ANTOLOGIA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

1ER CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

GEOMETRIA ANALITICA

Objetivo de la materia:

Que el estudiante interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.

INDICE

UNIDAD I 9

SISTEMAS DE COORDENADAS 9

I.I Sistema de referencia para precisar ubicaciones y dimensiones 9

1.2 El auge de las grandes civilizaciones del mundo en una recta del tiempo y los sistemas unidimensionales 9

1.3 Los puntógramos y el sistema bidimensional 10

1.4 El sistema satelital GPS y el sistema tridimensional 11

1.5 Distancia entre dos puntos 12

1.6 Cálculo del punto medio de un segmento 15

1.7 División de un segmento en una razón dada 17

1.8 Pendiente y ángulo de inclinación de una recta 18

1.9 Perímetro de polígonos en el plano 20

1.10 Área de un polígono por determinantes 23

1.11 Introducción a GeoGebra 25

1.12 Cálculo de área y perímetro con GeoGebra 28

UNIDAD II 29

LA RECTA Y SUS CARACTERÍSTICAS 29

2.1 Ecuación pendiente ordenada al origen 29

2.3 Ecuación de la recta determinada por dos puntos 32

2.4 Forma simétrica x/a+y/b=1 34

2.5 Ecuación general de la recta Ax+By+C=0 36

2.6 Distancia de un punto a una recta 38

2.7 Rectas paralelas y perpendiculares 40

2.8 Puntos de intersección 41

2.9 Diferencia entre relación y función 44

2.10 Regla de correspondencia, dominio y rango 46

2.11 Extensiones (obtención del dominio y el rango por métodos algebraicos) 49

UNIDAD III **50**

FENÓMENOS NATURALES Y VARIABLES; EL MODELO LINEAL **50**

3.1 Tabla de valores 50

3.2 Gráficas..51

3.3 Gráfica de rectas con Geogebra 53

3.4 Modelación de los datos de un experimento mediante una ecuación y proyección a futuro56

3.5 Movimiento rectilíneo uniforme...57

3.6 La velocidad (pendiente) 60

3.7 Lectura e interpretación gráfica de movimiento de varios vehículos...61

3.8 Análisis de las características de fallas geológicas 67

3.9.- La separación de fallas paralelas. 70

3.10 Las reglas para conversión de temperaturas entre diferentes sistemas de unidades, sus gráficas y su interpretación..73

3.11 Elementos gráficos...77

3.12 Obtención de la ecuación a partir de la gráfica...82

3.13 Obtención de la gráfica a partir de la ecuación...83

3.14 Visualización mental y descripción de una gráfica a partir de su ecuación 85

UNIDAD IV **87**

CÓNICAS **87**

4.1 Definición básica de las cónicas..88

4.2 Circunferencia: definición, elementos y ecuación canónica.......................................90

4.3 Ecuación ordinaria y general de la circunferencia...93

4.4 Parábola: definición, elementos y ecuación canónica...96

4.5 Ecuación ordinaria y general de la parábola 98

4.6 Elipse: definición, elementos y ecuación canónica 104

4.7 Ecuación ordinaria y general de la elipse.. 106

4.8 Hipérbola: definición, elementos y ecuación canónica 109

4.9 Ecuación ordinaria de la hipérbola.. 111

4.10 Problemas y aplicaciones 115

4.11 Gráfica de cónicas con GeoGebra 118

UNIDAD I

SISTEMAS DE COORDENADAS

1.1 Sistema de referencia para precisar ubicaciones y dimensiones

Un sistema de referencia es un conjunto de coordenadas espacio-tiempo que se requiere para poder determinar la posición de un punto en el espacio. Un sistema de referencia puede estar situado en el ojo de un observador. El ojo puede estar parado o en movimiento.

Las proyecciones cartográficas intentan representar la superficie de la tierra o una parte de ella, en una superficie plana de papel o en la pantalla del computador. Un sistema de coordenadas de referencia (SCR) define entonces con la ayuda de las coordenadas, cómo el mapa bidimensional proyectado en su GIS se relaciona con lugares reales en la tierra. La decisión sobre el sistema de proyección cartográfica y el sistema de coordenadas de referencia a usar, depende de la extensión regional de la zona que se desea trabajar, del análisis que se quiere hacer y, a menudo de la disponibilidad de datos.

1.2 El auge de las grandes civilizaciones del mundo en una recta del tiempo y los sistemas unidimensionales

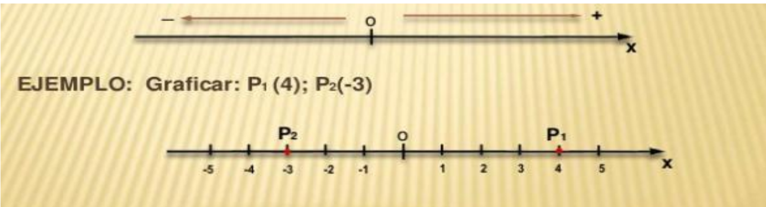
Nombrado así en honor del inventor de la Geometría Analítica, un Sistema Coordenado Cartesiano dibujado en el papel o en la computadora (o en donde quieras) te permitirá saber por medio de la colocación de puntos obtenidos de una ecuación, la trayectoria, el comportamiento o la localización de una cosa, por ejemplo: la trayectoria de un avión, la localización de una casa, la posición de un auto, de una hormiga, de un planeta, la producción de una empresa, etc.

Según los historiadores, el sistema cartesiano fue inventado por el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) quien, desde muy pequeño, quedó huérfano y padecía problemas de salud; esta condición lo obligaba a pasar mucho tiempo en la cama, lo cual le permitía pensar, leer, estudiar y escribir. Un día, estando en la cama de su habitación, observó a una mosca parada en el techo, cerca de la esquina de dos paredes adyacentes, y se preguntó si podía conocer su posición en cada instante; después de pensar, reflexionar y analizar, se le ocurrió lo que hoy conocemos como sistema cartesiano, lo cual permitiría representar la posición exacta de la mosca en cualquier momento.

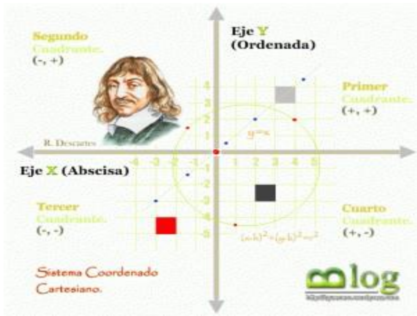
El sistema cartesiano de René Descartes contribuyó al desarrollo de la matemática moderna al vincular el Álgebra y la Geometría, dando como resultado la Geometría Analítica, mediante la cual se grafican figuras geométricas, se analizan sus propiedades para la formulación de expresiones matemáticas, en particular, para la graficación de aquellas que involucran variación directamente proporcional.

Los sistemas de referencia son: unidimensional, bidimensional, tridimensional, polar cilíndrico, polar esférico.

El sistema unidimensional es aquel que está formado por un solo eje horizontal, llamado el eje de las x, se toma como punto fio el 0, como origen de una escala adecuada de graduación, las magnitudes a la derecha del origen 0 son positivos y a la izquierda del origen 0 es negativo, para ubicar un punto de este sistema de referencia estará formado por una solo componente, llamada abscisas, la misma que puede ser positivas o negativas P(x).



Además de nombrárseleSistema Coordenado Cartesianotambién se le llama: Sistema en el plano, Sistema Bidimensional, Sistema Coplanar, Sistema Coordenado Rectangular, o simplementeSistema Rectangular



1.3 Los puntógramos y el sistema bidimensional

Concepto de bidimensional

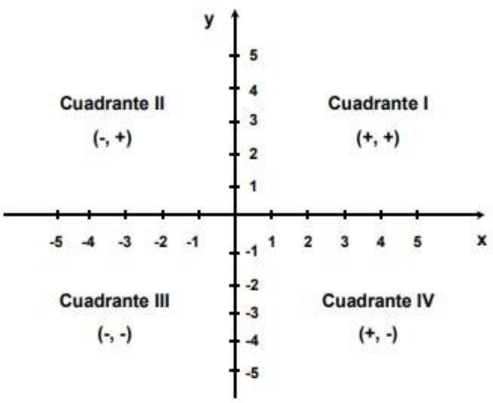
Bidimensional significa literalmente dos dimensiones, que pueden ser, ancho y largo pero sin que tomemos en cuenta la profundidad. Esto ocurre por ejemplo en Geometría con los cuerpos planos. Todos los polígonos (triángulos, cuadrados, rombos, etcétera) son bidimensionales y también lo son entre otros, los círculos y las elipses.

Cuando dibujamos sobre un papel en forma bidimensional tomamos solo en cuenta esas dos dimensiones (ancho y largo) y entonces cuando observamos la imagen se nos muestra plana, sin volumen o espesor, y por lo tanto obligadamente debemos apreciarla frontalmente, de ese único modo, aunque la observemos desde distintos ángulos. Si queremos darle profundidad podemos por ejemplo, usar la perspectiva. Algo similar ocurre con una fotografía. La tridimensionalidad nos permite observar la imagen de un modo mucho más rico según los diferentes ángulos

El espacio bidimensional es un módulo geométrico de la proyección plana y física del universo donde vivimos.

1.4 El sistema satelital GPS y el sistema tridimensional

El Sistema de Posicionamiento Global (en inglés, GPS; Global Positioning System), y originalmente Navstar GPS, es un sistema que permite determinar en toda la Tierra la posición de cualquier objeto (una persona, un vehículo) con una precisión de hasta centímetros (si se utiliza GPS diferencial), aunque lo habitual son unos pocos metros de precisión. El sistema fue desarrollado, instalado y empleado por el Departamento de Defensa de los EE. UU. Para determinar las posiciones en el globo, el sistema GPS se sirve de 3 o más satélites y utiliza la trilateración. En la práctica, normalmente son necesarios 4 o más satélites para determinar la posición con cierta precisión.



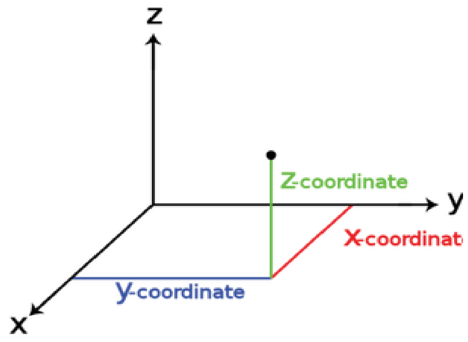
El GPS funciona mediante una red de como mínimo 24 satélites en órbita sobre el planeta Tierra, a 20 180 km de altura, con trayectorias sincronizadas para cubrir toda la superficie de la Tierra. Cuando se desea determinar la posición tridimensional, el receptor que se utiliza para ello localiza automáticamente como mínimo cuatro satélites de la red, de los que recibe unas señales indicando la identificación y hora del reloj de cada uno de ellos, además de información sobre la constelación. Con base en estas señales, el aparato sincroniza el reloj del GPS y calcula el tiempo que tardan en llegar las señales al equipo, y de tal modo mide la distancia al satélite mediante el método de trilateración inversa, el cual se basa en determinar la distancia de cada satélite al punto de medición. Conocidas las distancias, se determina fácilmente la propia posición relativa respecto a los satélites. Conociendo además las coordenadas o posición de cada uno de ellos por la señal que emiten, se obtiene la posición absoluta o coordenadas reales del punto de medición. También se consigue una gran exactitud en el reloj del GPS, similar a la de los relojes atómicos que lleva a bordo cada uno de los satélites.

SISTEMA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAL

Un sistema cartesiano tridimensional está compuesto por tres planos perpendiculares entre sí, los cuales se interceptan en los ejes coordenados, los que se denominan ejesOx,Oy yOz. Las coordenadas de un puntoP son (x, y, z). La distancia signadas como x, y y z se llaman abscisa, ordenada y cota respectivamente. Los planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas octantes.

Un sistema tres por tres maneja tres incógnitas: x, y, z. Para casos como este se trabaja con un plano tridimensional.

En geometría y análisis matemático, un objeto o ente es tridimensional si tiene tres dimensiones. Es decir cada uno de sus puntos puede ser localizado especificando tres números dentro de un cierto rango. Por ejemplo,anchura, longitud y profundidad.



Observa el siguiente plano extraído de la página Disfrutalasmatemáticas.com, donde se grafica en un plano tridimensional un punto.

1.5 Distancia entre dos puntos

Cuando la distancia entre 2 puntos se forma un segmento paralelo al eje X o el eje Y, esta puede ser calculada de la siguiente manera:

Si la distancia es horizontal, se restan los valores de x ambos puntos:

$(x2 - x1)$

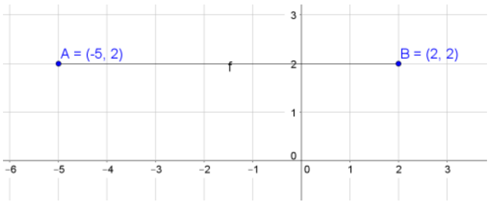
Si la distancia es vertical, se restan los valores de y de ambos puntos:

$(y2 - y1)$

No importa el orden que se tome para elegir cuál será el punto 1 y cuál el punto 2, pero es indispensable que en el caso de un resultado negativo se tome el valor absoluto, ya que no existen distancias negativas.

Ejemplo 01

Calcular la distancia entre los puntos A y B.



Se trata de una distancia horizontal.

Se identifica A como el punto 1 y B como el punto 2.

Las coordenadas son: $X1 = -5$, $X2 = 2$

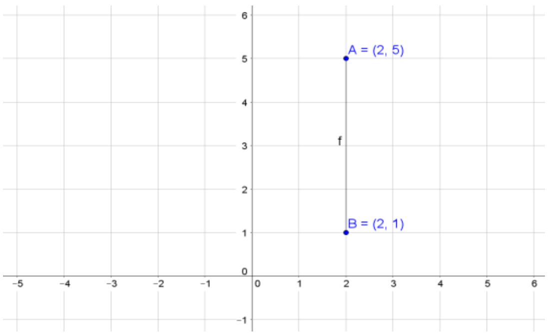
$d(A,B) = X2 – X1 = 2 –(-5) = 2 + 5 = 7 \rightarrow |7| = 7$

La distancia horizontal del segmento AB es 7.

Nota que también se puede obtener sin la fórmula, solo contando desde -5 hasta 2, para obtener el 7.

Ejemplo 02

Calcular la distancia entre los puntos C y D.



Se observa que se trata de una distancia vertical.

Se identifica C como el punto 1 y D como el punto 2.

Las coordenadas son: $y1 = 1$, $y2 = 5$

$d(C,D) = y2 – y1 = 1 – 5 = - 4 \rightarrow |-4| = 4$

La distancia vertical del segmento CD es 4.

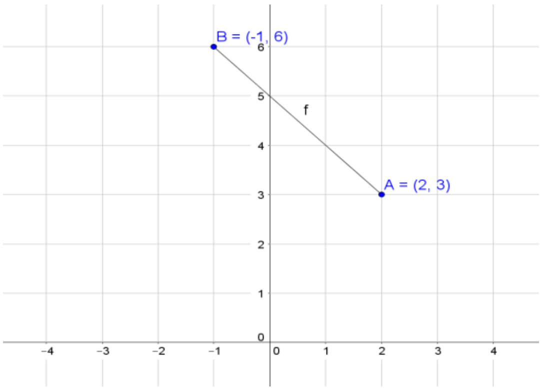
En geometría analítica existe una fórmula que representa la aplicación en el plano cartesiano del teorema de Pitágoras. Sirve para encontrar la distancia entre dos puntos cuando el segmento que se forma entre ellos no es paralelo a ninguno de los ejes.

Si se conocen las posiciones del punto 1(x1, y2) y el punto 2 (x2,y2) en un plano, se utiliza la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 03

Calcular la distancia en km que recorre un biólogo desde su base hasta un nido de tortugas que está en zona de riesgo si las coordenadas son A (2,3) y B (-1,6).



Las coordenadas del punto A son (x1,y2) y las del punto B (x2,y2). Así,

x1 = 2, y1 = 3, x2 = -1, y2 = 6

Se sustituye con los datos en la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (6 - 3)^2}$$

Se realiza la suma o resta correspondientes:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$$

Se elevan los cuadros:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{9 + 9}$$

Se hace la suma dentro de la raíz:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{18}$$

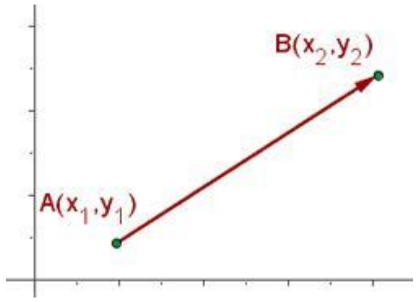
Se obtiene la raíz

$$d(P_1, P_2) = 4.24$$

De esta manera se sabe que la distancia recorrida es de 4.24 km.

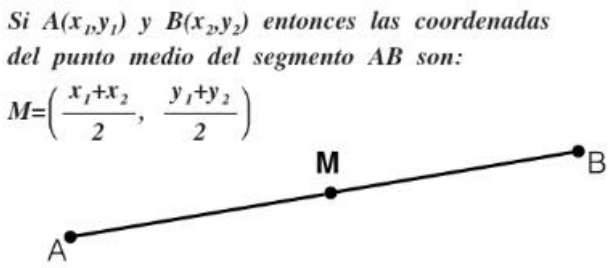
La distancia entre dos puntos equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente. Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos cualesquiera

A(x1,y1), B(x2,y2), definimos la distancia entre ellos, d(A,B), como la longitud del segmento que los separa.



1.6 Cálculo del punto medio de un segmento

Si es un segmento, el punto medio es el que lo divide en dos partes iguales. En ese caso, el punto medio es único y equidista de los extremos del segmento. Por cumplir esta última condición, pertenece a la mediatriz del segmento.



Existe un punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos de un segmento ($\overline{AB}$), llamado punto medio. Si uno de los extremos del segmento tiene coordenadas A(x1,y1) y el otro extremo B(x2,y2), el punto medio se encuentra a partir de las siguientes expresiones matemáticas:

Coordenadas de x: $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$

Coordenadas en y: $y_m = \frac{y_1+y_2}{2}$

Ejemplo 01

Encontrar el punto medio del segmento delimitado por los puntos A(6,0) y B(-2,4).

Las coordenadas de Xm son: x1 = 6 y x2 = -2

Se sustituye con los datos en la fórmula y se resuelve: $x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{6+(-2)}{2} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

La coordenada en x es 2.

Las coordenadas de y son: y1 = 0, y2 = 4

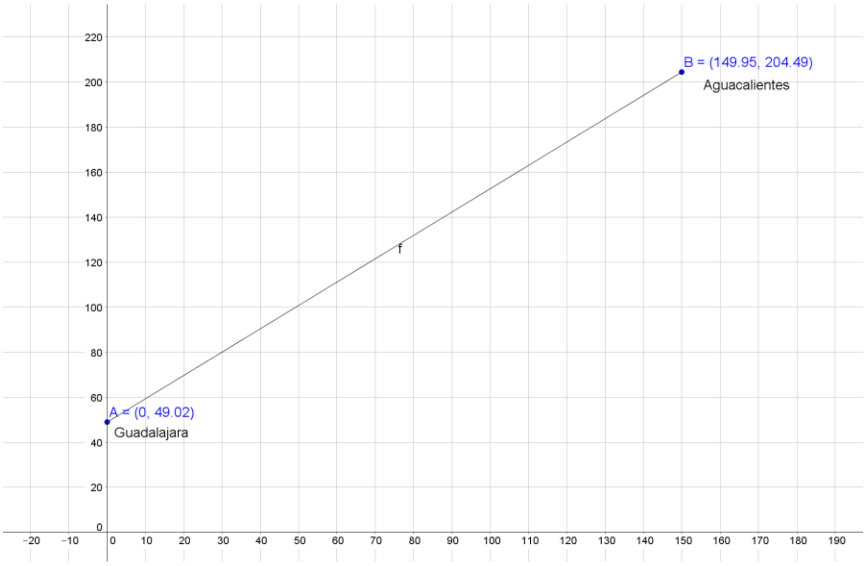
Se sustituye con, los datos en la fórmula y se resuelve:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Así, la coordenada de ym es 2.

