada anterior, pues basta encontrar el conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de la ecuación homogénea asociada y con ello aplicar la fórmula de la solución particular, esto es

$$(19) \quad y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

Recuerda que la función $g(x)$ se obtiene de la **forma estándar** de la ecuación diferencial.

Realicemos un ejemplo.

Ejemplo: Usando el método de variación de parámetros, resolver la ecuación de Cauchy-Euler: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2x$.

Solución: Primero vamos a obtener la solución complementaria considerando la solución $y = x^k$ y sus derivadas $\frac{dy}{dx} = kx^{k-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = k(k-1)x^{k-2}$. Sustituyendo en la ecuación homogénea asociada tenemos

$$x^2[k(k-1)x^{k-2}] - x[kx^{k-1}] + x^k = x^k[k(k-1) - k + 1] = 0$$

Como $x \neq 0$, entonces la ecuación auxiliar es $k^2 - 2k + 1 = 0$, de donde $k_1 = k_2 = 1$, así la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1x + c_2x\ln(x)$$

Identificamos que $y_1 = x$ y $y_2 = x\ln(x)$ conforman al conjunto fundamental de soluciones. Para determinar el Wronskiano vamos a considerar la primer derivada de cada solución

$$\frac{dy_1}{dx} = 1 \qquad \frac{dy_2}{dx} = \ln(x) + 1$$

Sustituimos en el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln(x) \\ 1 & \ln(x)+1 \end{vmatrix} = x\ln(x) + x - x\ln(x) = x$$

El Wronskiano es $W = x$. Para determinar la función g vamos a dividir por x^2 la ecuación diferencial y así escribirla en su forma estándar.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = \frac{2}{x}$$

Vemos que g(x)=2x. Ahora podemos sustituir en la solución particular (19)

yp(x)=−x∫xln(x)(2x)xdx+xln(x)∫x(2x)xdx=−2x∫ln(x)xdx+2xln(x)∫dxx=−2x(ln(x))22+2x(ln(x))2=x(ln(x))2

La solución particular es

yp(x)=x(ln(x))2

Por lo tanto, la solución general a la ecuación de Cauchy-Euler será la superposición de ambas soluciones, esto es

y(x)=c1x+c2xln(x)+x(ln(x))2

3.15.- Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Una Ecuación Diferencial Ordinaria NO HOMOGÉNEAS se escribe de la siguiente forma

$$ao(x)\, y' + a1(x)\, y = f(x)$$

Observemos que este tipo de ecuaciones son muy parecidas a las ecuaciones diferenciales homogéneas a diferencia de que en el lado derecho de la igualdad en vez de tener 0 contamos con una función f(x) adicional.

Este tipo de Ecuaciones pueden resolverse con el método de Factor Integrante visto anteriormente en el parcial 1, aun así recordaremos este método en el siguiente video o puedes ir al link de abajo para que veas este método paso a paso.

Ecuaciones Diferenciales De Bernoulli

Este tipo de Ecuaciones Diferenciales se escriben de la siguiente forma y son muy parecidas a las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

$$ao(x)\,y' + a1(x)\,y = f(x)y^r$$

Donde se tendrá una variable "y" elevada a una potencia "r" donde r puede ser cualquier número real incluido el 0.

Observación:

Si la potencia r = 0 se obtendrá una ecuación diferencial lineal no homogénea de la forma debido a que un numero elevado a una potencia 0 siempre será igual a 1.

$$ao(x)\,y' + a1(x)\,y = f(x)$$

Para resolver este tipo de Ecuaciones Diferenciales existe un proceso especial.

1.-Multiplicamos la ED por y elevada a la -r, obteniendo lo siguiente:

$$ao(x)\,y^{-r}y' + a1(x)\,y^{1-r} = f(x)$$

2.-Dado que estamos buscando una ED lineal proponemos un cambio de variable de la siguiente forma al que le denominamos u

$$\boldsymbol{u = y^{1-r}}$$

3.-Ahora teniendo nuestra variable u, encontraremos su derivada u' obteniendo lo siguiente

$$u' = (1-r)y^{1-r-1}y' \rightarrow u' = (1-r)y^{-r}y'$$

Observemos que el valor de u' y de u son muy parecidos a los de la ED original por lo que podemos poner nuestra ED en términos de u realizando ciertas compensaciones algebraicas, una vez hecho esto la ED original quedara de la siguiente forma. .

$$ao(x)\, y^{-r} y' + a1(x)\, y^{1-r} = f(x)$$

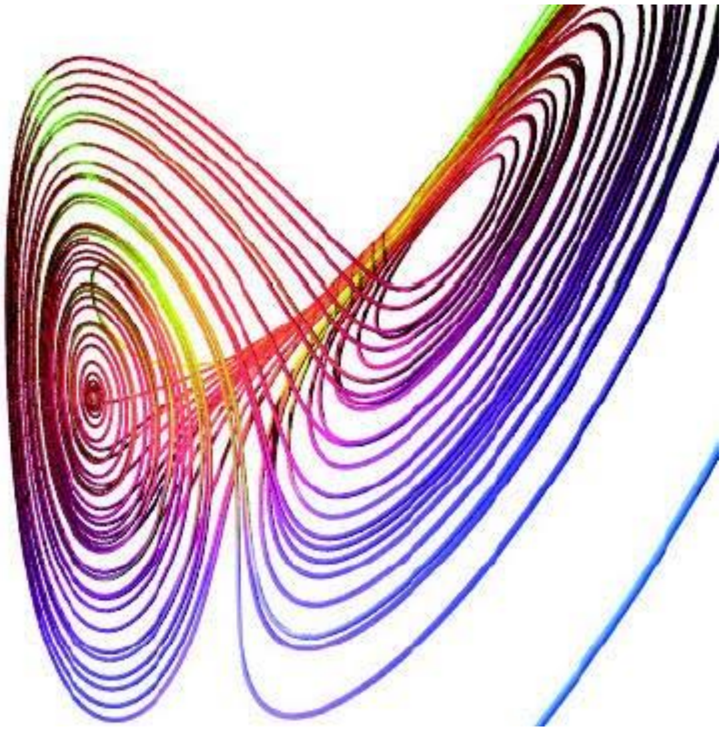
$$\frac{ao(x)}{(1-r)} u' + a1(x)u = f(x)$$