Por la tanto, el punto medio es (2,2).

Ejemplo 02



Thelma vive en Aguascalientes y Mireya en Guadalajara. Un fin de semana deciden visitarse, pero para no hacer el viajé completo, se verán en un punto intermedio.

La gráfica muestra un boceto con las coordenadas de la ubicación actual en km. Si el desplazamiento es en línea recta, calcular las coordenadas del punto medio donde se encontrarán, la distancia que recorrerá cada una y la distancia de Guadalajara a Aguascalientes.

Se identifican los parámetros, las coordenadas de x son: x1 = 0, x2 = 149.95

Las coordenadas de y son: y1 = 49.02, y2 = 204.49

Se sustituye con los valores en la fórmula para calcular la coordenada en x:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 149.95}{2} = 74.975$$

Se calcula la coordenada en y:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{49.02 + 204.49}{2} = 126.755$$

Las coordenadas del punto medio donde deben encontrarse son: C(74.975,126.755)

Para calcular la distancia que recorrerá cada una, se calcula la distancia entre uno de los extremos y el punto medio; se utilizan las coordenadas del punto a(0,49.02) y se sustituye en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{(74.975 - 0)^2 + (126.755 - 49.02)^2}$$

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) = \mathbf{108}$$

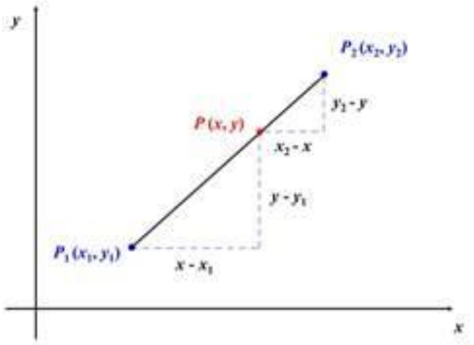
Cada una recorrerá 108 km. La distancia de Guadalajara a Aguascalientes es de 216 km.

1.7 División de un segmento en una razón dada

Dividir un segmento dirigido en una razón dada significa segmentarlo en partes de forma tal que se encuentren las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que satisface la comparación entre dos magnitudes.

En general, si la razón es de la forma $r = \frac{a}{b}$, implica que el segmento se divide en a + b partes. Por ejemplo, si $r = \frac{4}{7}$, el segmento se divide en 11 partes iguales.

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ así como el segmento de recta que los une:



Sea un punto $P(x, y)$ que pertenezca al segmento. Si se forman los triángulos mostrados, se observa que son semejantes. Esto es:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = r \text{ y } \frac{y-y_1}{y_2-y} = r$$

Donde r es la razón de proporcionalidad de semejanza.

Si se despeja x de la primera ecuación se tiene:

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1+r) = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

Análogamente se puede encontrar que:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Expresiones que sirven para obtener las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada.

En el caso particular en que se trate del punto medio, r vale $r = \frac{1}{1} = 1$, y las ecuaciones se convierten en:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \text{ y } y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Con r = 0, el punto $P(x,y)$ se ubica en P_1. A medida que r va creciendo $P(x,y)$ se desplaza hacia P_2. En su punto medio r vale 1. Cuando r es negativa, el punto se ubica en su prolongación hacia abajo alejándose hasta que llega a r = -1 donde es infinito y cambia de sentido. Al seguir decreciendo, tiende a P_2.

1.8 Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma con el eje x. La medida del ángulo se toma en sentido contrario a las agujas del reloj. La pendiente o tangente de un ángulo determina el ángulo de inclinación de la recta, es lo que se llama tangente inversa: La pendiente (GE/AE) es igual a la tangente del ángulo: o lo que es lo mismo.

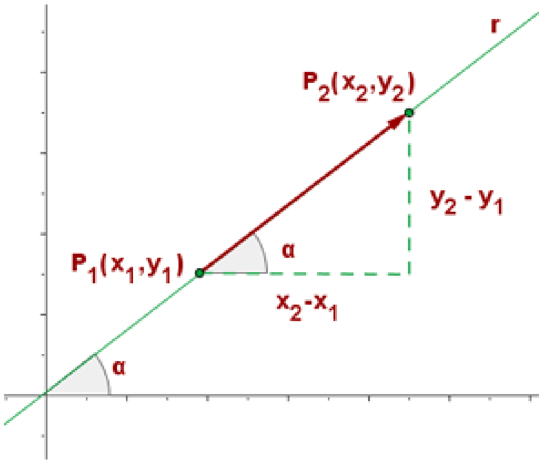
La pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación.

El ángulo de inclinación es el ángulo que forma la recta con el eje horizontal o eje de las x.

La fórmula para calcular la pendiente (m) de un triángulo es

$$m = tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la siguiente gráfica se puede observar un segmento de recta, su ángulo de inclinación y la relación entre los catetos del triángulo que se forma.



Para obtener el ángulo de inclinación se calcula el arco que tiene la tangente.

Esto se puede hacer con tablas trigonométricas o con la calculadora científica, utilizando la función inversa de la tangente ($\boldsymbol{tan^{-1}}$).

$$\theta = arctan(x)$$

La inclinación de la recta determina el signo de la pendiente. Si la recta esta inclinada a la derecha su pendiente es positiva; si la recta esta inclinada a la izquierda, su pendiente es negativa.

Ejemplo 01

Un cable está conectado a un soporte que se ubica a 1m de una pared y 1m por encima del suelo. El segundo soporte se localiza en un poste que se encuentra a 6 m de la pared y a 6 m del piso, ¿cuáles son la pendiente y el ángulo de inclinación del cable?

Se observa que los valores son:

x1 = 1, x2 = 6   y2 = 1, y2 = 6

Se sustituye con estos valores en la fórmula y se resuelve:

$$m = \frac{6-1}{6-1} = \frac{5}{5} = 1$$

Para obtener el ángulo de inclinación se calcula el arco que tiene la tangente de 1:

$$\theta = \arctan(1) = \mathbf{45}°$$

Ejemplo 02

Una montaña rusa necesita un tramo de subida con una pendiente de 3 unidades. El soporte que sostiene la pendiente se ubica a 1 m de la salida y a 2 metros del piso. Si el soporte del extremo superior se encuentra a 6 m de la salida, ¿qué altura deberá tener?

Los valores son: m = 3, x1 = 1, x2 = 7, y y1 =2

Se sustituye con los valores en la formula y se despeja:

$$3 = \frac{a-2}{7-1} = \frac{a-2}{6}$$

$$(3)(6) = a - 2$$

$$18 + 2 = a$$

$$20 = a$$

Por lo tanto, la altura del soporte es a = m.

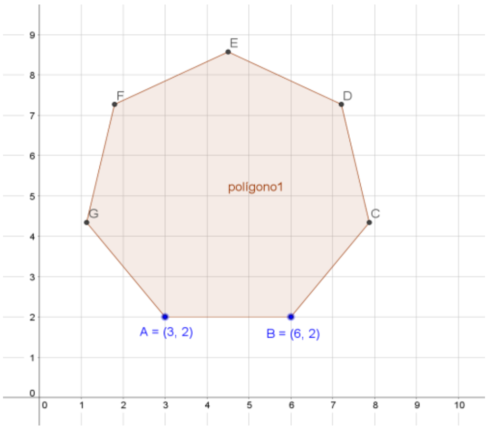
1.9 Perímetro de polígonos en el plano

El perímetro de una figura es su contorno. En el caso de los polígonos irregulares, cuyos lados son distintos, se obtiene midiendo cada uno de ellos y sumando los valores obtenidos, mientras que en el de los polígonos regulares, que tienen todos sus lados iguales, basta conocer la medida de uno y multiplicarla por el número de ellos.

Perímetro y área de un polígono en el plano Cartesiano Para obtener el perímetro de un polígono, se obtiene la distancia entre cada par de vértices consecutivos y se suman. Para esto se usa la fórmula de distancia entre dos puntos: Sea A(X1, Y1), B(X2, Y2) y C(X3, Y3) los vértices de un triángulo.

Ejemplo 01

Calcular el perímetro del siguiente polígono regular. La graduación del plano cartesiano se da en cm.



Se observa que es un polígono regular, por lo que solo es necesario ob5teneer la medida de uno de sus lados y luego multiplicarla por la cantidad de estos.

Se toman como referencia de los lados de las coordenadas del segmento AB que son A (3,2) y B (6,2).

Así, x1 = 3, x2 = 6; y1 = 2, y2 = 2

Se sustituye la expresión de la fórmula con los datos:

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-2)^2}$$

Se realiza la suma o resta correspondiente:

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$$

Se elevan los datos al cuadrado:

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{9+0} = \sqrt{9}$$

Se obtiene la raíz: d(P1, P2) = 3

La distancia del segmento AB 3 CM.

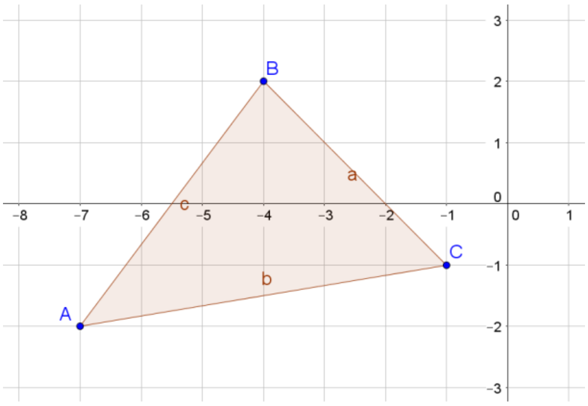
Se multiplica por el número de lados:

P = (7)(3) = 21

Así, el perímetro de la figura es de 21 cm

Ejemplo 02

En una empresa de electrónica, se trabaja en el diseño de una tarjeta de circuitos integrados para una nueva consola de videojuegos. Los diseñadores dividen el área como plano cartesiano para ubicar los componentes por medio de coordenadas, Se observa el boceto de un circuito en forma de triángulos escaleno, que debe ser rodeado con alambre aislante. ¿Cuántos cm de alambre se requieren para rodear el circuito integrado?



Para calcular el alambre que rodeará el circuito, se obtiene el perímetro de la figura.

Distancia del segmento AB, con coordenadas A (-7,-2) y B (-4,2).

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(-4-(-7))^2 + (2-(-2))^2}$$

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(-4+7)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\mathrm{d}(A,B) = 5$$

Distancia del segmento BC, con coordenadas B (-4,2) y C (-1,-1).

$$\mathrm{d}(B,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\mathrm{d}(B,C) = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (-1-2)^2}$$

$$\mathrm{d}(B,C) = \sqrt{(-1+4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\mathrm{d}(B,C) = 4.24$$

Distancia del segmento AC, con coordenadas A (-7,-2) y C (-1,-1).

$$\mathrm{d}(A,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\mathrm{d}(A,C) = \sqrt{(-1-(-7))^2 + (-1-(-2))^2}$$

$$\mathrm{d}(A,C) = \sqrt{(-1+7)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

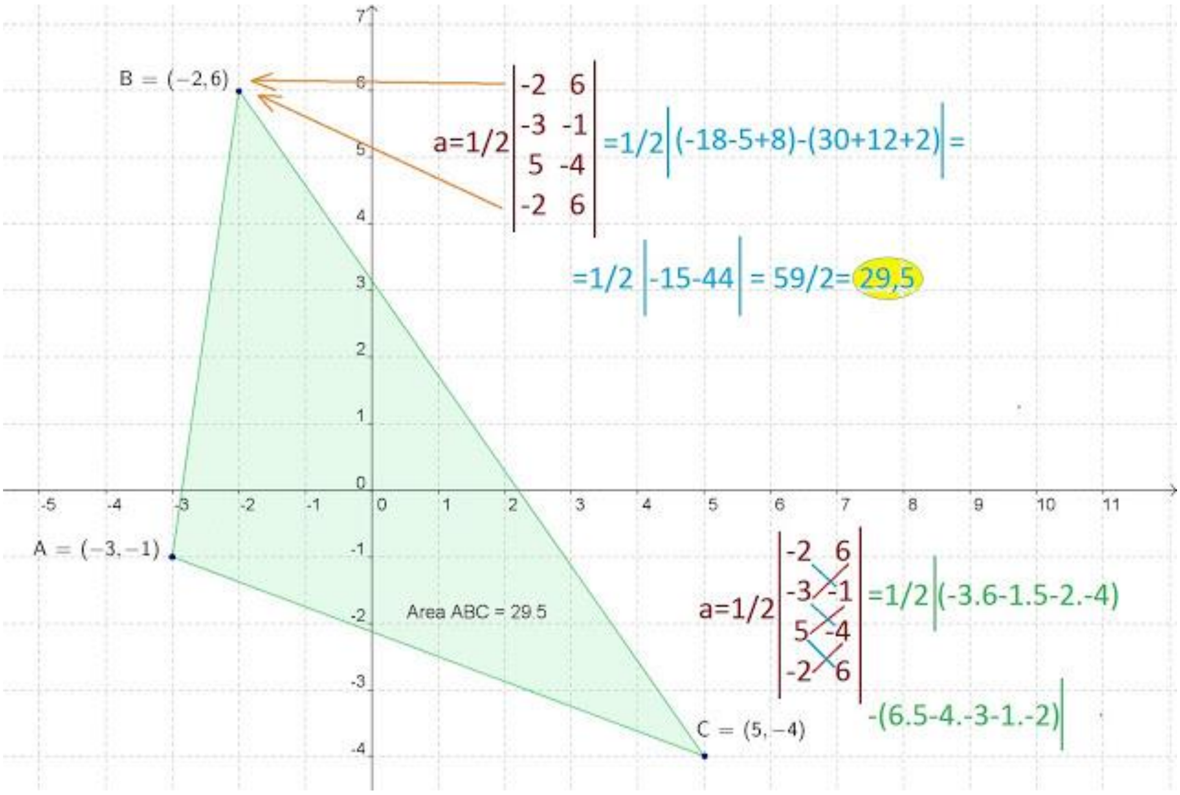
$$\mathrm{d}(A,C) = 46.082$$

El perímetro del circuito es la suma de los lados:

5 + 4.24 + 6.082 = 15.322 cm

Por lo tanto, se necesitan 15.233 cm de alambre para rodear el circuito.

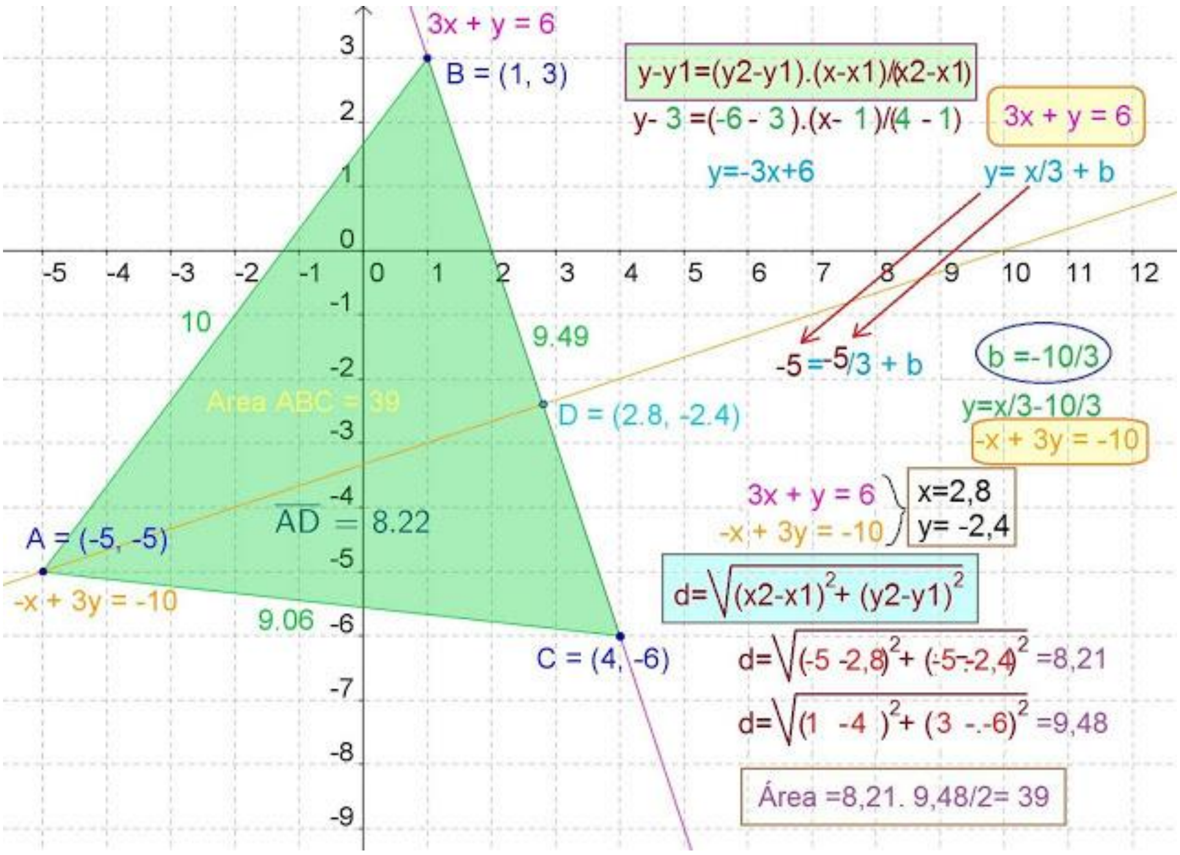
1.10 Área de un polígono por determinantes



Para calcular el área de un polígono cualquiera, se puede hacer un determinante de la siguiente forma:
colocamos las coordenadas de los puntos (vértices de la figura) alineados en una columna, repitiendo el primero que hemos tomado en la parte inferior, por ejemplo, en la figura tomamos las coordenadas de los tres puntos: (-2, 6) (-3, -1) (5, -4) y repetimos el primero en la parte inferior (-2, 6).
Para calcular el área multiplicamos un medio por el cálculo del determinante:
multiplicamos en diagonal las líneas rojas tal y como aparecen abajo en el determinante:
-3 × 6 + 5 x-1 + -2 x -4.
A la suma de estos tres productos le restamos la suma de los productos cuyas líneas están en color azul en el determinante:
6 × 5 + -4 x -3 + -1 x -2.

Al hacer toda la operación obtenemos el área directa de la figura. Si en vez de un triángulo fuera otro polígono cualquiera, el cálculo sería idéntico, colocaríamos las coordenadas de todos los puntos alineados en una columna repitiendo siempre el primero en la parte inferior de la columna.

Otro método para calcular el área:



Otro método para calcular el área es el siguiente:
Como sabemos que el área del triángulo es base por altura partido por dos, debemos calcular la base y la altura del triángulo. Para ello tomamos un vértice A del mismo y un lado opuesto BC.
Del lado opuesto calculamos la distancia 9, 49 entre los dos extremos que es la longitud de la base.
Para calcular la altura hacemos por el vértice opuesto A del triángulo una recta

perpendicular -x+3y=10 a la base desde ese punto - ya que la altura es una recta perpendicular a la base-, calculando la ecuación de esta recta y resolviendo la solución al sistema de las 2 ecuaciones lineales formado por esta recta perpendicular y la base. La solución D es la intersección de ambas rectas, o lo que es lo mismo la proyección ortogonal del vértice sobre el lado del triángulo. Calculamos la distancia (8, 21) entre estos dos puntos y tenemos la altura.
Por último, si tenemos la altura y la base, las multiplicamos y dividimos el resultado entre 2 obteniendo el área del triángulo (39).

1.11 Introducción a GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas libre para todas las áreas de las matemáticas escolares (desde prebásica hasta educación superior). ... Apple iOS: 6.0 o posterior. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática.

Aprende:

Dos de los objetivos fundamentales de la geometría analítica son:

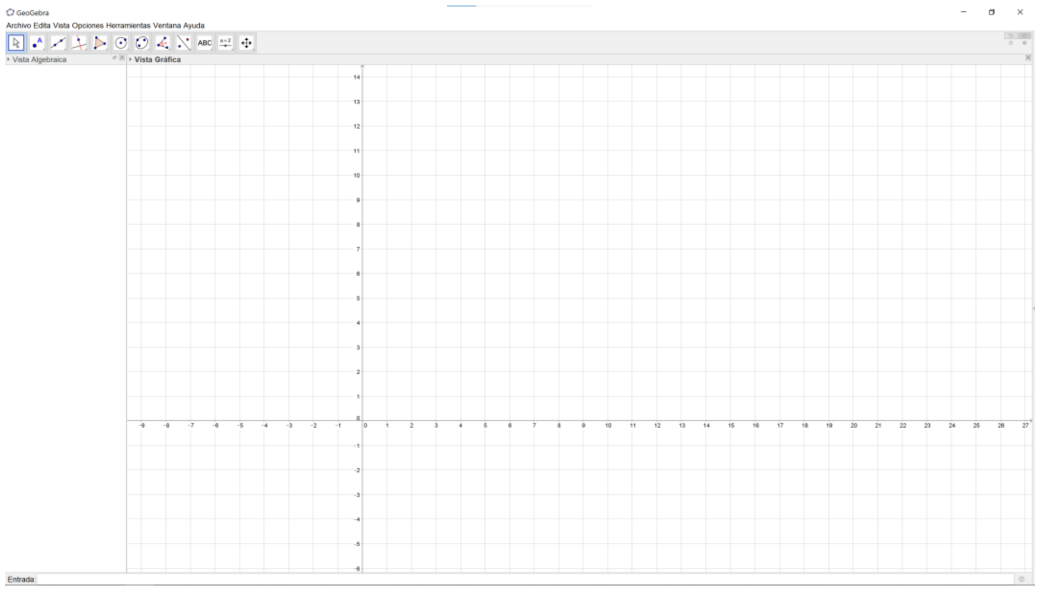
Dada una ecuación, encontrar su gráfica o el lugar geométrico que representa.

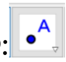
Dado el lugar geométrico definido o una gráfica, encontrar la ecuación correspondiente:

GeoGebra ofrece diversas vistas para los objetos matemáticos.

En la VISTA ALGEBRAICA se pueden ingresar directamente expresiones algebraicas usando la LÍNEA DE ENTRADA.

La VISTA GRÁFICA es la que interpreta los datos ingresados en forma algebraica, para representarlos gráficamente.



Para ubicar puntos en GeoGebra se selecciona la herramienta PUNTO: 

Se ubica el cursor en la VISTA GRÁFICA, donde se encuentra el plano cartesiano.

Si se da un clic, se ubica un nuevo punto y en la VISTA ALGEBRAICA (izquierda) aparecen sus coordenadas.

Para hacer que coincidan con las que deseamos, basta mover el punto; aunque puede ser difícil lograr que coincidan, sobre todo si se utilizan varios decimales o no se tiene buen pulso. Una forma de ubicar un punto en el plano cartesiano con la precisión deseada es introducir las coordenadas rectangulares en el campo de ENTRADA, que se encuentra en la parte inferior.

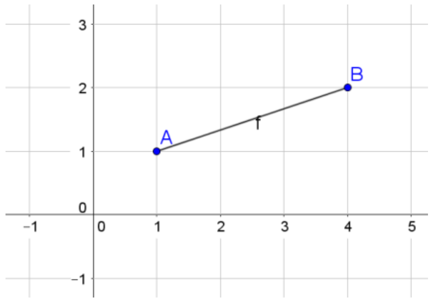
Para ubicar el punto A se escribe A = (2,3) y se da ENTER. Entrada: **(2,3)**

Ejemplo 01

Ubicar con GeoGebra los puntos A(1,1) y B(4,2) y unirlos para formar el segmento AB.

Se selecciona la herramienta SEGMENTO, se da clic primero en el punto A y luego en el punto B.

Observa que en la VISTA ALGEBRAICA, además de los puntos, aparece el segmento a, que tiene una longitud de 3.16 unidades y se representa como a = 3.16.



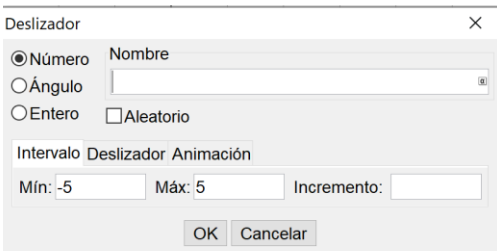
Un DESLIZADOR es una herramienta que permite tener variables en las construcciones que se hacen en GeoGebra, de tal manera que al modificar el valor del deslizador, la construcción también se modifica.

Ejemplo 02

Crear un deslizador para mover un punto.

Se selecciona la herramienta PUNTO y se ubica el punto C(2,2).

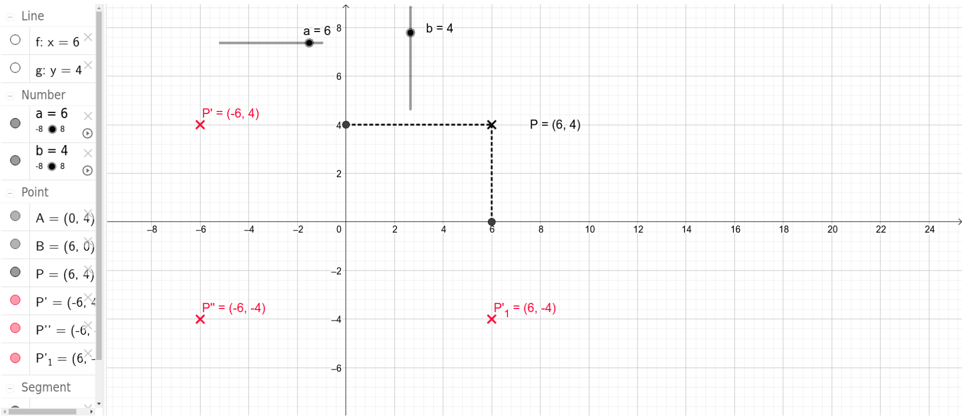
Se selecciona la herramienta DESLIZADOR y se da un clic en la VISTA GRÁFICA, al hacerlo aparece una ventana de configuración del deslizador. Se selecciona la opción número y se nombra la entrada como “a”. En intervalo se deja uno de 0 a 4, con incrementos de 1.



Se da clic en APLICAR y aparece una barra con un botón que se puede mover, con lo que cambian sus valores.

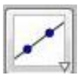
Para usar este deslizador con el punto C, en la VISTA ALGEBRAICA se da doble clic al punto C y aparece la ventana REDEFINE; se cambia el valor de 2 por α, y se da clic en OK.

Observa que conforme se desliza el botón sobre la barra se desplaza el punto.

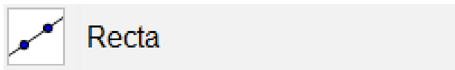


1.12 Cálculo de área y perímetro con GeoGebra

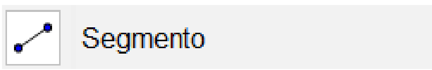
Es necesario establecer la diferencia entre recta y segmento. En GeoGebra existen ambos casos, a los cuales se puede acceder desde el menú desplegable a partir del botón:



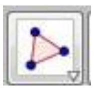
Las rectas son líneas que extienden hasta el infinito y pasan por dos puntos establecidos dentro de GeoGebra. Para dibujar una línea recta se utiliza el botón.



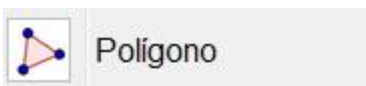
Un segmento es una línea que está limitada por dos puntos. Para dibujar se utiliza el botón:



Existen otras herramientas que permiten obtener un perímetro y área. Algunas de estas medidas se obtienen de manera directa o indirecta, la herramienta polígona permite obtener ambos datos y se encuentra en el menú desplegable:



Esta herramienta permite dibujar un polígono a partir de por lo menos tres puntos. Determinar su área es cuestión de observar en la zona de vista algebraica, la cual se ubica en el lado izquierdo de la ventana de GeoGebra. Si el polígono está formado por tres puntos aparece un área etiquetada como triángulo, donde se observa el área de la figura; en caso de tener cuatro puntos aparece un área de cuadrilátero, con cinco puntos un pentágono, para seis puntos un hexágono y así sucesivamente. Para determinar el perímetro basta con sumar los segmentos que forma la figura que aparece en vista algebraica



UNIDAD II

LA RECTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

2.1 Ecuación pendiente ordenada al origen

La ordenada al origen de una recta que corta al eje Y es el valor de la segunda coordenada del punto de intersección de la recta con el eje mencionado. Observa que, si la ecuación de la recta es de la forma y = mx + by = mx + b, el valor de b coincide siempre con el valor de y correspondiente al valor x=0x=0, es decir, el valor de b es la ordenada al origen.

De manera que, si se nos proporciona la ordenada al origen y la pendiente de una recta, basta con sustituir estos valores en b y m, respectivamente, en la ecuación y = mx + by = mx + b.

Una de las formas de determinar la ecuación que representa una línea recta es cuando se conocen la pendiente (m) y su ordenada al origen (b), es decir, su intersección con el eje Y es:

$$y = mx + b$$

Ejemplo 01

Determinar la ecuación de la recta con pendiente m = 3 y cuya ordenada al origen es -4

Se sustituye con los valores en la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen y se desarrollan las operaciones

$$y = mx + b$$

$$y = 3(x) + (-4)$$

$$y = 3x - 4$$

El resultado es la ecuación y = 3x – 4.

Ejemplo 02

Encontrar el valor de la pendiente m y la ordenada al origen de la ecuación de la recta

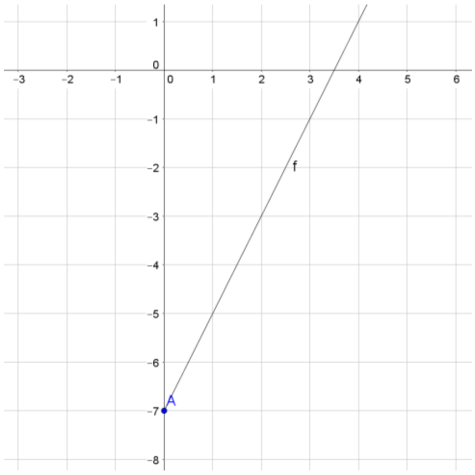
y = 4x – 7.

De acuerdo con la ecuación de la recta

Y = mx + b:

La pendiente es m = 4.

La ordenada al origen es b -7.



Ejemplo 03

Escribir una ecuación que represente el pago mensual de un servicio de televisión por cable que cuesta 169 pesos al mes e incluye 50 canales básicos.

Se desea ampliar la cobertura contratando un servicio con un costo mensual de 20 pesos por cada canal adicional solicitado.

Para determinar una ecuación que represente el pago mensual se utiliza la forma y mx + b, donde:

El pago mensual del servicio es b = 169.

El costo mensual por canal adicional solicitado es m = 20.

El número de canales adicionales es x.

Se sustituye con los valores anteriores en la ecuación de la recta y queda:

y = 20x + 169

Para utilizar esta ecuación y calcular el pago mensual cuando se contratan tres canales adicionales, x = 3, se sustituye en la ecuación el valor de x:

Y = 20(3) + 169

El pago mensual del servicio con tres canales adicionales cuesta 229 pesos.

2.2 Forma punto pendiente y-y1=m(x-x1)

La ecuación punto-pendiente de la recta se plantea si se conoce la pendiente de la recta y cualquiera de sus puntos, pues con ello queda determinada la recta:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Se puede llegar a la ecuación en forma punto-pendiente a partir de las otras múltiples expresiones de una ecuación que determina una recta en el plano cartesiano. Basta con realizar las transformaciones que permitan averiguar la pendiente o dirección del vector de la recta y uno de sus puntos, que es la tangente que forma con la rama positiva del eje X y uno de sus puntos.

Si se conocen la pendiente (m) de una recta y un punto de ella con coordenadas P (x1, y2), se puede interpretar algebraicamente con una ecuación que represente esta recta:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo 01

Determinar la ecuación de la recta con pendiente igual a 3 que pasa por el punto a (2,4) y realizar el bosquejo de la gráfica.

Se sustituye en la formula con los valores de las coordenadas del punto y la pendiente, se realizan las operaciones y se simplifica:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-5) = 3(x - 2)$$

$$y + 5 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 6 - 5$$

$$y = 3x - 11$$

La ecuación de la recta es: y = 3x – 11.

Para bosquejar la gráfica se toma en cuenta lo siguiente:

Se ubica el punto A en el plano cartesiano.

La pendiente es positiva, ya que va de derecha a izquierda y con dirección hacia abajo. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1}$

A partir del punto A se trazan el incremento en y hacia abajo (3 unidades) y el incremento en x hacia la izquierda (1 unidad), se marca un segundo punto y se unen para bosquejar la recta.

2.3 Ecuación de la recta determinada por dos puntos

Una recta trazada geométricamente en un plano cartesiano puede ser descrita algebraicamente por medio de una ecuación lineal.

La expresión para definir la ecuación de una recta dados dos puntos A y B con coordenadas A (x1, y2) y B(x2, y2) es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo 01

Determinar la ecuación en la forma pendiente ordenada al origen de la recta que pasa por los puntos A (-1,2) y B (4,7) y trazar su grafica.

x1 = -1, y1 = 2   x2 = 4, y2 =7

Se sustituye con los valores en la fórmula de ecuación de la recta dados dos puntos y se realizan las operaciones:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{7 - 2}{4 - (-1)}(x - (-1))$$

$$y - 2 = \frac{5}{5}(x + 1)$$

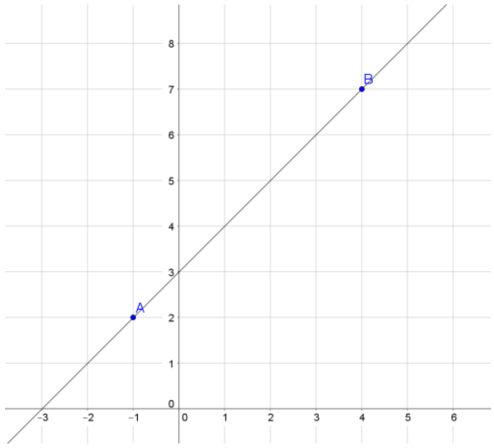
$$y = x + 1 + 2$$

$$y = x + 3$$

La ecuación de la recta es y = x + 3.

Para graficar se ubican los dos puntos en un plano y se unen.

Se puede validarla grafica identificando si la recta tiene ordenada al origen en 3, es decir, si atraviesa el eje y por 3.



Ejemplo 02

Guadalupe entrena natación. Ella sabe que recorre 50 m en 120 segundos y completa 1 000 m en 40 minutos. Escribe la ecuación en la forma pendiente ordenada al origen y su grafica.

Se convierten los tiempos a una misma unidad, en este caso los segundos del primer punto se convierten a minutos: 120 ÷ 60 = 2.

Se identifican los dos puntos: A (50,2) y B (1 000,40), donde: $x_1 = 50$, $y_1 = 2$ $x_2 = 1\,000$, $y_2 = 40$

Se sustituye con los datos en la fórmula, se realizan las operaciones y se simplifica:

$$y - 2 = \frac{40 - 2}{1000 - 50}(x - 50)$$

$$y - 2 = \frac{38}{950}(x - 50)$$

$$y - 2 = \frac{1}{25}(x - 50)$$

$$y - 2 = \frac{x}{25} - 2$$

$$y = \frac{x}{25}$$

Para graficar se ubican los dos puntos y se unen.

Para validar la gráfica se identifica que la recta tenga ordenada al origen en 0, es decir, si atraviesa el eje y por 0.

2.4 Forma simétrica x/a+y/b=1

La ecuación simétrica o canónica se puede transformar en la ecuación normal. La pendiente es m = -b/a. Así mismo, la ecuación simétrica se puede obtener a partir de la ecuación normal.

Para determinar una recta solo se necesitan dos puntos. Cuando estos puntos de la recta corresponden a las intersecciones con los ejes X y Y, su ecuación se encuentra en forma sencilla.

El punto de intersección de la recta con el eje X (a) tiene por coordenadas (a,0), mientras que el punto de intersección de la recta con el eje Y (b) tiene por coordenadas (0, b), por lo tanto, la ecuación que representa a esta recta es:

$$\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

Ejemplo 01

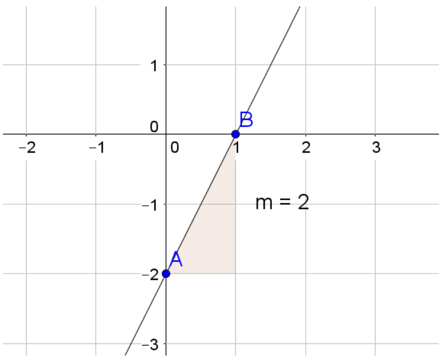
Determinar la ecuación simétrica de la recta cuyas intersecciones en los ejes X y Y son: a = 3, b = 6.

Con las intersecciones a y b se sustituye con los valores en la ecuación en su forma simétrica:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1}$$

Ejemplo 02

Determinar la intersección (b) con el eje Y de la recta cuya intersección en el eje X es a = 1 y tiene una pendiente de m = 2, después determinar su ecuación simétrica.



Con la intersección a = 1se puede determinar que las coordenadas de un punto son P (1,0).

Empleado la pendiente m = 2 se puede ubicar otro punto en el plano cartesiano, sabiendo que:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

Se ubica el punto Q (0,2) en el plano cartesiano para encontrar la intersección (b) con el eje Y.

La intersección con el eje Y es b = -2.

Con las intersecciones a = 1 y b = -2, se sustituye con los valores en la ecuación en su forma simétrica:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1}$$

Ejemplo 03

En un centro comercial se venden relojes de una marca reconocida. Los administradores observan que cuando el precio de cierto modelo de reloj es de 50 dólares se venden 10 relojes, y cuando el precio baja a 30 dólares se venden 20. Determinar la ecuación simétrica de la recta.