4.-En vista que ya tenemos una ED lineal podemos proceder a resolverla mediante el método de factor integrante y al final se reemplaza el valor original de u en este caso siendo u = y elevado a la 1-r.

UNIDAD IV: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y SERIES DE FOURIER

4.1.- Trayectorias Ortogonales.

Trayectorias Ortogonales



¿Cómo encontrar la familia ortogonal de una familia dada?

Tenemos una familia de curvas de la forma:

$$y = cx^2.$$

En donde c se comporta como una constante

Paso 1:Despejamos "c"

$$\frac{y}{x^2} = c$$

Paso 2: Calculamos la ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas

$$F(x,y) = \frac{y}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} F_x = y\left(-\frac{2x}{x^4}\right) = -\frac{2y}{x^3}. \\ F_y = \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Nota: Fx representa a la derivada de la función con respecto a x, mientras que Fy representa a la derivada de

Paso 3: Escribimos la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-\frac{2y}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2y}{x}.$$

Paso 4: Para encontrar ahora la trayectoria ortogonal se debe obtener el recíproco negativo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = -\frac{x}{2y}.$$

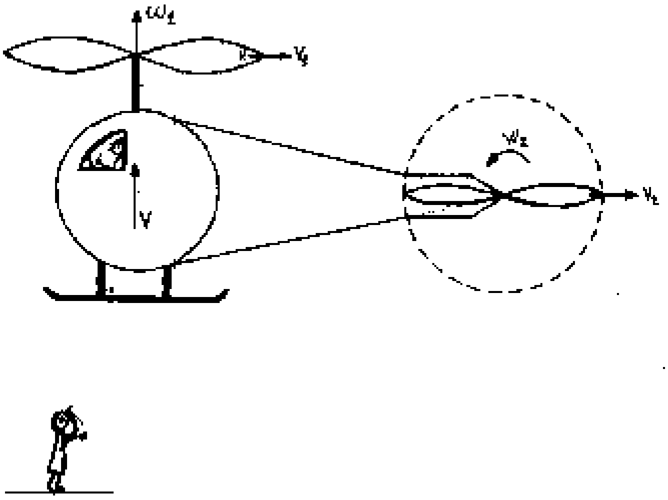
Paso 5: El recíproco negativo siendo una ecuación diferencial, se resuelve por alguno de los métodos conoci

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow 2y\,dy = -x\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int 2y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C \Rightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1;$$

La última ecuación es la familia ortogonal de la primera familia de curvas

4.2.- Problemas de Mecánica.

Un helicóptero como el representado en la figura adjunta comienza a elevarse del suelo a una velocidad constante $\vec{v}$, al tiempo que las aletas principal y secundaria giran con velocidades también constantes $\vec{w}$ 1y$\vec{w}$ 2.

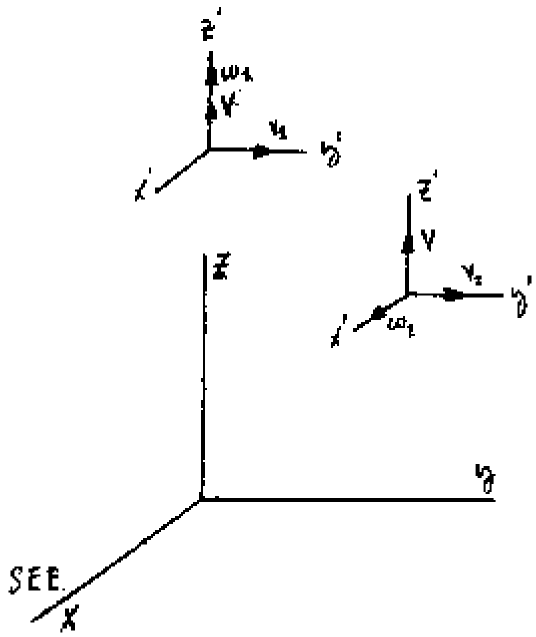


Sobre el suelo se encuentra un observador que "ve" sobre una de las aspas principales un insecto que se encuentra casi en el extremo de ella y se acerca a dicho punto con una velocidad constante $\vec{v}_1$.

De igual forma, otro insecto se encuentra en las mismas circunstancias sobre una de las aspas secundarias, siendo su velocidad respecto al eje de dicha aspa constante y de valor $\vec{v}_2$.

¿Cuál es la velocidad de cada uno de los insectos respecto al hombre?

En este tipo de problemas la mayor dificultad se presenta al elegir los ejes de coordenadas. Vamos a resolver en primer lugar el caso primero, para lo cual tomamos como sistema inercial (SI) uno ligado al hombre y como sistema no inercial (SIN) uno con origen en el eje de las aletas y de ejes paralelos al SI.



Según las ecuaciones de la cinemática relativa, la expresión general de la velocidad de un punto respecto a un sistema inercial vale:

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} + \vec{w} \wedge \vec{r}\,'$

y la aceleración viene dada por:

$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a} + \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\,' + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}\,') + 2(\vec{w} \wedge \vec{v}\,')$

para nuestro caso tenemos:

$\vec{v}\,' = v1 \cdot \hat{j}; \vec{V} = V \cdot \hat{k}; \vec{w} = w1 \cdot \hat{k} \vec{r}\,' = r1 \cdot \hat{j}; \vec{a} = 0; A = 0; \dot{\vec{w}} = 0$

y sustituyendo en la expresión general, nos queda:

$\vec{v} = v1\hat{j} + V\hat{k} + w1\cdot\hat{k}\wedge r1\hat{j} = v1\hat{j} + V\hat{k} - w1r1\hat{i}\vec{a} = w1\cdot\hat{k}\wedge(w1\cdot\hat{k}\wedge r1\cdot\hat{j}) + 2(w1\cdot\hat{k}\wedge v1\cdot\hat{j}) == -w21r1\cdot\hat{j} - 2w1r1\cdot\hat{i}$

que son las expresiones que nos dan la velocidad y aceleración del primer insecto respecto del hombre.
Para el segundo caso hacemos de forma semejante pero considerando que ahora se tiene w = w_2 î
Resulta entonces:

$\vec{v} = v2\cdot\hat{j} + V\cdot\hat{k} + w2\cdot\hat{i}\wedge r2\cdot\hat{j} = v2\cdot\hat{j} + (V - w2r2)\hat{k}\square\vec{a} = w2\cdot\hat{i}\wedge(w2\cdot\hat{i}\wedge r2\cdot\hat{j}) + 2(w2\cdot\hat{i}\wedge v2\cdot\hat{j}) = \square = -w22r2\cdot\hat{j} - 2w2r2\cdot\hat{k}$

que son las expresiones que nos dan la velocidad y aceleración del segundo insecto con respecto al observador que está en el suelo.

4.3.- Problemas de razón de cambio.

PROBLEMA RESUELTO 1 Una piscina tiene 50 pies de largo y 20 pies de ancho. Su profundidad varía de manera uniforme desde 2 pies en su parte menos profunda, hasta 12 pies en la parte profunda, como se muestra en la figura. Si la piscina es vaciada utilizando una bomba de agua a razón de 50 pies cúbicos por minuto. ¿A qué razón está disminuyendo la profundidad en la parte más honda, cuando la altura del agua ahí es de 6 pies? Solución Observe que en este problema la derivada conocida es la razón de cambio del volumen de agua en la piscina con respecto al tiempo. Mientras que la derivada que se busca es la razón a la cual cambia la altura del agua. Si V es el volumen de agua, entonces 3 pies 50 min dV dt = Si h es la altura del agua en la parte profunda, debemos encontrar dh dt , cuando h = 6 . El volumen del agua está dado por Área del tríangulo ancho de la piscina =(A) (20) V = × × Como se muestra en la figura siguiente, se utilizarán triángulos semejantes para expresar el volumen en términos de h. 50 10 50 5 10 x h h x h = = = Ahora se puede expresar el volumen de agua en la piscina en términos de la variable h ( ) 2 1 20 10 2 10 5 50 V xh xh h h h = · = = = Observe que en este momento ya se tiene una ecuación que relaciona las variables h y V. h es la variable cuya derivada se busca y V es la variable cuya derivada se conoce. Derivando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo ( ) ( ) 2 D V D h t t = 50 Como la variable independiente es el tiempo, se usa derivación implícita para calcular la derivada (100) 100 t t t t D V h D h D V D h h = = Ahora que ya se a calculado la razón de cambio de h, solamente hace falta evaluar la derivada cuando h = 6 6 50 1 pies 100 6 12 min.

PROBLEMA RESUELTO 2 La parte superior de una escalera de 20 pies de largo resbala sobre una pared vertical a razón de 0.5 pies por segundo. El otro extremo de la escalera resbala sobre una superficie horizontal alejándose de la pared. a. Calcule la razón a la cual se mueve la parte inferior de la escalera sobre el piso horizontal, cuando la parte superior se encuentra a una altura de 8 pies sobre el suelo. b. Calcule la razón a la cual cambia el ángulo formado entre la escalera y el piso, cuando la parte superior se encuentra a una altura de 8 pies sobre el suelo Solución a. La siguiente figura muestra la escalera apoyada sobre la pared vertical, h representa la altura del extremo superior de la escalera y x representa la distancia entre la pared y la parte inferior de la escalera La parte superior de la escalera resbala a 0.5 pies por segundo, entonces 0.5 t D h = – El signo negativo se debe a que h está disminuyendo al aumentar el tiempo Se quiere calcular t D x cuando h es igual a 8 pies. Utilizando el teorema de Pitágoras 2 2 2 x h + = 20 Derivando ambos lados de la ecuación y despejando t D x ( ) ( ) 2 2 2 20 2 2 0 2 2 t t t t t t t D x h D x D x h D h h D h D x x h D h D x x + = · + · = · = – · = – Como la derivada depende de x y de h hay que calcular el valor de x cuando h = 8 2 2 2 2 2 2 20 20 400 8 336 4 21 x h x h + = = – = – = = Calculando t D x cuando h = 8 8 (8) (0.5) pies 0.218 4 21 seg t h D x = · – = – ≈ b. En este caso debemos relacionar el ángulo formado entre la escalera y el piso con la altura h como se muestra en la figura siguiente θ h 20 sen 20 h θ = Derivando respecto al tiempo ( ) sen 20 1 cos 20 1 20cos t t t t t h D D D D h D D h θ θ θ θ θ ⎛ ⎞ = ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ · = = Para evaluar la derivada cuando h = 8 note que 4 21 21 cos 20 20 5 x θ = = = Ahora se puede evaluar la razón a la cual cambia el ángulo 8 1 1 rad (0.5) 0.027 21 8 21 seg 20 5 t h D θ = – = · – = ≈ – · El signo negativo indica que el ángulo está disminuyendo cuando la escalera resbala sobre la pared.