El punto A tiene coordenadas A (10,50) y el punto B tiene coordenadas B (20,30), el eje X corresponde a la cantidad de relojes y el eje Y al precio.

Se determina la pendiente de la recta formada por los puntos A y B para obtener alguna de las ecuaciones de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{30 - 50}{20 - 10}$$

$$m = \frac{-20}{10}$$

$$m = -2$$

Con la pendiente m = -2 y el punto A (10,50), se determina la ecuación de la recta punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 50 = -2(x - 10)$$

$$y - 50 = -2x + 20$$

$$y = -2x + 20 + 50$$

La ecuación de la recta es: y = -2x + 70.

El punto de intersección de la recta con el eje X tiene por coordenadas P (a,0), se sustituye en la ecuación y se despeja para obtener:

$$0 = -2a + 70$$

$$2a = 70$$

$$a = \frac{70}{2}$$

$$a = 35$$

El punto de intersección de la recta con el eje Y tiene por coordenadas Q (0,b), se sustituye en la ecuación y queda:

$$b = -2(0) + 70$$

$$b = 70$$

La intersección con el eje X es a = 35, y la intersección con el eje Y es b = 70.

Se sustituye con los valores en la ecuación en su forma simétrica y se obtiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x}{35} + \frac{y}{70} = 1}$$

2.5 Ecuación general de la recta Ax+By+C=0

La ecuación general de la recta es una expresión de la forma Ax + By + C = 0 donde A y B son números reales, pero no pueden ser simultáneamente iguales a cero. Consecuencias de modificar uno o más valores de los coeficientes A, B, C: ... A = 0, se obtiene una recta horizontal (m = 0)

A partir de conocer algunos elementos de la recta como un punto, su pendiente, su ordenada al origen o la intersección con los ejes coordenados, las diferentes ecuaciones de una recta pueden representarse en una forma general:

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Donde A y B deben ser diferentes de 0 y C pueden o no ser igual a 0.

Una vez conocida la ecuación de una recta en cualquiera de sus formas se le puede expresar en su forma general, pasando los términos a un solo lado de la igualdad.

Para determinar la pendiente y ordenada al origen de una recta a partir de la forma general, hay que considerar que dado que B ≠ 0, se le puede expresar en la forma:

$$\boldsymbol{y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}}$$

Donde la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) son:

$$\boldsymbol{m = -\frac{A}{B} \quad y \quad b = \frac{C}{B}}$$

Ejemplo 01

Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación general es

2x + y – 4 = 0.

Se observa que, de acuerdo con la forma general, los valores de la ecuación son: A = 2, B = 1 y C = -4.

Para calcular la pendiente y la ordenada, se despeja la variable y:

$$y = -\frac{2x}{1} + \frac{4}{1}$$

$$y = -2x + 4$$

El resultado es una ecuación de la forma pendiente ordenada al origen, donde m = -2 y la ordenada al origen es b = 4.

Ejemplo 02

Determinar la ecuación de la recta en su forma general si tiene una pendiente m = 4n y una ordenada al origen b = 3.

Se sustituye con los valores de m = 4 y b = 3 para encontrar la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen:

$$y = mx + b$$

$$y = 4x + 3$$

Para determinar la forma general de pasan los términos del segundo miembro de la igualdad al primero:

$$y - 4x - 3 = 0$$

Se ordenan los términos para obtener la forma general:

$$4x + y - 3 = 0$$

Ejemplo 03

Se compra una casa en 3 millones de pesos, que 5 años después tendrá un valor de 4.2 millones. Si se considera que la apreciación se comporta de manera lineal, determinar la ecuación que representa el precio de la casa y su ecuación en su forma general, el significado de la pendiente de la recta y el costo de la casa luego de 9 años.

Se considera los puntos A (0,3) y B (5,4.2) y se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{4.2-3}{5-0} \rightarrow m = \frac{1.2}{5} \rightarrow m = 0.24$

De acuerdo con el punto A la ordenada al origen es b = 3; por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y = 0.24x + 3$$

Se iguala a 0 y se ordenan los términos para obtener la ecuación en su forma general:

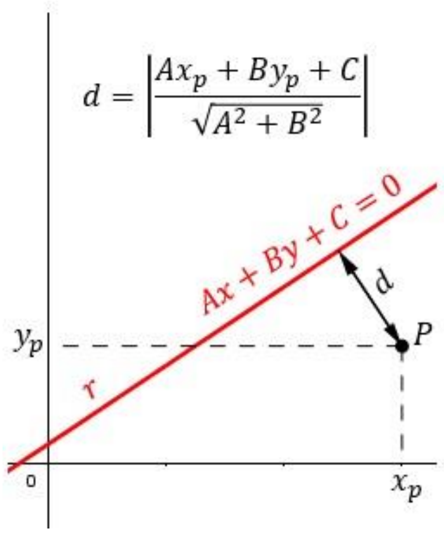
$$0.24x + y - 3 = 0$$

La pendiente representa el incremento del valor de la casa cada año. Significa que su precio aumenta 0.24 millones de pesos al año, es decir, 240 mil pesos. Por lo tanto, en 9 años su precio aumentará 2.16 millones de pesos, y el costo será de 5.16 millones.

2.6 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la longitud de un segmento que, partiendo del punto del plano, sea perpendicular a la recta. Para que la longitud de ese segmento sea la mínima, el segmento y la recta deben de ser perpendiculares.

Sabiendo las coordenadas del punto P (xp,yp) y la ecuación general de la recta, la distancia se obtiene por la fórmula:



Hay que poner necesariamente la ecuación de la recta en su forma general y sustituir en la ecuación los valores de las coordenadas del punto. El resultado se expresa en valor absoluto.

Para calcular la distancia de un punto (P) a una recta ® y que su longitud sea la misma, se utiliza la siguiente expresión.

$$d(P,r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La distancia corresponde a la perpendicular trazada desde el punto hasta la recta, como se observa en la figura de la izquierda. El resultado se considera como valor absoluto porque solo se trata de distancia.

Ejemplo 01

Calcular la distancia del punto A (2,3) a la recta y = 3x -1.

Se expresa la ecuación de la recta en su forma general; se pasan todos los términos al primer miembro, se iguala a cero y se organizan los términos:

- $3x + y + 1 = 0$

Se sustituye en la fórmula de distancia de un punto a una recta con los valores de las coordenadas del punto A: x1 = 2, y1= -3 y los valores de la fórmula general A = -3, B = 1 y C = 1:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|(-3)(2)+(1)(-3)+1|}{\sqrt{(-3)^2+(1)^2}}=\frac{|-6-3+1|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|-8|}{3.16}=2.53$$

La distancia del punto a la recta es de 2.53 unidades.

Ejemplo 02

Determinar la distancia del punto B (0,5) a la recta cuya ecuación en su forma simétrica es:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1$$

Para expresar la ecuación simétrica en la forma general de la recta, se realiza lo siguiente:

Se obtiene un común denominador:

- $$\frac{5x+2y}{-10}=1$$

Se pasa el -10 al otro lado de la igualdad, y se tiene:

- $$5x+2y=-10$$

Se iguala a cero y se obtiene la forma general:

- $$5x+2y+10=0$$

En la fórmula, se sustituye con los valores de las coordenadas del punto B:

x1 = 0, y1 = 5, y los de la ecuación general A = -5, B = 2 y C = 10:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|(-5)(0)+(2)(5)+10|}{\sqrt{(-5)^2+(2)^2}}=\frac{|0+10+10|}{\sqrt{25+4}}=\frac{|20|}{5.385}=3.71$$

La distancia del punto a la recta es de 3.71 unidades.

2.7 Rectas paralelas y perpendiculares

Para que dos rectas sean paralelas sus inclinaciones o pendientes deben ser iguales, es decir:

$$m_a=m_b$$

Para que dos rectas no verticales o no horizontales sean perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser igual a -1:

$$(m_a)(m_b) = 1$$

Ejemplo 01

Determinar si la recta L, formada por los puntos A (7,6) y B (3,-2) y L2 formada por los puntos C (1,1.5) y D (7,-1.5), son rectas paralelas o perpendiculares.

Para determinarlo se calcula la pendiente o inclinación de cada una de ellas.

Recta L1

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-2-6}{3-7} \rightarrow m = \frac{-8}{-4} \rightarrow \boldsymbol{m = 2}$$

Recta L2

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-1.5-1.5}{7-1} \rightarrow m = \frac{-3}{6} \rightarrow \boldsymbol{m = -\frac{1}{2}}$$

Al comparar las pendientes de cada recta se observa que:

$$m_1 \neq m_2 \rightarrow 2 \neq -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, las rectas no son paralelas. Pero si se multiplican las pendientes:

$$(m_a)(m_b) = -1 \rightarrow (2)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$$

El resultado indica que las rectas son perpendiculares.

2.8 Puntos de intersección

Cuando dos rectas que no son paralelas se cruzan, se dice que tienen un punto en común llamado punto de intersección o solución. Una forma de determinar el punto de intersección entre dos rectas cuando se conocen sus ecuaciones es la siguiente:

Se despeja y en ambas ecuaciones.

Se igualan las ecuaciones, se despeja x y se realizan las operaciones.

Lo que resulta del despeje en el paso anterior es la coordenada de x del punto de intersección.

Se sustituye con el valor de encontrando en cualquiera de las ecuaciones y se realizan las operaciones.

El valor obtenido equivale al valor de y en el punto de intersección

Ejemplo 01

Encontrar las coordenadas del punto de intersección entre las rectas

$\boldsymbol{y_1 = 3x - 2}$ $\quad y \quad$ $\boldsymbol{y_2 = x + 5}$ y trazar la gráfica.

Dado que, y ya está despejada, se igualan las ecuaciones y se despeja x:

$$3x - 2 = x + 5$$

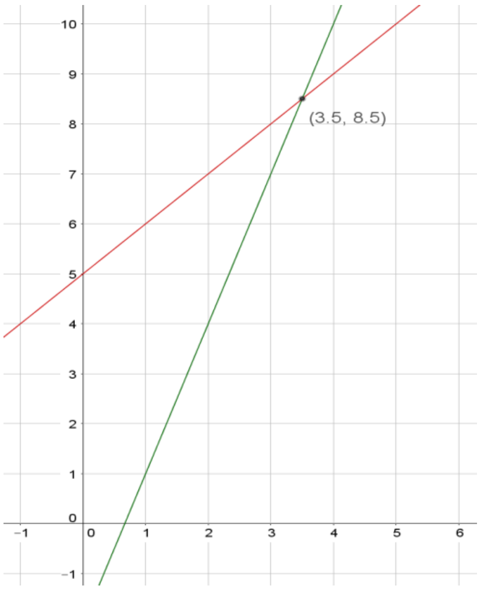
$$3x - x = 5 + 2$$

$$2x = 7$$

$$x = 3.5$$

Para calcular la ordenada se sustituye x en cualquiera de las ecuaciones y se resuelve: $y = 3(3.5) - 2 \rightarrow y = 10.5 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = 8.5}$

Las coordenadas del punto de intersección son (3.5,8.5), y se comprueba al trazar la gráfica:



También es posible determinar la intersección de manera analítica, utilizando la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen y = mx + b, y empleando las siguientes expresiones:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \qquad y = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2}$$

Ejemplo 02

Dos empresas de telefonía ofrecen paquetes con diferentes tarifas. En la empresa A, el paquete premier ofrece el primer minuto en 2.5 pesos más 50 centavos por cada minuto adicional. En la empresa B, el mismo paquete ofrece el primer minuto en 2.25 pesos más 55 centavos por cada minuto adicional.

Con base en las tarifas de cada empresa, determinar la ecuación que representa la tarifa de cada una y el punto de intersección entre ambas rectas.

Con los datos conocidos se construye una tabla para cada una de las empresas.

Empresa A	
Minutos (x)	Costo (y)
1	2.5
2	3
3	3.5
4	4
5	4.5

Empresa B	
Minutos (x)	Costos (y)
1	2.25
2	2.80
3	3.35
4	3.9
5	4.45

Para determinar la pendiente, se consideran dos datos que representan dos puntos en el plano y para cada una de las rectas se sustituye con los valores y se realizan las operaciones.

Recta 1: $m = \frac{3-2.5}{2-1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$

Recta 2: $m = \frac{2.8-2.25}{2-1} = \frac{0.55}{1} = 0.55$

La pendiente para cada caso representa la variación por minuto de telefonía.

Para determinar la ecuación de cada recta se utiliza la ecuación punto pendiente :

Recta 1	Recta 2
$y - 2.5 = 0.5(x - 1)$ $y - 2.5 = 0.5x - 0.5$ $y = 0.5x + 2$	$y - 2.25 = 0.55(x - 1)$ $y - 2.25 = 0.55x - 0.55$ $y = 0.55x + 1.7$

A partir de las ecuaciones de las rectas se determinan la pendiente m y la ordenada al origen b:

Recta 1: $m = 0.5, b = 2$

Recta 2: $m = 0.55, b = 1.7$

Se sustituye con los valores para obtener las coordenadas del punto de intersección:

$$x = \frac{1.7 - 2}{0.5 - 0.55} = \frac{-0.3}{-0.05} = 6$$

$$y = \frac{0.5(1.7) - 0.55(2)}{0.5 - 0.55} = \frac{0.85 - 11}{-0.05} = \frac{-0.25}{-0.05} = 5$$

Las coordenadas de intersección entre estas dos rectas son (6,5). Esto significa que en el minuto 6 las dos empresas estarán cobrando la misma cantidad, es decir, 5 pesos.

2.9 Diferencia entre relación y función

Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados o cualquier correspondencia entre conjuntos previamente estipulados, mientras que una función es la que da exactamente un valor a la variable dependiente (y) para cada valor de la variable independiente (x) en el dominio.

¿Más sencillos? Veámoslo así. Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier subconjunto del producto cartesiano AxB, incluso el conjunto del vacío. Por el otro lado, en una función la ley suprema es que para todo elemento de A tiene que existir un único elemento de B.

R es reflexiva si para todo elemento de A, «(a, a)» está en la relación. Se dice que es simétrica si cada vez que (a, b) está en la relación, «(b, a)» está en la relación, antisimétrica si cada vez que «(a, b)» y «(b, a)» están en la relación («a=b») y transitiva si cada vez que «(a, b)» y «(b, c)» están en la relación, «(a, c)» está en la relación.

Función

En matemáticas una magnitud o cantidad es función de otra si el valor de la primera depender de la segunda. Por ejemplo, el área A de un círculo es función

de su radio o bien, la duración T de un viaje es función de la distancia y de la velocidad. En este caso, área y tiempo son variables dependientes y el radio, la velocidad y la distancia son variables independientes.

En análisis matemático una función es una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto.

Una función se puede representarse de diversas formas, mediante un algoritmo o ecuaciones, mediante tablas de valores que emparejan la variable independiente con la dependiente o como gráficas que dan una imagen de la función.

Relación

Una relación matemática implica la idea de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que forman parejas. Cuando se formula una expresión se relacionan dos o mas objetos entre si y se postula una relación que no necesariamente es matemática.

En una relación matemática encontramos la correspondencia que existe entre dos conjuntos. A cada elemento del primer conjunto le corresponde al menos uno del segundo conjunto.

Diferencias entre función y relación

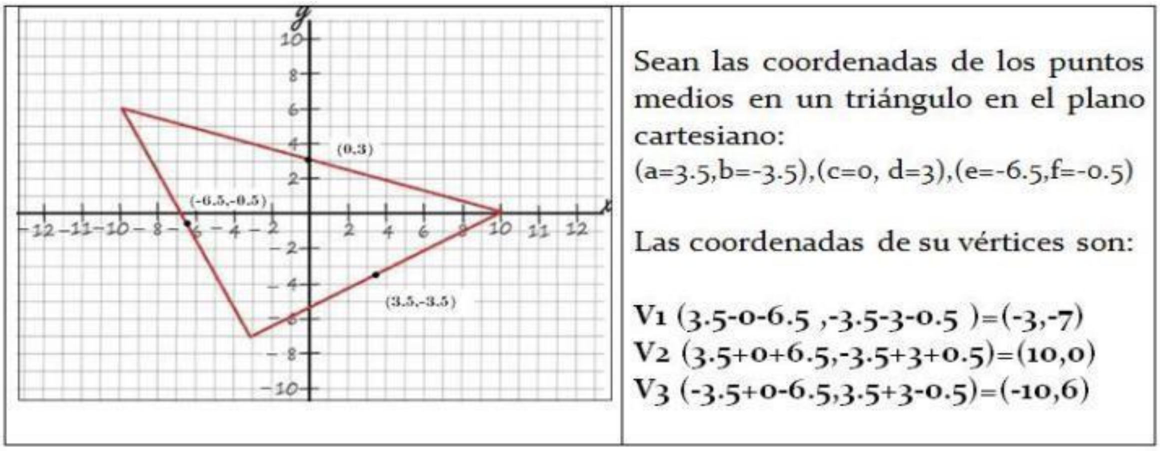
Cuando a cada elemento de un conjunto le corresponde solo uno del otro se habla de una función. Las funciones matemáticas son siempre relaciones. Sin embargo, no todas las relaciones son siempre funciones.

En una relación el primer conjunto se denomina dominio y el segundo recibe el nombre de rango. Se grafican en el plano cartesiano.

Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados o correspondencias previamente estipuladas entre los integrantes de dos grupos.

Una función es lo que le da valor a una variable dependiente para cadfa valor de una variable independiente en el dominio.

2.10 Regla de correspondencia, dominio y rango



Comencemos por la definición de "relación" y "función".

Relación: Es el conjunto de pares ordenados (x,y) que puede tener valores diferentes o iguales para la variable "x".

Función: Es el conjunto de pares ordenados (x,y), donde para cada valor de "x" sólo puede corresponder un valor en "y"; además, la variable "y" depende de la variable "x" mediante la siguiente regla de correspondencia: f(x)=y Dónde:

f(x)=y→ Regla de correspondencia x→ Variable independiente y→ Variable dependiente

Por ejemplo, en los siguientes ejemplos identifica la "función" y la "relación":

(3,7), (2,8), (-5,7), (-1,8)

Es una función porque las entradas del eje "x" son 3, 2, -5 y -1, y ningún número se repite.

(4,-6), (6,-9), (-4,-6), (5,4), (6,3).

Es una relación porque las entradas del eje "x" son 4, 6, -4, 5 y 6, y se repite la entrada con el número 6.

En una gráfica, para identificar una función y una relación, si se traza una línea vertical en el plano, y esta línea toca dos o más puntos de la gráfica, significa que es una relación; en cambio, sí toca sólo un punto de la gráfica, hablamos de una función.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de números que cumplen la sustitución (tabulación) de una regla de correspondencia f(x)=y; este conjunto llamado dominio está ubicado en el eje “x” (ordenadas).

Se expresa de la siguiente forma: Domf o Df

RANGO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de números que dependen de la sustitución (tabulación) de los valores que puede tomar “x”, es decir, del dominio. Este conjunto de números es llamado “rango” y está ubicado en eje “y” (abcisas).

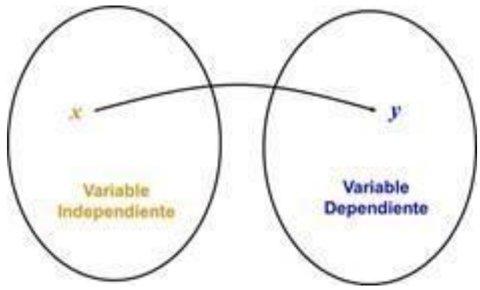
Se expresa de la siguiente forma: Ranf o Rf

IMAGEN Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

El elemento que se obtiene en el segundo conjunto después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del primer conjunto, recibe el nombre de imagen. Si x es el elemento en el dominio la imagen se denota como $f(x)$.

Rango o recorrido es el conjunto formado por todas las imágenes correspondientes al dominio.

Gráficamente:



Lo importante consiste en encontrar todos los valores de entrada que llevan a un valor real de salida en una función, o dicho de otro modo, obtener los valores que tienen que ser excluidos del dominio de la función.

Para todo fin práctico, para encontrar el dominio de la función se debe considerar lo siguiente:

Si se tiene una función racional, el dominio será todos los números reales menos aquellos que hagan que ese denominador sea cero.

Si se tiene una raíz de índice par, el dominio será todos los números reales que no hagan que el radicando de la raíz sea menor que cero.

Para calcular el rango de una función se despeja la variable x, expresión que queda en términos de y y se obtienen los valores de y que hacen que exista dicha expresión.

Ejemplos.

Obtener el dominio y rango de las siguientes funciones:

$f(x) = 3x + 5$

Solución.

Como la función no es racional ni irracional, existe para cualquier valor de x, es decir: $D_f = (-\infty, \infty)$

Se establece: $y = 3x + 5$

Despejando x: $y - 5 = 3x \rightarrow \frac{y-5}{3} = x$

$$x = \frac{y-5}{3}$$

Como la expresión tampoco es racional ni irracional, existe para cualquier valor de y, es decir: $R_f = (-\infty, \infty)$

$f(x) = x^2 - 1$

Solución.

Como la función no es racional ni irracional, existe para cualquier valor de x, es decir: $D_f = (-\infty, \infty)$

Se establece: $y = x^2 - 1$

Despejando x: $y + 1 = x^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = x$

$$x = \sqrt{y+1}$$

Analizando el radicando: $y + 1 \geq 0 \rightarrow y \geq -1$

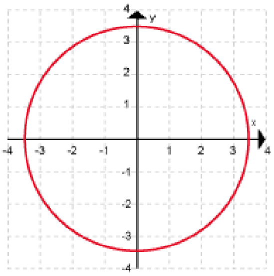
Así que el rango es: $R_f = [-1, \infty)$

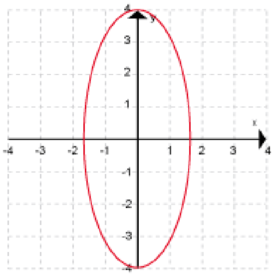
CONCLUSIÓN

El dominio de una función es el conjunto de elementos x que hacen que la función tenga sentido. La imagen de x se designa por $f(x)$. El rango es el conjunto de imágenes.

2.11 Extensiones (obtención del dominio y el rango por métodos algebraicos)

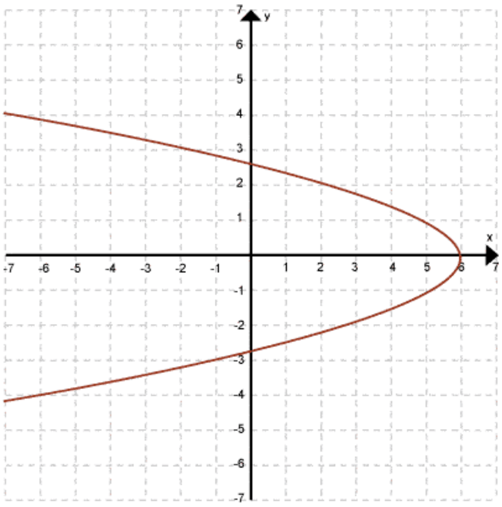
Como seguramente escribiste en el recuadro anterior, el **dominio** es el conjunto de valores integrado por todas las abscisas de los puntos que forman una gráfica. Seguramente que si revisaste lo que ya habíamos explicado antes, recordarás que hay gráficas que ocupan un intervalo determinado de valores, como las circunferencias y las elipses.



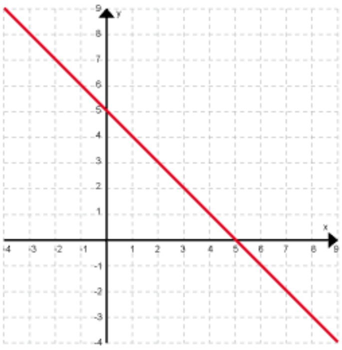
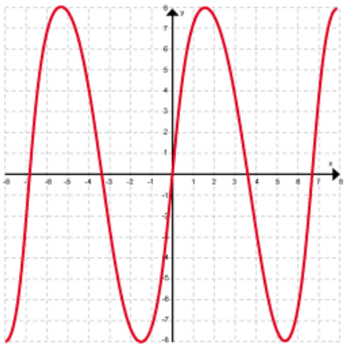
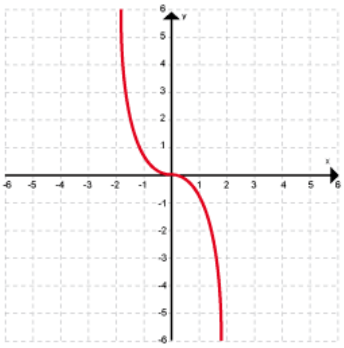
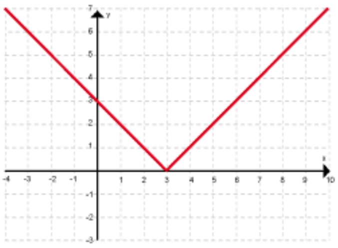


El dominio de esta circunferencia es el intervalo de valores entre -3.8 y 3.8, en tanto que el dominio de la elipse es el intervalo entre -1.7 y 1.7.

También recordarás que hay gráficas como las parábolas cuyo intervalo de valores *x* está definido por un extremo, y por el otro se prolonga hasta el infinito, como en este caso, en que el dominio son los valores desde - ∞ hasta 6.



Finalmente recordemos que hay muchas gráficas de extensión infinita, y en esos casos, aunque sólo podamos visualizar una parte de la gráfica, debemos saber que se extiende indefinidamente hacia ambos lados. En estos casos, el dominio son todos los números reales, desde - ∞ hasta ∞. Aunque el mejor ejemplo de este caso es la recta, existen muchísimos otros:

UNIDAD III

FENÓMENOS NATURALES Y VARIABLES; EL MODELO LINEAL

3.1 Tabla de valores

Una tabla de valores se utiliza generalmente cuando hay pocos valores de la variable independiente x y sus correspondientes valores de la variable dependiente y.

Es muy útil en ciencias experimentales, en las que se estudia algún fenómeno en un laboratorio o se hacen pruebas y se recogen datos. Las ventajas son que para armarlas se depende de datos obtenidos y son fáciles de visualizar. La desventaja es que proporciona muy poca información con los pocos datos que se tienen como para llegar a una generalización.

La variable independiente se representa en la primera columna si la tabla es vertical o en la primera fila si la tabla es horizontal.

Se estudia el recorrido de un móvil con velocidad constante durante cierto tiempo:

X (Tiempo en hs)	Y (recorrido en km)
1	60
2	120
2,5	150
3	180
3,5	210

variable independiente

variable dependiente

X (tiempo en hs)	1	2	2,5	3	3,5
Y (recorrido en km)	60	120	150	180	210

vari inde

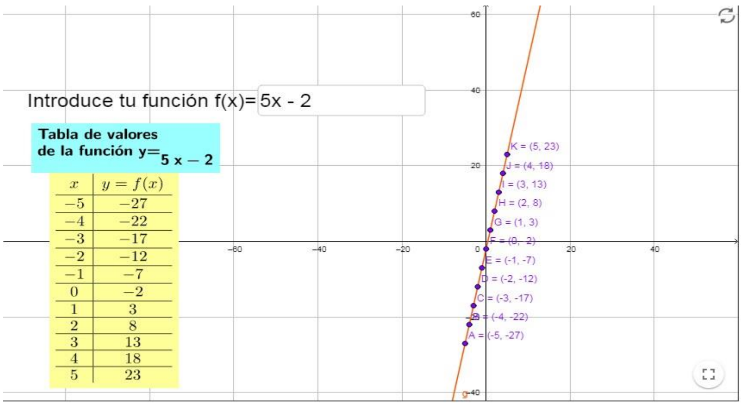
varia depe

Los elementos que están en la primera columna, para la tabla vertical son los elementos del Dominio. Los elementos de la segunda columna son las imágenes.

De la misma manera se interpreta en el caso que la tabla sea horizontal, la primera fila corresponde a los elementos del Dominio y la segunda a los de la Imagen.

Tabla de valores y grafica de una función

Ejemplos y graficas



x	$y = f(x)$
−5	−27
−4	−22
−3	−17
−2	−12
−1	−7
0	−2
1	3
2	8
3	13
4	18
5	23

3.2 Gráficas

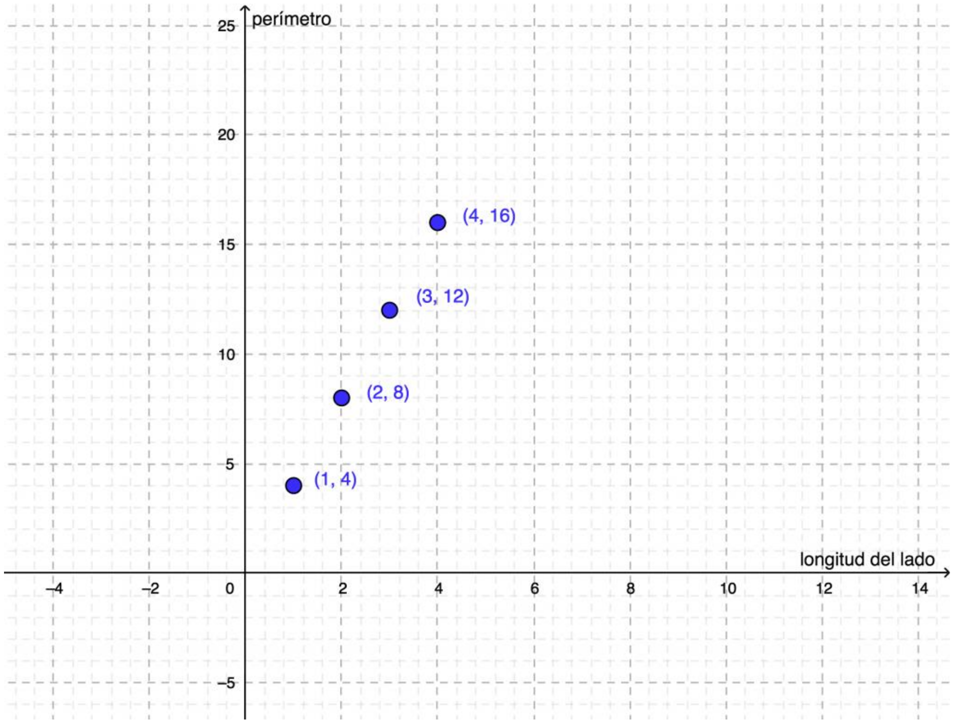
La representación gráfica de una tabla de valores se hace a través de un sistema de ejes coordenados.

Para ello no tienes más que dibujar los pares de puntos como hicimos anteriormente en el apartado de coordenadas cartesianas.

Recuerda que el eje horizontal corresponde siempre a la variable independiente (que normalmente es la x) y el eje vertical a la variable dependiente (que normalmente es la y).

▪ Ejemplo:

Así, siguiendo con el ejemplo del cuadrado la representación gráfica de los puntos de la tabla de valores sería:

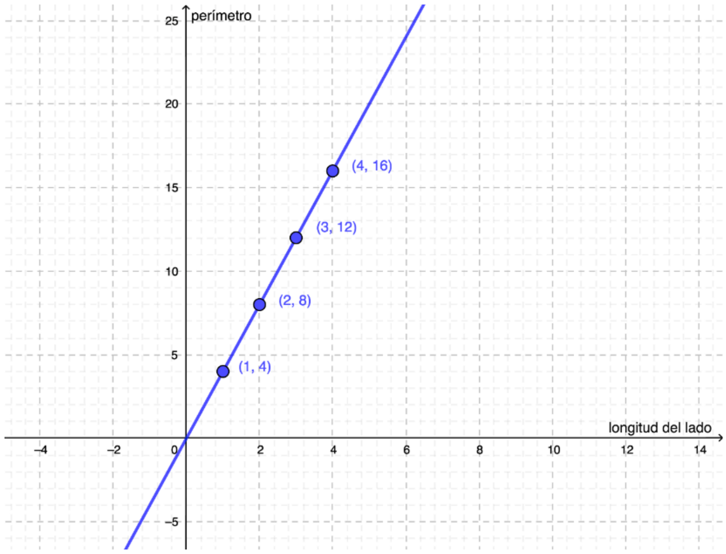


Dependiendo de las variables con las que estés trabajando, podrás unir esos puntos o no.

Para saber cuando se pueden unir o no, tienes que preguntarte si la variable independiente puede tomar todos los valores intermedios entre dos de los dibujados.

- Ejemplo:

En el ejemplo del cuadrado, el lado de un cuadrado puede tomar cualquier valor, así puedes unir los puntos de la gráfica.



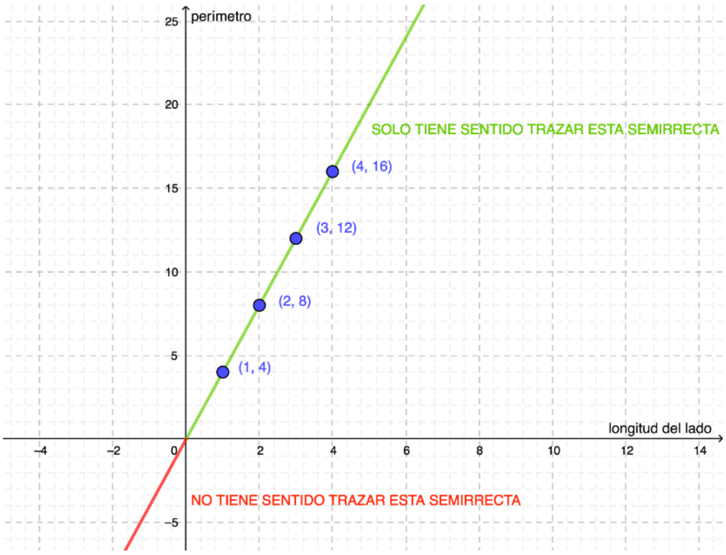
Sin embargo, habrá veces en los que no es posible tomar los valores intermedios. Por ejemplo, cuando la variable independiente es un número de personas, número de asignaturas aprobadas, meses del año… En esos casos, la representación se quedará en la representación de los puntos.

Como anotación, has de saber que las variables que no pueden tomar todos los valores intermedios entre dos dados se llaman variables discretas mientras que aquellas que pueden tomar todos los valores intermedios se llaman variables continuas.

Por último, en caso de trabajar con variables continuas y poder unir los puntos, tienes que tener cuidado de hasta dónde prolongas las rectas obtenidas, pues hay veces que no tienen sentido ciertos valores.

- Ejemplo:

En el ejemplo del cuadrado, no tiene sentido prolongar la recta cuando el lado del cuadrado toma un valor negativo pues no existen las longitudes negativas.



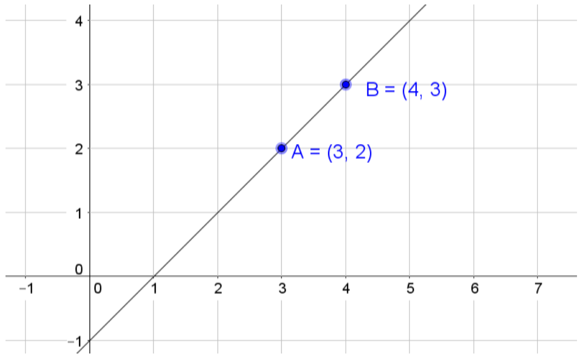
3.3 Gráfica de rectas con Geogebra

Existen varias formas de graficar rectas en GeoGebra. Una de ellas es ubicar dos puntos A y B, luego seleccionar la herramienta LINEA , dar clic en el punto A y después en el B. Observarás que se traza una recta que pasa por esos dos puntos y su ecuación aparece en forma automática en la VISTA ALGEBRAICA.

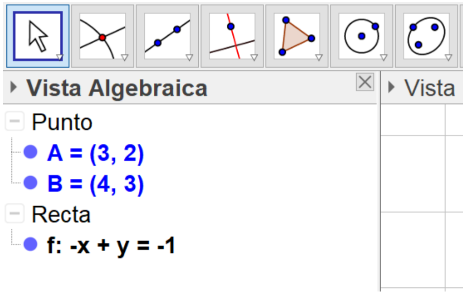
Ejemplo 01

Trazar una recta que pase por los puntos A (3,2) y B (4,3).

Se selecciona la herramienta LINEAL y se da clic primero en el punto A y luego en el punto B.



Se observa que se traza una recta que pasa por los dos puntos y su ecuación -x + y = I parece en la VISTA ALGEBRAICA automáticamente.



Se da clic primero en el punto B y luego en el A. Nota que aparece otra ecuación:

Ambas son ecuaciones equivalentes de la misma recta, pero están igualadas al término independiente C (-I).

Otra forma de graficar una recta es utilizando el campo ENTRADA, donde se puede escribir directamente en cualquiera de sus formas la ecuación de la recta que se va a graficar.

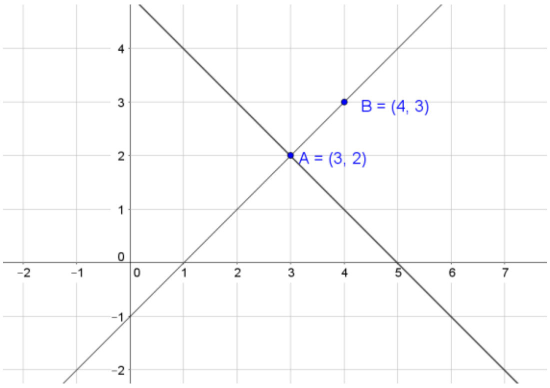
Ejemplo 02

Graficar la ecuación general x + y – 5 = 0.

Se escribe la ecuación en el campo Entrada: x+y-5=0.

Se presiona la tecla ENTER.

Se observa que esta recta es perpendicular al punto A de la recta trazada en el ejemplo I.



Aprende:

GeoGebra tiene herramientas para realizar construcciones geométricas automáticamente.

Si se tiene un punto y una recta, utilizando la herramienta PERPENDICULAR , se da clic sobre la recta y luego sobre el punto, y se observa que inmediatamente se traza la recta perpendicular para ese punto.

Al dar clic en la herramienta PERPENDICULAR, en la esquina inferior derecha se despliegan otras opciones. La segunda herramienta es PARALELA ; al dar clic sobre la recta y luego sobre el punto se traza una recta paralela a la recta sobre la que se dio clic primero.

Resuelve

Trazar una recta paralela y otra perpendicular con las herramientas correspondientes.

Con la herramienta PUNTO se ubica el punto A (6,4).

Se introduce en el campo ENTRADA la ecuación $x - y - 5 = 0$, que corresponde a la recta a.