4.4.- Problemas en Circuitos Eléctricos.

Dos resistencias conectadas en paralelo a 110 V. consumen la misma potencia que conectadas en serie a 220 V. Hallar la relación entre las resistencias.

Conociendo la resistencia y la diferencia de potencial, la potencia vale:

P=*V*2*R*

La potencia es la misma en ambos casos y la resistencia equivalente en un circuito en paralelo y en uno en serie es:

en paral. 1*Rep*=1*R*1+1*R*2=*R*1+*R*2*R*1·*R*2⇒*Rep*=*R*1·*R*2*R*1+*R*2□ en serie *Res*=*R*1+*R*2

de donde podemos hacer:

*P*1=*P*2;*V*21*R*1·*R*2*R*1+*R*2=*V*22*R*1+*R*2

Y sustituyendo los valores numéricos de los voltajes se tendrá:

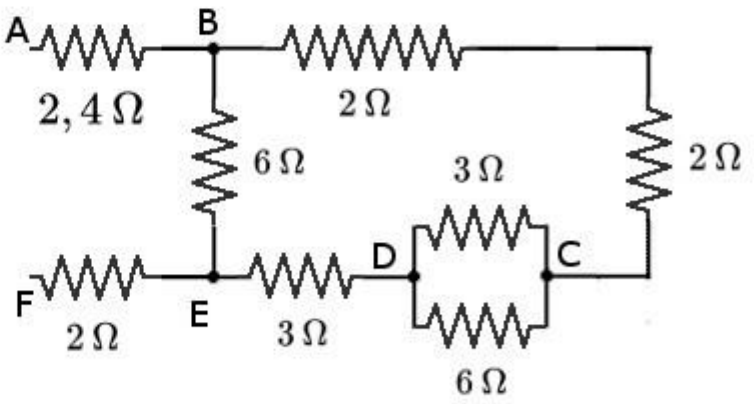
$(R1+R2)2R1\cdot R2=4\Rightarrow R21+2R1R2+R22=4R1R2$

Y simplificando:

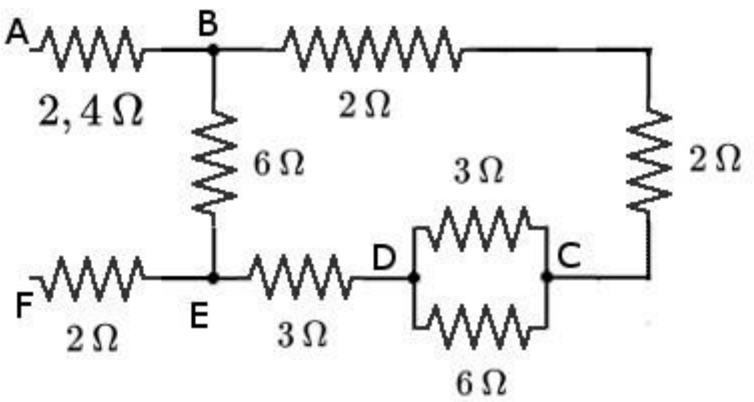
$(R1-R2)2=0\Rightarrow R1-R2=0\Rightarrow R1=R2$

es decir las dos resistencias deben ser iguales.

Hallar la resistencia equivalente del montaje de la figura entre A y F. SI el montaje se conecta a una tensión de 16 V. Calcular la distribución de intensidades entre las resistencias comprendidas entre los puntos C y D .



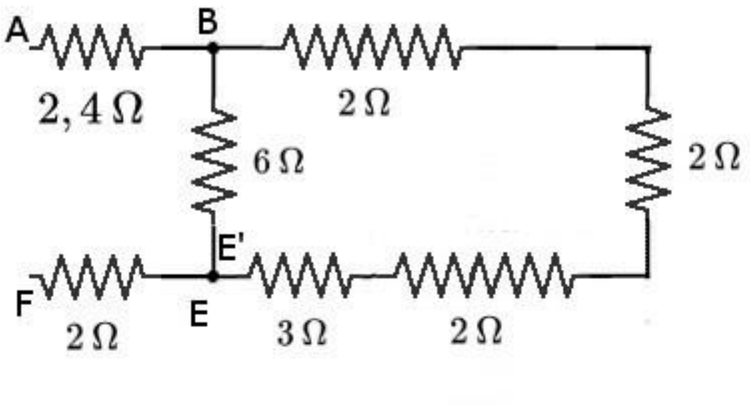
Calculamos la resistencia equivalente entre C y D .



Por ser en paralelo, tendremos:

$1RCD=13+16=918\Rightarrow RCD=2\Omega$

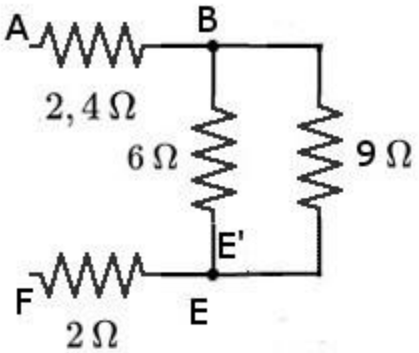
Calculamos la resistencia equivalente



entre B y el punto E, pero pasando por la resistencia que hemos calculado (E') que es en serie:

$RBE'=2+2+2+3=9\Omega$

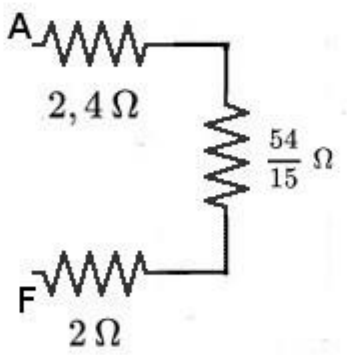
Calculamos ahora la resistencia equivalente entre B y E .