Para trazar una recta perpendicular al punto A se selecciona la herramienta PERPENDICULAR, se da clic sobre la recta a y luego sobre el punto A.

Para trazar una recta paralela a la recta a, se selecciona la herramienta PARALELA y se da clic sobre la recta a y luego sobre el punto A.

Otro conjunto de herramientas de GeoGebra son las de medición. La primera es ÁNGULO , que se despliega dando clic en dicha herramienta, en la esquina inferior derecha.

DISTANCIA o LONGITUD proporciona la distancia entre dos puntos, así como la distancia entre un punto y una recta. Para calcular la distancia entre los puntos A y B se selecciona esta herramienta y se da clic en el punto A y luego en el B. GeoGebra visualiza la distancia con una etiqueta AB = x, donde x es la distancia.

Para calcular la distancia de un punto a una recta se da clic en el punto y luego en la recta o viceversa.

Con la herramienta POLÍGONO se pueden unir tres o más puntos; para ello se selecciona, se da clic en cada uno de los puntos y con el primero se cierra el polígono. Si se selecciona la herramienta DISTANCIA, al dar clic en un polígono se visualiza su perímetro, mientras que con la herramienta ÁREA, al dar clic sobre ese polígono se muestra la superficie; ambos parámetros se pueden ver en la VISTA ALGEBRAICA.

3.4 Modelación de los datos de un experimento mediante una ecuación y proyección a futuro

La fórmula del MRU es

$$\boldsymbol{d = v \cdot t}$$

siendo dd la distancia recorrida, vv la velocidad del móvil tt el tiempo que dura el movimiento

Para calcular la velocidad o el tiempo, despejamos en la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{v = \frac{d}{t}} \quad ; \quad \boldsymbol{t = \frac{d}{v}}$$

Truco:

Para recordar las fórmulas, os puede ayudar lo siguiente:

Como a todos nos suena la velocidad en km/h, la velocidad es la distancia dividido entre el tiempo (km/h): v = d/t. Las otras fórmulas las calculamos despejando.

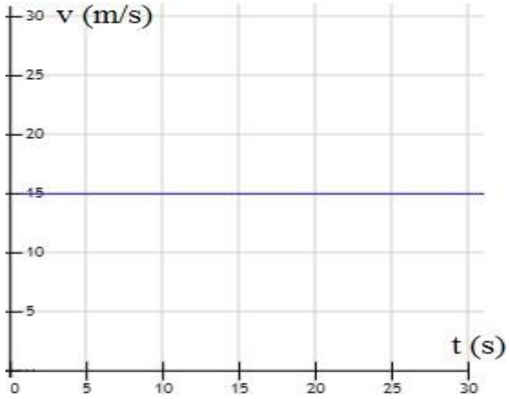
Consejos para los problemas:

Comprobar que las variables del movimiento (vv, dd y tt) tengan las mismas unidades de medida.

Escribir las unidades de medida de las variables en las operaciones.

Ejemplo:

¿A qué velocidad circula el móvil cuya gráfica de velocidad en función del tiempo es la siguiente?



¿Qué distancia recorre el móvil si el movimiento dura 1 minuto?

La velocidad del móvil es

$$v = 15\ m/s$$

Si el movimiento dura 1 minuto, es decir, 60 segundos, la distancia que recorre es 900 metros:

$$d = v \cdot t$$

$$d = \ 15 \frac{m}{s} \cdot 60\ s =$$

$$= 900\ m$$

3.5 Movimiento rectilíneo uniforme

Un movimiento es rectilíneo cuando un objeto describe una trayectoria recta respecto a un observador, y es uniforme cuando su velocidad es constante en el tiempo, dado que su aceleración es nula.

Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme se designa frecuentemente con el acrónimo MRU, aunque en algunos países es MRC, por movimiento rectilíneo constante. El MRU se caracteriza por:

Movimiento que se realiza sobre una línea recta.

Velocidad constante; implica magnitud y dirección constantes.

La magnitud de la velocidad recibe el nombre de celeridad o rapidez.

Sin aceleración.

Para este tipo de movimiento, la distancia recorrida se calcula multiplicando la magnitud de la velocidad por el tiempo transcurrido. Esta relación también es aplicable si la trayectoria no es rectilínea, con tal que la rapidez o módulo de la velocidad sea constante. Por lo tanto, el movimiento puede considerarse en dos sentidos; una velocidad negativa representa un movimiento en dirección contraria al sentido que convencionalmente hayamos adoptado como positivo.

De acuerdo con la Primera Ley de Newton, toda partícula puntual permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme cuando no hay una fuerza externa que actúe sobre el cuerpo, dado que las fuerzas actuales están en equilibrio, por lo cual su estado es de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme. Esta es una situación ideal, ya que siempre existen fuerzas que tienden a alterar el movimiento de las partículas, por lo que en el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es difícil encontrar la fuerza amplificada.

La fórmula del MRU es

$$\boldsymbol{d = v \cdot t}$$

siendo dd la distancia recorrida, vv la velocidad del móvil tt el tiempo que dura el movimiento

Para calcular la velocidad o el tiempo, despejamos en la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{v = \frac{d}{t} \quad ; \quad t = \frac{d}{v}}$$

Truco:

Para recordar las fórmulas, os puede ayudar lo siguiente:

Como a todos nos suena la velocidad en km/h, la velocidad es la distancia dividido entre el tiempo (km/h): v = d/t. Las otras fórmulas las calculamos despejando.

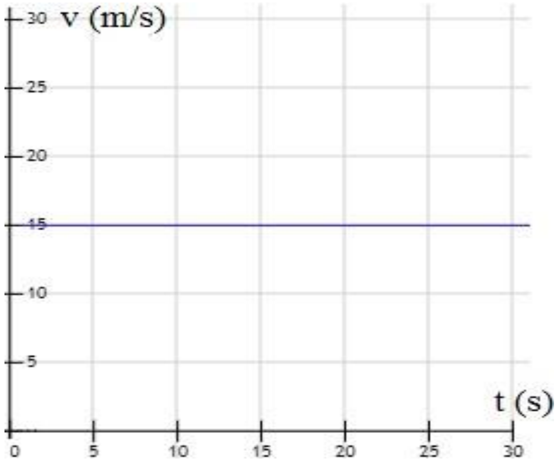
Consejos para los problemas:

Comprobar que las variables del movimiento (vv, dd y tt) tengan las mismas unidades de medida.

Escribir las unidades de medida de las variables en las operaciones.

Ejemplo:

¿A qué velocidad circula el móvil cuya gráfica de velocidad en función del tiempo es la siguiente?



¿Qué distancia recorre el móvil si el movimiento dura 1 minuto?

La velocidad del móvil es

$$v = 15\ m/s$$

Si el movimiento dura 1 minuto, es decir, 60 segundos, la distancia que recorre es 900 metros:

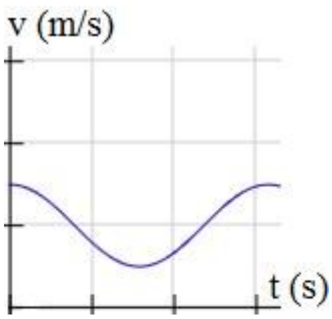
$$d = v \cdot t$$

$$d = 15\frac{m}{s} \cdot 60\ s =$$

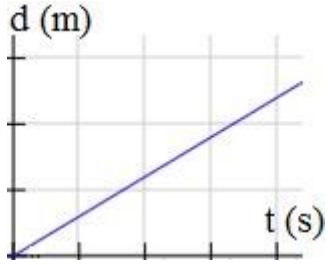
$$= 900\ m$$

Ejemplo 2:

¿La siguiente gráfica puede ser la gráfica de un movimiento rectilíneo uniforme? ¿Por qué?



¿La siguiente gráfica puede ser la gráfica de un movimiento rectilíneo uniforme? ¿Por qué?



Solución

La primera gráfica no puede ser la gráfica de un MRU porque la velocidad en un MRU es constante y, por tanto, su gráfica de la velocidad en función del tiempo debe ser una recta horizontal. La velocidad representada en la gráfica decrece y crece.

La segunda gráfica sí puede ser la gráfica de un MRU porque en un MRU la distancia recorrida crece de forma uniforme. La gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo debe ser una recta diagonal creciente (una recta lineal creciente).

3.6 La velocidad (pendiente)

Definición: Sea α el ángulo de inclinación de una recta. La pendiente m, de la recta es:

$m = \tan(\alpha)$

Teorema: La ecuación de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $(x1, y1)$ es de la forma: $y=m(x-x1)+y1$.

Demostración:

Sean $(x2, y2)$ otro punto más de la recta y α el ángulo de inclinación de la recta. Por el teorema del ángulo de inclinación de la recta tenemos que: $\tan(\alpha)=(y2-y1)/(x2-x1)$.

Consideremos (x, y) un punto genérico sobre la recta. Por el anterior teorema, tenemos que la ecuación de la recta es: $y=m(x-x1)+y1$, donde $m=(y2-y1)/(x2-x1)$.

Pero, por definición, tenemos que: $m=\tan(\alpha)$

Esto es: $y=m(x-x1)+y1$, donde m es la pendiente de la recta.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2, -1) con pendiente 3.

Solución:

La ecuación, como función de la recta que pasa por el punto $(x1, y1)$ con pendiente m es: $y=m(x-x1)+y1$.

Así que nuestra ecuación viene dada por la siguiente función: $y=3(x-(-2))+(-1)$, es decir, $y=3(x+2) -1$, lo que implica que; $y=3x+5$.

Ejemplo 2. Si Pedro corre a una razón de 3 metros sobre segundo y ha iniciado a una distancia de 100 metros del punto de partida. Encontrar la distancia que ha recorrido después de 5 minutos.

Solución.

d=distancia t=tiempo (segundos)

La velocidad (pendiente) es:

$v=3$ m/s

El punto es:

(0, 100)

El modelo lineal que expresa la distancia recorrida d en el tiempo t es: $d=3(t-0)+ 100$, es decir; $d=3t+100$, Puesto que: 5min=300seg

Entonces:

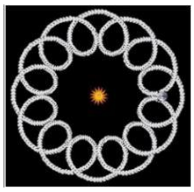
$d=100 + 3(300)$

$d= 100 + 90$

3.7 Lectura e interpretación gráfica de movimiento de varios vehículos

Sistema de referencia.- El movimiento forma parte de los fenómenos físicos que más directamente se perciben, sin embargo, su descripción detallada ha traído de cabeza a más de un científico a lo largo de la historia, ¿ha qué ha podido ser debido? La apariencia de un movimiento depende del lugar de observación, en concreto de su estado de movimiento. El descenso de una hoja que cae de un árbol es distinto visto por una persona situada debajo que el de otra que lo observa desde un autobús en marcha. Esto plantea la necesidad de elegir un sistema de referencia relativo al cual se refiera la observación.

Trayectoria.- ¿Cómo describirías el movimiento de la Luna? ¿Qué pensaban los hombres y mujeres acerca del movimiento del sol antes del s. XVI? ¿Es vertical y hacia abajo el movimiento de un objeto al caer? La referencia más inmediata de un movimiento es la forma del camino que describe, pero hay que precisar un poco más para acercarse al concepto que ahora se presenta: la trayectoria. El resultado de observar un movimiento está ligado a un SR, como hemos visto en el anterior apartado. El que se mueva o no el SR repercuten en la forma de percibir el movimiento estudiado.



La Luna describe un círculo si se observa su movimiento desde la Tierra. Si trasladamos el sistema de referencia al Sol, ese mismo movimiento se convierte en una epicicloide.

Observa la trayectoria que describe el avión, coincide con el rastro creado por la condensación de los gases que expulsa el motor.

Posición: Representación vectorial: La descripción de un movimiento requiere conocer el lugar donde se encuentra (posición) y cuándo (instante).

El Instante Se representa por la letra t, acompañado de algún subíndice si es necesario, para indicar el lugar que ocupa este dato respecto de un conjunto de medidas. La unidad fundamental en el Sistema Internacional es el segundo (s).

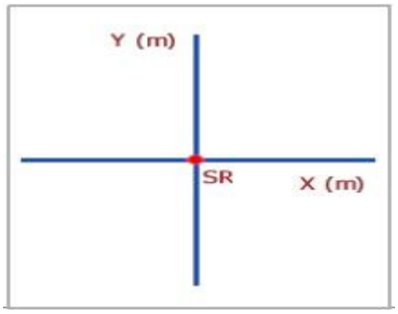
El tiempo transcurrido entre dos instantes se simboliza con las letras Δt. Pongamos un ejemplo:

Obtenemos el conjunto de datos siguientes por la lectura directa de un cronómetro: 0s; 0,5s; 1s; 1,5s.

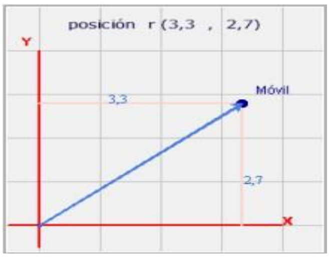
Situación	Símbolo	Tiempo transcurrido
Inicial	$t_0 = 0$ s	
1	$t_1 = 0{,}5$ s	$\Delta t = t_1 - t_0 = 0{,}5$ s
2	$t_2 = 1{,}0$ s	$\Delta t = t_2 - t_1 = 0{,}5$ s
3	$t_3 = 1{,}5$ s	$\Delta t = t_3 - t_2 = 0{,}5$ s

Posición: a representación en un plano se realiza sobre unos ejes coordenados XY. El observador se sitúa en el origen del Sistema de referencia (SR).

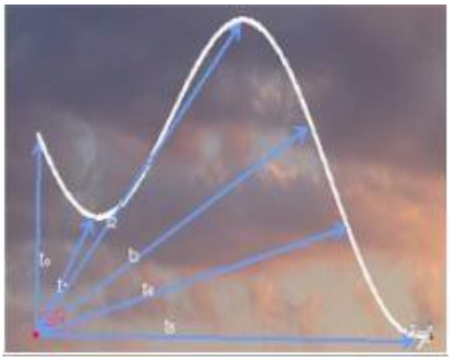
Mediante un aparato de medida adecuado o a través de relaciones matemáticas se determina el valor de cada posición (X,Y). El valor X corresponde a la abscisa, eje horizontal, y el valor Y a la ordenada, eje vertical.



En esta imagen la posición para cada instante t, se corresponde con el vector, representado por una flecha.



El gráfico flecha permite representar cualquier magnitud física que requiera más información que un número seguido de una unidad. Se expresa con dos componentes x e y, colocadas entre paréntesis y con una coma de separación entre ambas. Gráficamente se tratan como las coordenadas de un punto (que en el caso de la posición lo son).



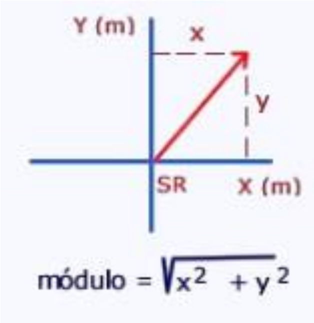
La posición de un móvil se dibuja en el plano a través de un vector (x,y) que representa las coordenadas cartesianas de un punto.

La representación vectorial de una magnitud física contiene tres datos: el módulo, la dirección y el sentido. Para el caso de la posición, ¿qué son y cómo se averiguan?

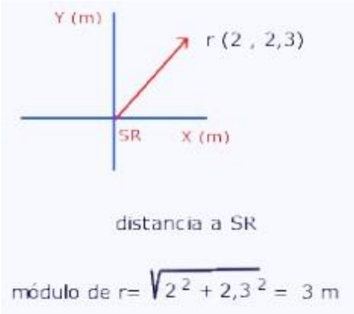
La posición tiene que informar de la situación de un móvil respecto de un observador situado en el SR. Esta información se concreta con la distancia al SR y con las coordenadas del punto donde se encuentra. El módulo, la dirección y el sentido del vector posición dan cuenta de ello, veamos cómo:

Modulo: Gráficamente se corresponde con el tamaño del vector ("flecha"). Para el caso de la posición informa de la distancia del móvil al origen del sistema de referencia. ¿Cómo se calcula esta distancia?

El tamaño del vector coincide con el valor de la hipotenusa de un triángulo cuyos lados se corresponden con las componentes (X,Y) del vector.



El módulo del vector posición determina la distancia del objeto que se mueve al origen del sistema de referencia.

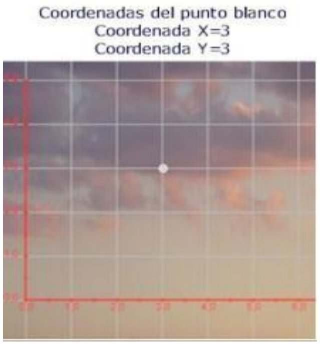


La dirección es la recta que contiene al vector ("flecha").

El sentido es el marcado por la punta de la flecha.

El punto de aplicación (origen) es el (0,0) del SR y el extremo el lugar donde está el móvil.

Observa el ejemplo:



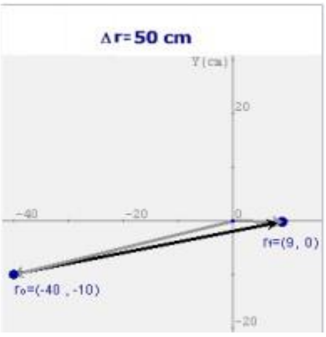
Pero un móvil cambia de posición, ¿Qué magnitud física da cuenta de ello?

Desplazamiento: La palabra desplazarse tiene un uso cotidiano, pero, como es frecuente, el lenguaje científico la ha adoptado precisando su significado. Un móvil se desplaza, evidentemente cuando se mueve, pero ¿se corresponde con algún valor concreto? ¿Es lo mismo espacio recorrido que desplazamiento?...

El desplazamiento entre dos instantes, to y t, se corresponde con un vector que se extiende desde la posición en to hasta la posición en t.

Observa en la imagen superior el desplazamiento simbolizado por el vector rojo que parte de la posición en el instante inicial to y termina en la posición correspondiente al instante final tf. Imagina una bola de billar describiendo un movimiento rectilíneo entre dos choques consecutivos (dos instantes). ¿Cómo se representa el desplazamiento?. A partir de él, ¿se podría determinar el espacio que recorrió?. Te proponemos que realices un planteamiento concreto de esta situación.

Toma papel y lápiz y representa una bola de billar que inicialmente se encuentra en la posición (-40,-10), y tras un impulso choca contra otra bola en la posición (9,0). Dibuja: la trayectoria, la posición inicial y la final y el desplazamiento. Determina el módulo del desplazamiento. ¿Qué espacio ha recorrido? El resultado para una velocidad horizontal vx=10 m/s y una velocidad vertical vy=2 m/s es de 50 cm).

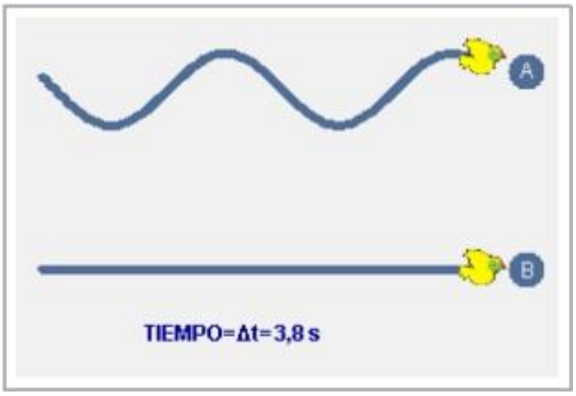


Si la trayectoria entre dos instantes es rectilínea, el desplazamiento (su módulo) equivale al espacio recorrido. Su unidad fundamental de medida en el SI es el metro (m).