Por ser en paralelo, tendremos:

$1RBE=16+19=1554\Rightarrow RBE=5415\Omega$

Finalmente, la resistencia entre A y F,



al estar en serie, valdrá:

$RAF=2,4+5415+2=8\Omega$

Y esa será la resistencia total equivalente del circuito, con lo que la intensidad valdrá:

$IT=VRAF=168=2Amp.$

Al estar las resistencias del circuito final A-F conectadas en serie, la intensidad vale igual en todos puntos. Si entre B y E hay una resistencia de (54/15 ohmios) la diferencia de potencial entre dichos puntos valdrá:

$VB-E=5415\times2=7,2V.$

La parte B-E del circuito consta de 2 resistencias (una de 9 ohmios y otra de 6 ohmios)por lo tanto, por la de 9 ohmios circulará una corriente de intensidad:

$I9=5415\times2\times19=45Amp.$

Observamos que el circuito B-E' es el mismo que el B-E una vez desarrolladas en él todas las resistencias. Al estar en serie, la intensidad vale igual en todos los puntos y la diferencia de potencial entre D y C vale:

$VDC=19=45\times2=85Voltios$

Desglosando las resistencias entre D y C tenemos:

$IR3=VR3=85\times13=815A;IR6=VR6=85\times16=415A$

Y esa es la distribución de intensidades entre las resistencias comprendidas entre los puntos C y D

4.5.- Problemas de Termofluidos.

1. Hemos estudiado que la energía cinética de un cuerpo en movimiento está relacionada con su velocidad. ¿Forma parte esta energía cinética de la energía térmica del objeto en movimiento?
2. ¿Por qué las partículas de un sólido sólo pueden presentar movimiento de vibración?

1.

No, la energía térmica es un tipo de *energía interna*, asociada a la energía cinética y potencial de las partículas *en el interior* del cuerpo. Por otro lado, la energía cinética global no es energía interna.

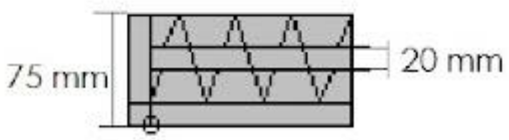
2.

En los sólidos, las partículas se encuentran en posiciones fijas y próximas entre sí, de una manera ordenada y las fuerzas que las unen son grandes. Las partículas no pueden trasladar su posición en el interior de la sustancia facilmente, ni tampoco rotar. Simplemente pueden vibrar u oscilar en torno a una posición de equilibrio. Cuando esta oscilación es muy grande, debido a que se les ha suministrado mucha energía, se rompen algunos enlaces dando lugar al estado líquido, donde las partículas pueden moverse con mayor libertad.

4.6.- Problemas de Circuitos Hidráulicos y Neumáticos

Ejercicio No 1 :

Se mueve un cilindro de simple efecto con un fluido. El diámetro del pistón es 75 mm y el diámetro del vástago de 20 mm, la presión de trabajo es de $6x10^5$ pa (1 pa = 1N /mm^2) y la resistencia del muelle es de 60 N. su rendimiento es del 90% calcule:



a) La fuerza teórica que el cilindro entrega en su carrea de avance.

b) La fuerza real o efectiva del cilindro.

Diámetro del vástago sobra porque es de simple efecto.

$$Fteorica = S_A - P = \pi \frac{0.075^2\, m^2}{4} 6.10^5 \frac{N}{m^2} = 2650.72\ N$$

$$Freal = \eta\, (Fteorica - Fmuelle) = 0.9\,(2650.72\ N - 60N)$$

$$= 2331.65N$$

Ejercicio No 2 :

a) Que caudal se necesitara para que un cilindro de simple efecto de 30 mm de diámetro recorra una distan sea de 250 mm en 0.8 segundos?

b) Dependiendo de su función, describa brevemente tres tipos distintos de válvulas hidráulicas.

Solución:

$$a)\ C = Sv = SL/t = \pi - \Phi/4.L/t = \frac{\pi 0.3^2\, dm^2}{4} \cdot \frac{2{,}5\, dm}{0.8/60 min} = 13.25$$

$$dm3/min$$

a) Escoger tres de estos 4 tipos:

Ø Válvulas distribuidoras: determinar la apertura y cierre y las modificaciones en el sentido de flujo del aire. Ej. 2/2, 3/2, 5/2, 5/3 ect.

Ø Válvulas de bloqueo: corta el paso del aire comprimido. Son: antirretorno, selectora, de simultaneidad, de escape rápido, estranguladora unidireccional.

Ø Válvulas reguladoras de caudal: influyen en la cantidad de caudal que circulan son: estranguladora bidireccional.

Ø Válvulas reguladoras de presión: actúan sobre la presión del aire controlándola desde un valor nulo hasta el máximo valor de alimentación. Son :

· Válvula reductora de precio: se usan para fijar una presión de salida independientemente de la presión de entrada.

· Válvula limitadora de presión: son válvulas de seguridad. Impide que la presión de un sistema sea mayor que la fijada manualmente mediante un tornillo.