Velocidad: La velocidad de un objeto a menudo se confunde con la rapidez. La velocidad físicamente es un vector y por tanto tiene un módulo (la rapidez), una dirección y un sentido.

Módulo: Es la rapidez aunque en la mayoría de contextos se identifica como la velocidad. La rapidez con que se desplaza un móvil es la relación (cociente) entre el espacio que se recorre y el tiempo que tarda en recorrerlo. Su unidad fundamental en el Sistema Internacional es el metro por segundo (m/s).

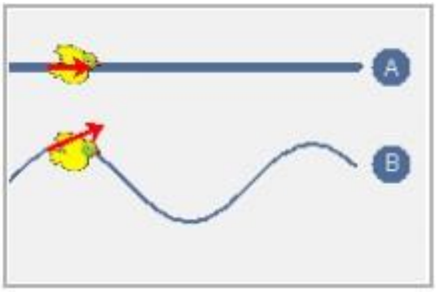
En esta imagen los dos pájaros recorren en $\Delta t=3{,}8$ s distinto espacio. En A se ha desplazado más deprisa que el B por que ha recorrido más espacio en el mismo tiempo.



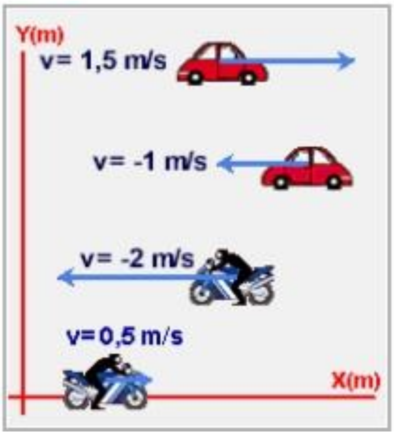
Durante un movimiento pueden producirse cambios en la rapidez, en estos casos el cálculo obtenido es una velocidad media de todo el recorrido.

La rapidez es un aspecto de la velocidad. Dos móviles pueden llevar la misma rapidez pero dirigirse a sitios diferentes. Nuevamente el carácter vectorial de esta magnitud permite reflejar estos aspectos. ¿Cómo se representan?

El vector velocidad se dibuja sobre el móvil con un tamaño proporcional a su módulo. La dirección es la de la recta tangente a la trayectoria y el sentido el del movimiento.



Para mostrar toda esta información se requiere de la notación vectorial. A pesar de que el módulo de un vector es una cantidad positiva, resulta útil para los cálculos en los movimientos rectilíneos usar un signo algebraico que indica el sentido del movimiento. Esta notación será utilizada frecuentemente en este curso y se resume en: v>0, El móvil se dirige hacia el sentido positivo del eje de coordenadas.

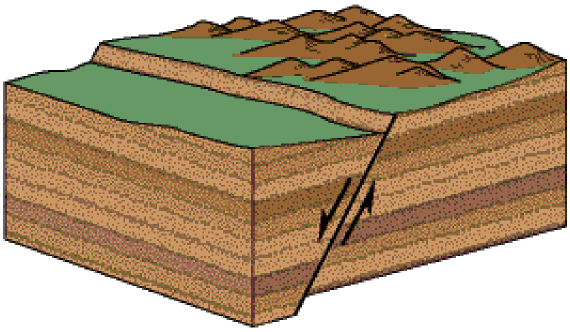


3.8 Análisis de las características de fallas geológicas

Una falla es una grieta en la corteza terrestre. Generalmente, las fallas están asociadas con, o forman, los límites entre las placas tectónicas de la Tierra. En una falla activa, las piezas de la corteza de la Tierra a lo largo de la falla, se mueven con el transcurrir del tiempo. El movimiento de estas rocas puede causar terremotos. Las fallas inactivas son aquellas que en algún momento tuvieron movimiento a lo largo de ellas pero que ya no se desplazan. El tipo de movimiento a lo largo de una falla depende del tipo de falla. A continuación describimos los principales tipos de fallas.

☐ Fallas normales o Las fallas normales se producen en áreas donde las rocas se están separando (fuerza tractiva), de manera que la corteza rocosa de un área específica es capaz de ocupar más espacio.

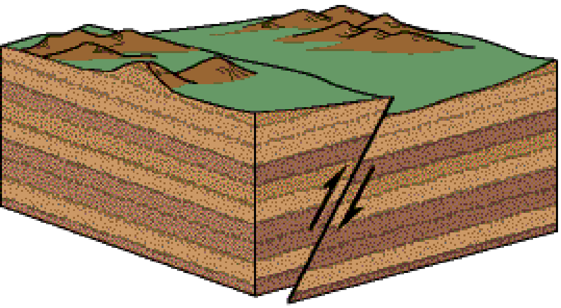
Las rocas de un lado de la falla normal se hunden con respecto a las rocas del otro lado de la falla.



Las fallas normales no crean salientes rocosos.

En una falla normal es posible que se pueda caminar sobre un área expuesta de la falla.

☐ Fallas inversas o Las fallas inversas ocurren en áreas donde las rocas se comprimen unas contra otras (fuerzas de compresión), de manera que la corteza rocosa de un área ocupe menos espacio.

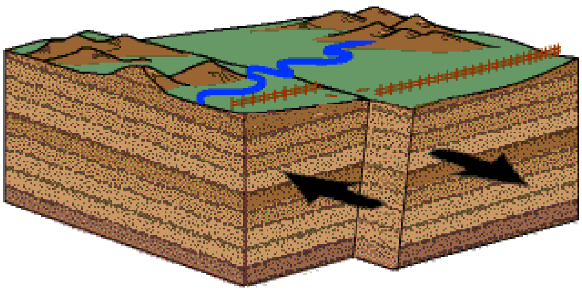


La roca de un lado de la falla asciende con respecto a la roca del otro lado.

En una falla inversa, el área expuesta de la falla es frecuentemente un saliente. De manera que no se puede caminar sobre ella.

Fallas de empuje son un tipo especial de falla inversa. Ocurren cuando el ángulo de la falla es muy pequeño.

☐ Falla de transformación (de desgarre)



El movimiento a lo largo de la grieta de la falla es horizontal, el bloque de roca a un lado de la falla se mueve en una dirección mientras que el bloque de roca del lado opuesto de la falla se mueve en dirección opuesta.

Las fallas de desgarre no dan

origen a precipicios o fallas escarpadas porque los bloques de roca no se mueven hacia arriba o abajo en relación al otro.

Sin embargo, las fallas son usualmente más complejas que lo que sugiere estos diagramas. Con frecuencia el movimiento a lo largo de una falla no ocurre de una sola manera. Una falla puede ser una combinación de una falla de transformación y una normal o inversa. Para complicar aún más estas condiciones, con frecuencia las fallas no son sólo una grieta en la roca, sino una variedad de fracturas originados por movimientos similares de la corteza terrestre. A estas agrupaciones de fallas se les conoce como zonas de fallas.

Su paralelismo y perpendicularidad.

Paralelismo: Dos rectas son paralelas si la distancia entre ellas es constante y por lo tanto, por mucho que se propaguen nunca se cruzan. En función de sus pendientes, dos rectas serán paralelas si sus pendientes son iguales.

$m1 = m2$

Donde:

$m1$ = pendiente de la primer recta. $m2$ = pendiente de la segunda recta.

Perpendicularidad: Dos rectas son perpendiculares si al cruzarse forman ángulos de 90º. En función de sus pendientes, dos rectas serán perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$m1*m2$ Donde:

$m1$ = pendiente de la primer recta. $m2$ = pendiente de la segunda recta.

Ecuaciones a analizar en la actividad de Fallas geológicas:

$y = 1.5x - 0.3$ $y = -3x + 2$

Obtener la ecuación de la familia de rectas perpendiculares a cada una de ellas.

Encuentra la ecuación que debería tener una falla para ser perpendicular a ella.

Expresa la ecuación de una familia de fallas perpendiculares a ésta.

Solución

En la primera ecuación $y = 1.5x-0.3$, la ecuación perpendicular a ésta es $y = -1/1.5x-0.3$, ya que $-1/1.5$ representa el recíproco de 1.5.

Familia de las Rectas.

Fórmula de la pendiente: $y=mx+b$ La pendiente tiene el valor de 1.5 $m=1.5$

La ordenada en el origen: -0.3.

El recíproco de $m=1.5$ es $m=-1/1.5$.

Se cumple la condición de perpendicularidad. Por lo que $1.5*-1/1.5=-1$, Por lo tanto, la ecuación de la familia de fallas perpendiculares es y=-1/1.5x-0.3.

En la segunda ecuación y = -3x+2

La ecuación perpendicular a ésta es y = 1/3x+2, ya que 1/3 representa el recíproco de -3.

Familia de las Rectas:

Fórmula y=mx+b

La pendiente tiene el valor de -3 m=-3

La ordenada en el origen es 2.

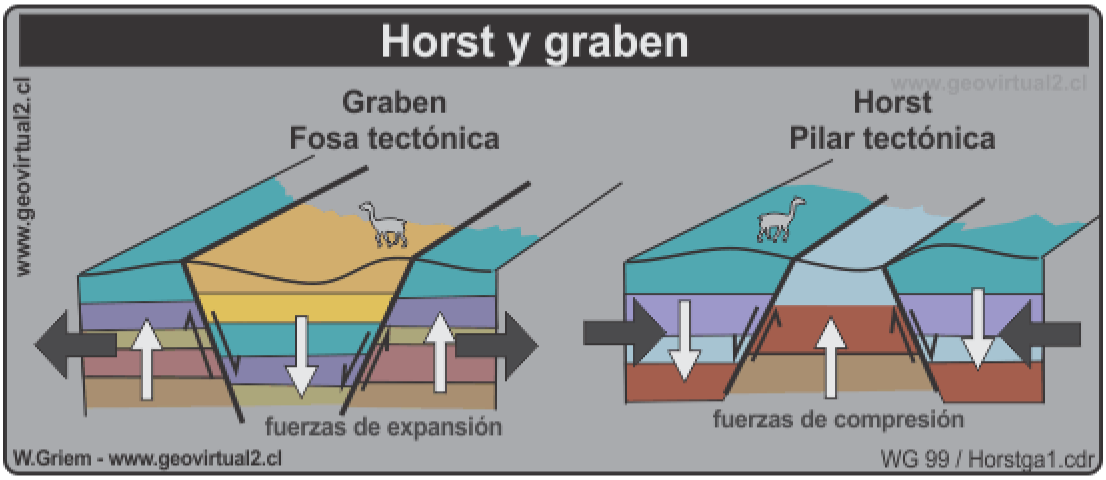
El recíproco de m=-3 es m=1/3.

Se cumple la condición de perpendicularidad. Por lo que -3*1/3=-1,

Por lo tanto, la ecuación de la familia de fallas perpendiculares es y=1/3x+2.

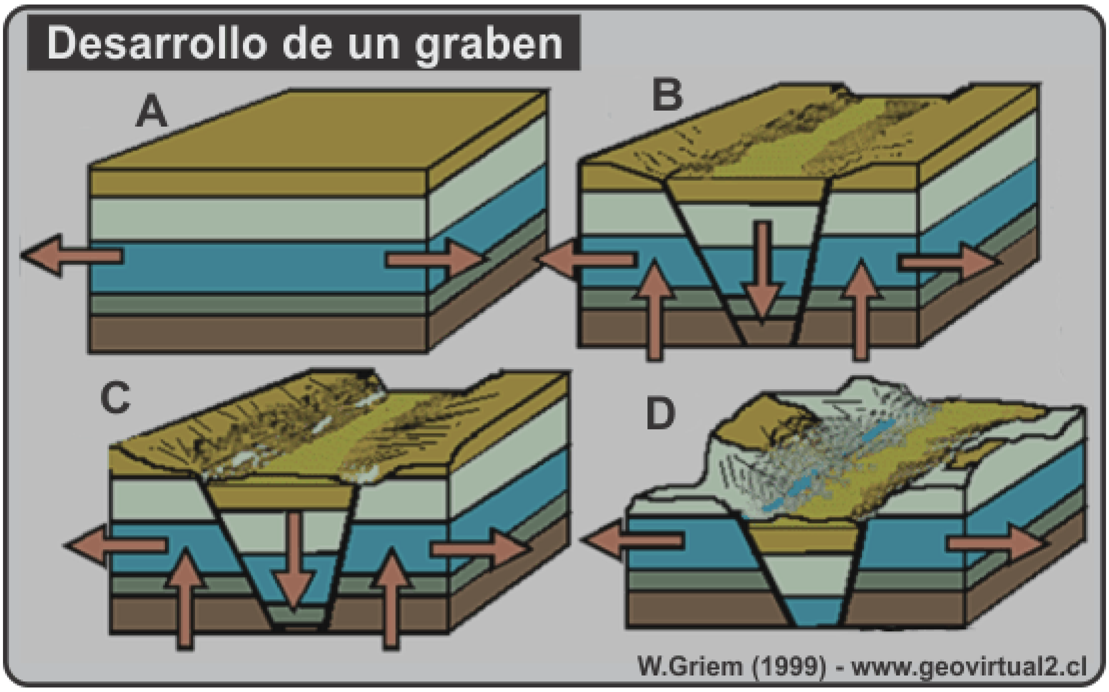
3.9.- La separación de fallas paralelas.

Graben: El conjunto de dos fallas normales paralelas con inclinación opuesta en un ambiente tectónico expansiva se llama graben o fosa tectónica. Es decir, el sector central se mueve relativamente abajo al respeto de los flancos. En el interior de una fosa tectónica afloran generalmente rocas más jóvenes como afuera del sistema. El tamaño de un graben puede ser centímetros hasta grabenes grandes alrededor de 300 km.



Un Horst o pilar tectónico muestra un movimiento hacia arriba en su interior, es decir el sector central está construida por rocas más antiguas como el sector lateral.

Morfológicamente un graben puede aparecer como valle o como cerro, un horst puede formar morfológicamente elevaciones o depresiones (valles quebradas).



El ejemplo del desarrollo de un graben tectónico muestra el conjunto a la formación de una quebrada. Pero también existen fosas tectónicas que forman finalmente un cerro.

Las palabras "horst" y "graben" provienen del alemán. Horst significa algo como "sector elevado", "Graben" como zanja, trinchera o fosa.

3.9 La familia de rectas que representan las fallas

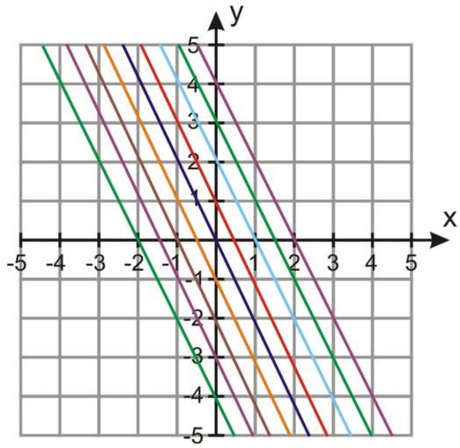
Orientación

Una línea recta tiene dos propiedades importantes, su pendiente y su y− intercepto. La pendiente nos dice qué tan abruptamente la recta crece o disminuye, y el intercepto y− nos dice dónde la recta intersecta el eje y− . En esta Sección veremos las dos familias de rectas.

Una familia de rectas es un conjunto de rectas que tienen algo en común entre sí. Las líneas rectas pueden pertenecer a dos tipos de familia: donde la pendiente es la misma y donde el intercepto y− es el mismo.

Familia 1: La pendiente es la misma

Recuerda que las rectas con la misma pendiente son paralelas. Cada recta en el plano cartesiano a continuación tiene una pendiente idéntica con diferentes interceptos y− . Todas las rectas se ven iguales pero están cambiadas arriba y abajo del eje y− . A medida que b crece la recta asciende en el eje y− y a medida que b disminuye la recta desciende en el eje y−. Este comportamiento es a menudo conocido como desplazamiento vertical.



Ejemplo A

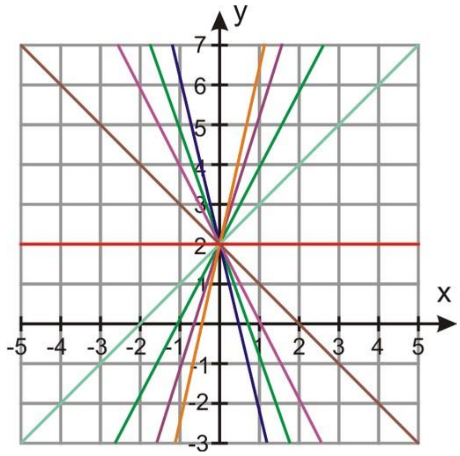
Escribe una ecuación para la recta roja en la imagen anterior.

Solución:

Podemos ver en el gráfico que la ecuación tiene un intercepto y -de 1. Ya que todas las rectas tienen la misma pendiente, podemos ver cualquier recta para determinar la pendiente, entonces la pendiente es −2 . Por lo tanto, la ecuación de la recta roja es: y=−2x+1.

Familia 2: El intercepto y− ies el mismo

El gráfico a continuación muestra varias rectas con el mismo intercepto y− pero con diferentes pendientes.



Ejemplo B

Escribe la ecuación para la recta marrón en la imagen anterior.

Solución:

Todas las rectas comparten el mismo intercepto y , que es 2. Si miramos el gráfico sabemos que la pendiente es -1. Entonces, la ecuación es: $y=-x+2$.

Ejemplo C

Escribe una ecuación general para cada familia de ecuaciones mostrada en las imágenes de esta Sección.

Soluciones:

Para la familia 1, la recta roja tiene la ecuación $y=-2x+1$. Ya que todas las rectas comparten la misma pendiente, mantenemos la pendiente de -2. Ya que todas las rectas comparten la misma pendiente, mantenemos la pendiente de y , entonces usaremos b : $y=-2x+b$.

Para la familia 2, la recta marrón tiene la ecuación $y=-x+2$. Ya que todas las rectas tienen el mismo intercepto y pero diferentes pendientes: $y=mx+2$.

3.10 Las reglas para conversión de temperaturas entre diferentes sistemas de unidades, sus gráficas y su interpretación

La temperatura es el nivel de calor en un gas, líquido, o sólido. Tres escalas sirven comúnmente para medir la temperatura. Las escalas de Celsius y de Fahrenheit son las más comunes. La escala de Kelvin es primordialmente usada en experimentos científicos.

Escala Celsius

La escala Celsius fue inventada en 1742 por el astrónomo sueco Andrés Celsius. Esta escala divide el rango entre las temperaturas de congelación y de ebullición del agua en 100 partes iguales. Usted encontrará a veces esta escala identificada como escala centígrada. Las temperaturas en la escala Celsius son conocidas como grados Celsius (°C). Escala Fahrenheit

La escala Fahrenheit fue establecida por el físico holandés-alemán Gabriel Daniel Fahrenheit, en 1724. Aun cuando muchos países están usando ya la escala Celsius, la escala Fahrenheit es ampliamente usada en los Estados Unidos. Esta escala divide la diferencia entre los puntos de fusión y de ebullición del agua en 180 intervalos iguales. Las temperaturas en la escala Fahrenheit son conocidas como grados Fahrenheit (°F).