· Válvula de secuencia: el principio de funcionamiento es el mismo que el de limitadora, pero en lugar de conectar a escape se conecta después de un deposito para temporizar y la salida de la misma pilotaría una válvula 5/2.

4.7.- Métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

El método de Euler es el más simple de los métodos numéricos resolver un problema del siguiente tipo:

$$PVI = \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_i) = ? \end{cases}$$

Consiste en multiplicar los intervalos que va de x_o a x_f en n subintervalos de ancho h; osea:

$$h = \frac{x_f - x_o}{n}$$

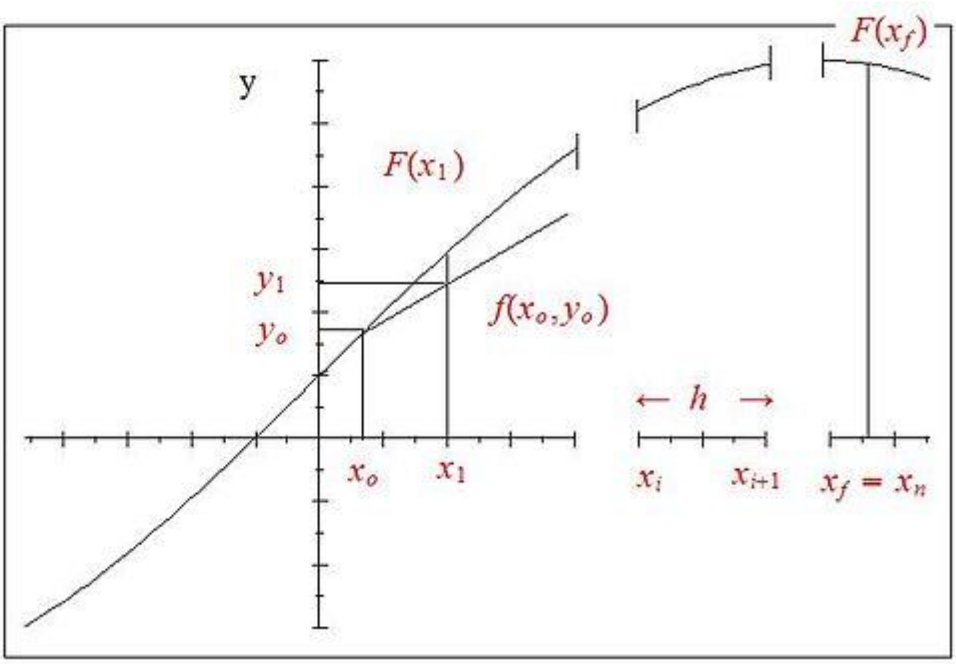
de manera que se obtiene un conjunto discreto de $n+1$ puntos: $x_o, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ del intervalo de interes $[x_o, x_f]$. Para cualquiera de estos puntos se cumlple que:

$$x_i = x_0 + ih, 0 \leq i \leq n.$$

La condición inicial $y(x_o) = y_o$, representa el punto $P_o = (x_o, y_o)$ por donde pasa la curva solución de la ecuación de el planteamiento inicial, la cual se denotará como $F(x) = y$.

Ya teniendo el punto P_o se puede evaluar la primera derivada de $F(x)$ en ese punto; por lo tanto:

$$F'(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_o} = f(x_o, y_o)$$



Grafica A.

Con esta información se traza una recta, aquella que pasa por P_o y de pendiente $f(x_o, y_o)$. Esta recta aproxima $F(x)$ en una vecindad de x_o. Tómese la recta como reemplazo de $F(x)$ y localícese en ella (la recta) el valor de y correspondiente a x_1. Entonces, podemos deducir segun la Gráfica A:

$$\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = f(x_o, y_o)$$

Se resuelve para y_1:

$$y_1 = y_o + (x_1 - x_o) f(x_o, y_o) = y_o + h f(x_o, y_o)$$

Es evidente que la ordenada y_1 calculada de esta manera no es igual a $F(x_1)$, pues existe un pequeño error. Sin embargo, el valor y_1 sirve para que se aproxime $F'(x)$ en el punto $P = (x_1, y_1)$ y repetir el procedimiento anterior a fin de generar la sucesión de aproximaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_o + h f(x_o, y_o) \\
y_2 &= y_1 + h f(x_1, y_1) \\
&\vdots \\
y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

Método de Euler Mejorado

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

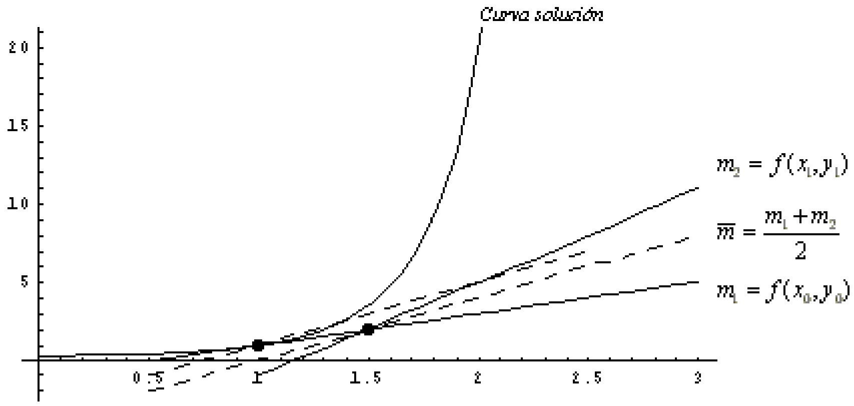
La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2} \right]$$

Donde

$$y^*_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación, con base en la siguiente gráfica:



En la gráfica, vemos que la pendiente promedio $\overline{m}$ corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1, y_1) donde y_1 es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$ como la aproximación de Euler mejorada.

Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un método genérico de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta.

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son un conjuntos de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, delproblema de valor inicial.

Sea

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

una ecuación diferencial ordinaria, con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde Ω es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de f sea

$$(t_0, y_0) \in \Omega.$$

Entonces el método RK (de orden s) tiene la siguiente expresión, en su forma más general:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i ,$$

donde h es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el incremento Δt_n entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1}. Los coeficientes k_i son términos de aproximación intermedios, evaluados en f de manera local

$$k_i = f\left(t_n + h\,c_i \,, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \quad i = 1, ..., s.$$

con a_{ij}, b_i, c_i coeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la regla de cuadratura utilizada. Los esquemas Runge-Kutta pueden ser explícitos o implícitos dependiendo de las constantes a_{ij} del esquema. Si esta matriz es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero; es decir, $a_{ij} = 0$ para $j = i, ..., s$, los esquemas son explícitos.

4.8.- Introducción a las series de Fourier.

La Serie de Fourier es una herramienta matemática que nos permite obtener información de una función determinada mediante una transformación (donde entenderemos por "transformación" al proceso que reduce la complejidad de una ecuación). Por lo tanto, cuando se hace referencia a la Serie de Fourier (sf), realmente hablamos de la transformación que nos permite extraer información sobre la frecuencia de un ciclo –puede ser cualquier función– cuando conocemos sólo una parte de su comportamiento.

La idea intrínseca de la sf nos indica que cualquier función, generalmente periódica, se puede aproximar por medio de funciones simples sinusoidales[1]. De forma que cuanto más coincide una onda simple con el dato observado, más peso tiene en la determinación de la función original. (Con este procedimiento es posible representar funciones deterministas o de índole aleatoria.)

Con la sf se adquiere un cambio en el dominio de la función; al pasar de la información contenida en una señal, al dominio en el tiempo, para transitar al de la frecuencia y viceversa, de suerte tal que se mejora el análisis de la señal (Carrillo, 2003). Así que las sf son útiles en el estudio de funciones periódicas, aunque, desafortunadamente, no aparecen con la misma frecuencia en la vida real como las no periódicas.

4.9.- Series de Fourier.

Definición: Un polinomio trigonométrico de grado, a lo más, *n* es cualquier función de la forma

$$r(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}\left(a_k\cos(kx)+b_k sen(kx)\right)\ldots(1)$$

Donde *r*(*x*) es una función periódica de periodo 2π, ie,*r*(*x*)=*r*(*x*+2*π*) para toda x∈R con coeficientes

$$a_0=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(x_n)\ldots(1.1)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(x_n)\cos(kx_n)\forall k=1,2,\ldots,N-1\ldots(1.2)$$

$$b_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(x_n)sen(kx_n)\forall k=1,2,\ldots,N-1\ldots(1.3)$$

De (1) haremos las siguientes observaciones:*eix*=*cos*(*x*)+*isen*(*x*) y por Moivre se tiene *ei(kx)*=*cos*(*kx*)+*isen*(*kx*), donde recordemos que para todo *c*∈C *c*=*a*+*ibt* para todo *a,b*∈R y si adicionalmente en (1) iniciamos la suma desde,entonces podemos reescribir a (1) como:

$$r'(x)=\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{i(kx)}=c_0e^{i(0)x}+\ldots+c_{N-1}e^{i(N-1)x}\ldots(2)$$

Con coeficientes

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(x_n)e^{-ikx_n}\ \forall k=1,2,\ldots,N-1\ldots(2.1)$$

No debemos olvidar que *r'*(*x*) está compuesto por coeficientes complejos, por lo que *r'*(*x*)=*Re*(*r'*(*x*))+*Im*(*r'*(*x*)) , además *r*(*x*)=*Re*(*r'*(*x*)) y por construcción tenemos la peculiaridad de *f*(*xn*)=*r*(*xn*)=*r'*(*xn*)∀.*n*=*1*,...,*N-1*

4.10.- Ley de Senos y Cosenos

Teorema del seno

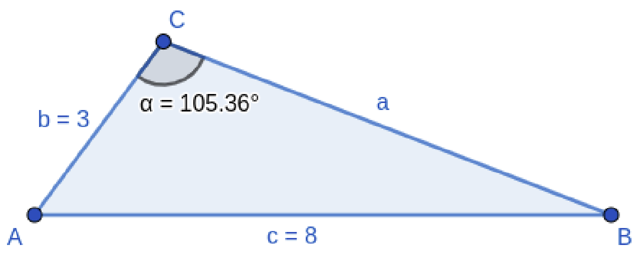
Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

$$\frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{b}{\text{sen}\ B} = \frac{c}{\text{sen}\ C}$$

Aplicaciones

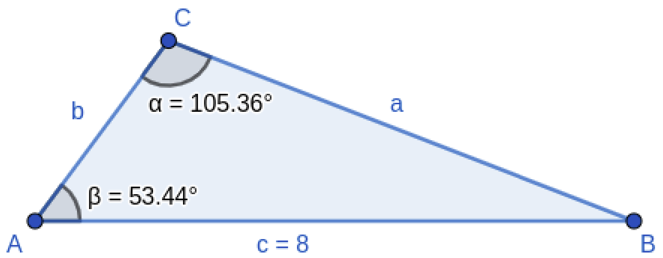
Este teorema es útil para resolver problemas si los datos dados entran en alguno de los siguientes casos:

1 Si tenemos las medidas de 2 lados de un triángulo, y el ángulo opuesto a uno de ellos.



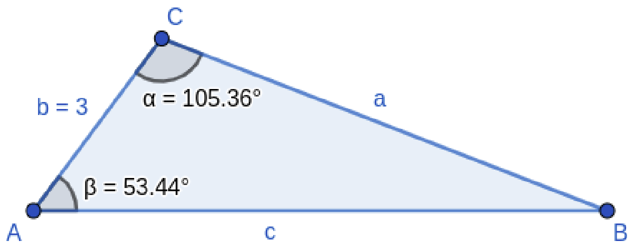
Aplicando el teorema inmediatamente puedo obtener el ángulo opuesto al otro lado que conocemos

2 Si tenemos las medidas de 2 ángulos de un triángulo, y el lado opuesto a uno de ellos.



Aplicando el teorema inmediatamente puedo obtener el lado opuesto al otro ángulo que conocemos.

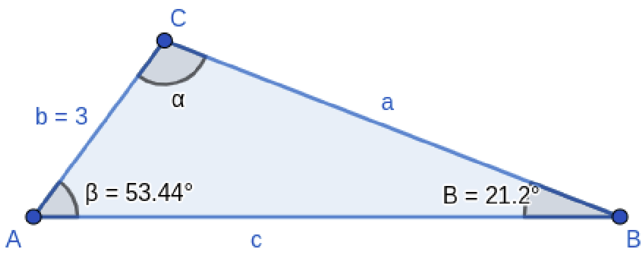
3 También se puede aplicar cuando se conocen 2 ángulos del triángulo y un lado que no es opuesto a ninguno de ellos, sólo que requiere un paso extra, que es obtener el otro ángulo del triángulo.



Esto es posible porque sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.
Por ejemplo, en la imagen de arriba, el ángulo B se obtiene de restar los otros 2 ángulos a 180:

$$\measuredangle B = 180 - \alpha - \beta$$

Ignorando uno de los ángulos dados originalmente, ya tenemos los datos de 2 ángulos y el lado opuesto de uno de ellos, como el segundo caso mencionado en las aplicaciones.



Teorema del coseno

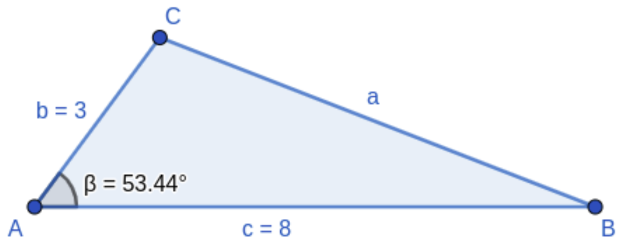
En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Aplicaciones

Este teorema es útil para resolver problemas,

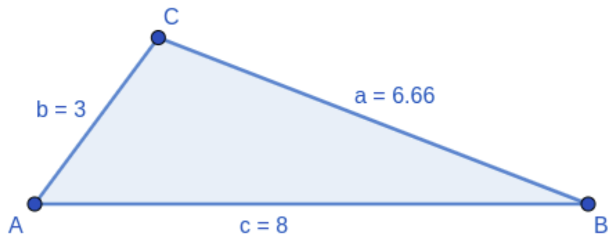
1 Si tenemos la medida de un ángulo y de los lados adyacentes a este.



Aplicando el teorema podemos obtener el tercer lado, es decir el lado opuesto al ángulo que tenemos, pues

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

2 Si tenemos la medida de los 3 lados de un triángulo



Aplicando el teorema podemos obtener cualquier ángulo, pues

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \Rightarrow \qquad A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

4.11.- Medio intervalo.

Los intervalos se utilizan en las matemáticas para una variedad de razones. Un intervalo es un segmento específico de un conjunto de datos. Por ejemplo, uno podría ser de 4 a 8. Los intervalos se utilizan en las estadísticas y en el cálculo cuando se derivan integrales. También se utilizan cuando se trata de encontrar el promedio de las tablas de frecuencias. El punto medio de cada intervalo se necesita para completar este proceso y encontrar el promedio.

Encuentra el límite superior e inferior del intervalo. Por ejemplo, un intervalo de 4 a 8 tendría 4 como límite inferior y 8 como el límite superior.

Suma el límite superior e inferior. En nuestro ejemplo, 4 + 8 = 12.

Divide el resultado del paso 2 entre 2. El resultado es el punto medio del intervalo. En nuestro ejemplo, 12 dividido entre 2 produce 6 como el punto medio.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERENCIA BIBLIOGRAFICA				
No	**TIPO**	**TITULO**	**AUTOR**	**EDITORIAL**
1	Libro	Ecuaciones Diferenciales	Dennis G. Zill	Gandhi
2	Libro	Ecuaciones Diferenciales	Edward B. Saff y R. Kent Nagle	Addison Wesley
3	Libro	Ecuaciones Diferenciales	EL-IRAKI ZILL	Gandhi
SUGERENCIAS DE VIDEOS ACADEMICOS				
No	**TIPO**	**TITULO**	**LINK**	**AUTOR**
1	Video	Ecuaciones Diferenciales	https://www.youtube.com/watch?v=rd2jKGQJucE&list=PLeySRPnY35dFSDPi_4Q5R1VCGL_pab26A	Alex
2	Video	Ecuaciones Diferenciales	https://www.youtube.com/watch?v=q3PKNySW6LQ&list=PL9SnRnlzoyX0RE6_wcrTKaWj8cmQb3uO6	MateFacil
3	Video	Ecuaciones Diferenciales	https://www.youtube.com/watch?v=MdKOjS8-oNw	Traductor De Ingeniería