Escala de Kelvin

La escala de Kelvin lleva el nombre de William Thompson Kelvin, un físico británico que la diseñó en 1848. Prolonga la escala Celsius hasta el cero absoluto, una temperatura hipotética caracterizada por una ausencia completa de energía calórica. Las temperaturas en esta escala son llamadas Kelvins (K).

Cómo Convertir Temperaturas

A veces hay que convertir la temperatura de una escala a otra. A continuación encontrará cómo hacer esto.

Para convertir de °C a °F use la fórmula: °F = °C x 1.8 + 32.

Para convertir de °F a °C use la fórmula: °C = (°F-32) ÷ 1.8.

Para convertir de K a °C use la fórmula: °C = K – 273.15

Para convertir de °C a K use la fórmula: K = °C + 273.15.

Para convertir de °F a K use la fórmula: K = 5/9 (°F – 32) + 273.15.

Para convertir de K a °F use la fórmula: °F = 1.8(K – 273.15) + 32.

Comparación entre Temperaturas

A continuación encontrará algunas comparaciones comunes entre temperaturas de las escalas Celsius y Fahrenheit.

TEMPERATURA	°C	°F
Punto Ebullición Agua	100	212
Punto Congelación Agua	0	32
Temperatura Corporal Promedio del Cuerpo Humano	37	98.6
Temperatura ambiente confortable	20 to 25	68 to 77

Definiciones, convenciones y reglas para construir gráficas:

Seleccionar el tipo de gráfica más apropiada para los datos (circular, barras, poligonal o lineal).

Toda gráfica debe tener título.

Cada eje debe tener el nombre de la variable representada y las unidades de medición utilizadas.

Generalmente, el eje horizontal (la abscisa) se utiliza para la variable independiente o manipulada. La variable dependiente (que responde) se grafica a lo largo del eje vertical (la ordenada).

Se escoge la escala de unidades de forma tal que la gráfica utilice la mayor parte del espacio que se le asigna en la hoja de papel. Para hacerlo, es necesario conocer los valores máximos y mínimos delas variables.

Hay gráficas que muestran una relación funcional entre dos o más variables. Mientras una variable aumenta a lo largo de un eje, la otra cambia de acuerdo a una relación bien definida entre las variables.

Se recomienda que dialogue con los otros maestros de matemáticas para establecer un lenguaje común y conocer las necesidades de cada disciplina de modo que puedan llegar a acuerdos que benefician al estudiante por su consistencia.

Gráficas sobre cómo cambia la temperatura con el paso del tiempo:

En ocasiones, la realidad del trabajo de una investigación lleva a presentar los hallazgos significativos en tablas de datos. Estas tablas permiten organizar la información para resumirla y poder preparar una gráfica. Cuando se presentan datos, las medidas de la variable manipulada se ordenan de menor a mayor, o viceversa y se colocan al lado izquierdo de la tabla según se muestra a continuación. La variable que responde o dependiente se coloca al lado derecho de la tabla.

Tiempo de calentamiento (1 minuto)	Temperatura del agua (°C)
1	45
2	50
3	60
4	80
5	95

Ejemplo – Tabla de datos

Otra destreza importante para la construcción de gráficas consiste en seleccionar una escala adecuada para los ejes. Debemos recordar que el eje horizontal de una gráfica se denomina abscisa y usualmente se representa como X y el eje vertical es la ordenada y se representa como Y. Al distribuir en ellos una escala, se pueden utilizar varios principios:

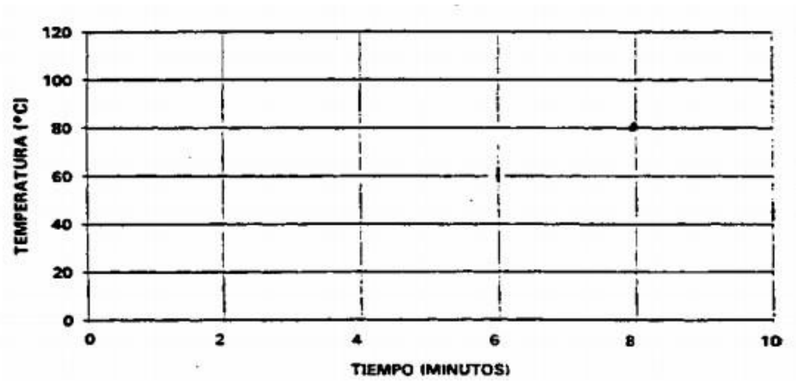
Seleccionar el número mayor y menor de la columna correspondiente en la tabla de datos. Buscar la diferencia entre ellos, y dividirlo por el número de medidas registradas. El valor obtenido se redondea a la unidad más cercana. Este representará la diferencia entre valores consecutivos que se colocan en la escala del eje.

Distribuir la escala utilizando en forma conveniente las divisiones del papel.

Para representar los valores observados de temperatura a medida que pasa el tiempo, se utiliza el eje horizontal para el tiempo –variable independiente- y el eje vertical para la temperatura –variable dependiente-. La escala del tiempo tiene como unidad un intervalo de tiempo definido (segundo, minutos, hora, años, etc.). La escala de temperatura puede estar calibrada en grados Celsius, Fahrenheit, Kelvin o en cualquier otra unidad pertinente.

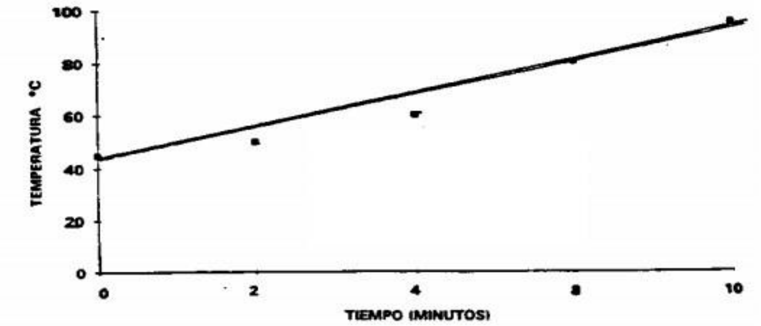
En este caso la gráfica apropiada, de temperatura versus tiempo, consiste de puntos que representan los datos observados. La localización de cada punto representa la temperatura en un tiempo particular.

En la gráfica 1 que aparece a continuación, el puno indica ocho (8) minutos después de comenzar a medir la temperatura del cuerpo, la misma fue de ochenta (80) grados Celsius.



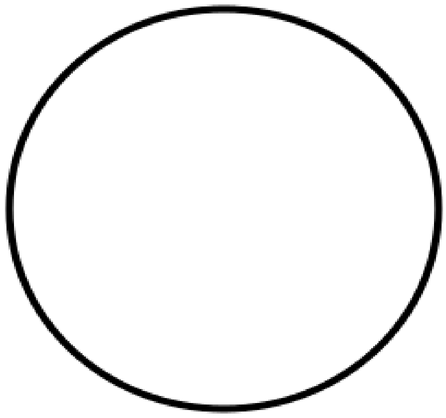
Gráfica 1
Cómo colocar un par ordenado

Cuando se hayan terminado de ubicar todos los datos (pares ordenados de tiempo y temperatura) se puede trazar una línea lo más cerca posible a todos los puntos y que siga la dirección general que apuntan los datos observados. A esta línea se le conoce como línea de mejor ajuste; "the best fit line". Véase Gráfica 2. Esta línea, que sigue una dirección recta, es la mejor que puede representar la relación entre las variables. La línea no tiene que, necesariamente, contener los puntos. Puede darse el caso en el que la línea no contenga ninguno de los puntos y que pueda deberse a posibles errores experimentales.



Gráfica 2
Línea de mejor ajuste

3.11 Elementos gráficos



La circunferencia es una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia del centro. La circunferencia solo posee longitud. Se distingue del círculo en que éste es el lugar geométrico de los puntos contenidos en una circunferencia determinada; es decir, la circunferencia es el perímetro del círculo cuya superficie contiene. Puede ser considerada como una elipse de excentricidad nula, o una elipse cuyos semiejes son iguales, o los focos coinciden. También se puede describir como la sección, perpendicular al eje, de una superficie cónica o cilíndrica, o como un polígono regular de infinitos lados, cuya apotema coincide con su radio .La intersección de un plano con una superficie esférica puede ser: o bien el conjunto vacío (plano exterior); o bien un solo punto (plano tangente); o bien una circunferencia, si el plano secante pasa por el centro , se llama ecuador. La circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio 1 se denomina circunferencia unidad o circunferencia goniométrica .

Elementos de la circunferencia: Existen varios puntos, rectas y segmentos, singulares en la circunferencia:

Centro, el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia;

Radio, El radio de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. El radio mide la mitad del diámetro. El radio es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre 2π.

Diámetro, El diámetro de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio. El diámetro es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre π;

Cuerda, La cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

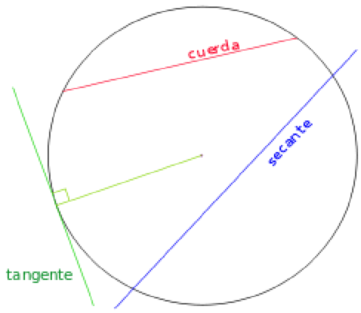
Recta secante, Es la línea que corta a la circunferencia en dos puntos;

Recta tangente, Es la línea que toca a la circunferencia en un sólo punto;

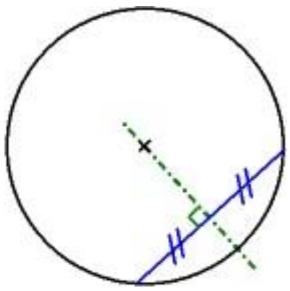
Punto de Tangencia, el de contacto de la recta tangente con la circunferencia;

Arco, El arco de la circunferencia es cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia. Un arco de circunferencia se denota con el símbolo sobre las letras de los puntos extremos del arco.

Semicircunferencia, cada uno de los dos arcos delimitados por los extremos de un diámetro.



Diámetros: Dos diámetros de una sección cónica se denominan conjugados cuando toda cuerda paralela a uno de ellos es bisecada por el otro. Por ejemplo, dos diámetros de la circunferencia perpendiculares entre sí son mutuamente conjugados. En una elipse dos diámetros son conjugados si y sólo si la tangente a la elipse en el extremo de un diámetro es paralela a la tangente al segundo extremo.

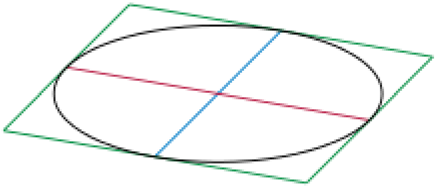


Punto interior. Es un punto en el plano de la circunferencia, cuya distancia al centro de la circunferencia es menor que el radio. El conjunto de todos los puntos interiores se llama interior de la circunferencia. Respecto al círculo, nítidamente, se distinguen el interior, el exterior y la frontera, que es precisamente la respectiva circunferencia. La circunferencia y un punto.

Exterior a la circunferencia, si la distancia del centro al punto es mayor que la longitud del radio.

Perteneciente a la circunferencia, si la distancia del centro al punto es igual a la longitud del radio.

Interior a la circunferencia, si la distancia del centro al punto es menor a la longitud del radio.



La circunferencia y la recta.

Exterior, si no tienen ningún punto en común con ella y la distancia del centro a la recta es mayor que la longitud del radio.

Tangente, si la toca en un punto (el punto de tangencia o tangente) y la distancia del centro a la recta es igual a la longitud del radio. Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro.

Secante, si tiene dos puntos comunes, es decir, si la corta en dos puntos distintos y la distancia del centro a la recta es menor a la longitud del radio.

Segmento circular, es el conjunto de puntos de la región circular comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente.

Dos circunferencias.

Exteriores, si no tienen puntos comunes y la distancia que hay entre sus centros es mayor que la suma de sus radios. No importa que tengan igual o distinto radio. (Figura 1)

Tangentes exteriormente, si tienen un punto común y todos los demás puntos de una son exteriores a la otra. La distancia que hay entre sus centros es igual a la suma de sus radios. No importa que tengan igual o distinto radio. (Figura 2)

Secantes, si se cortan en dos puntos distintos y la distancia entre sus centros es menor a la suma de sus radios. No importa que tengan igual o distinto radio. Dos circunferencias distintas no pueden cortarse en más de dos puntos. Dos circunferencias son secantes ortogonalmente si el ángulo entre sus tangentes en los dos puntos de contacto es recto. (Figura 3)

Tangentes interiormente, si tienen un punto común y todos los demás puntos de una de ellas son interiores a la otra exclusivamente. La distancia que hay entre sus centros es igual al valor absoluto de la diferencia de sus radios. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra. (Figura 4)

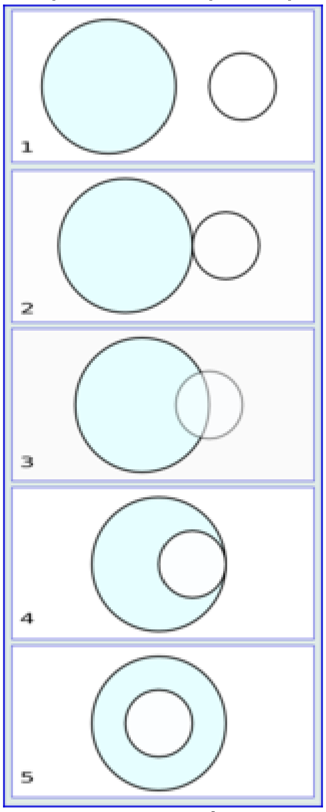
Interiores excéntricas, si no tienen ningún punto común y la distancia entre sus centros es mayor que 0 y menor que el valor absoluto de la diferencia de sus radios. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra.

Interiores concéntricas, si tienen el mismo centro (la distancia entre sus centros es 0) y distinto radio. Forman una figura conocida como corona circular o anillo.

Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra. (Figura 5)

Coincidentes, si tienen el mismo centro y el mismo radio. Si dos circunferencias tienen más de dos puntos comunes, necesariamente son circunferencias coincidentes.

Un punto en el plano puede ser: Una recta, respecto de una circunferencia, puede ser:

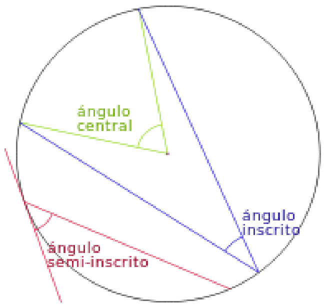


Dos circunferencias, en función de sus posiciones relativas, se denominan:

Ángulos en una circunferencia. La amplitud de un ángulo central es igual a la del arco que abarca. La amplitud de un ángulo inscrito en una semicircunferencia equivale a la mayor parte del ángulo exterior que limita dicha base. (Véase: arco capaz.)La amplitud de un ángulo semi-inscrito es la mitad de la del arco que abarca. La amplitud de un ángulo interior es la mitad de la suma de dos medidas: la del arco que abarcan sus lados más la del arco que abarcan sus prolongaciones. Un ángulo, respecto de una circunferencia, pueden ser: Ángulo central, si tiene su vértice en el centro de esta. Sus lados contienen a dos radios.

Ángulo inscrito, si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados contienen dos cuerdas.

Ángulo semi-inscrito, si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados contienen una cuerda y una recta tangente a la circunferencia. El vértice es el punto de tangencia. Ángulo interior, si su vértice está en el interior de la circunferencia. Ángulo exterior, si tiene su vértice en el exterior de la circunferencia.



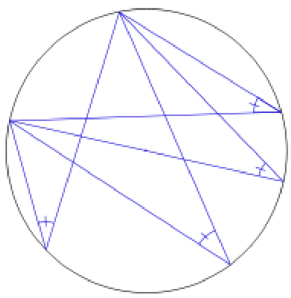
$$\ell = \pi \cdot 2r$$

Longitud de la circunferencia. La longitud ℓ de una circunferencia es: donde r es la longitud del radio.

Pues π (número pi), por definición, es el cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro:

$$\pi = \frac{\ell}{2r}$$

Área del círculo delimitado por una circunferencia. El área del círculo delimitado por la circunferencia es: $A = \pi \cdot r^2$



Ecuaciones de la circunferencia. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

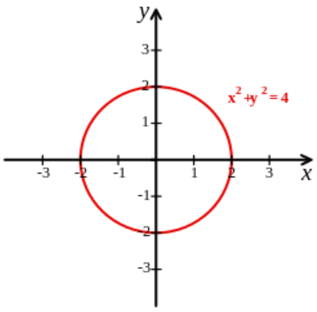
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$a = -\frac{D}{2}$$
$$b = -\frac{E}{2}$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - F}$$

En un sistema de coordenadas cartesianas x-y, la circunferencia con centro en el punto (a, b) y radio r consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación cuando el centro está en el origen (0, 0), la ecuación anterior se simplifica.

La circunferencia con centro en el origen y de radio la unidad, es llamada circunferencia goniométrica, circunferencia unidad o circunferencia unitaria.

De la ecuación general de una circunferencia, Si conocemos los puntos extremos de un diámetro: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$



3.12 Obtención de la ecuación a partir de la gráfica

Si graficamos una elipse horizontal en un plano cartesiano, ubicando su centro en el origen, y calculamos las distancias $\overline{PF}_1$ $\overline{PF}_2$ y para luego sustituirlas en la definición geométrica $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, obtendremos la siguiente ecuación, en su forma ordinaria:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dónde:

a= longitud del semieje mayor b= longitud del semieje menor

Ahora bien, cuando el centro C (h, k) no se encuentra en el origen sino en cualquier otro punto del plano cartesiano, la forma ordinaria de la ecuación se generaliza así:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Dónde: (h, k) son las coordenadas del centro.

Por otra parte, para una elipse vertical con centro en el origen, la ecuación en forma ordinaria que debemos usar es:

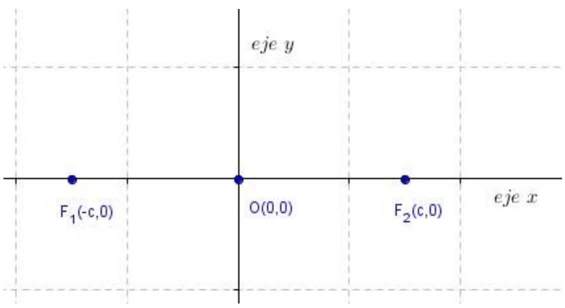
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Y por tanto, la ecuación en forma ordinaria para cualquier elipse vertical con centro en cualquier punto C (h, k) es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

3.13 Obtención de la gráfica a partir de la ecuación

Consideremos que los focos son los puntos de coordenadas F1 (–c, 0) y F2(c, 0) con c>0, y el punto medio entre los focos, se denomina centro C (0,0). En el siguiente esquema se pueden visualizar estos elementos:



Si la distancia entre los focos es d (F1, F2)=2c, la condición para que sea una elipse es: a>c>0

Si elevamos al cuadrado:

a2>c2

A la diferencia se la llama b2:

a2–c2=b2 ⇒a2=b2+c2 Haciendo una deducción se llega a:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ , \quad a>b>0$$

Es la ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal y=0(eje x).

Busquemos las intersecciones con los ejes:

Si y=0: x2=a2⇒x=±a⇒V1,2=(±a,0)

Si x=0: y2=b2⇒y=±b⇒V3,4=(0,±b)

Estos cuatro puntos se denominan vértices de la elipse.

a se denomina semieje mayor

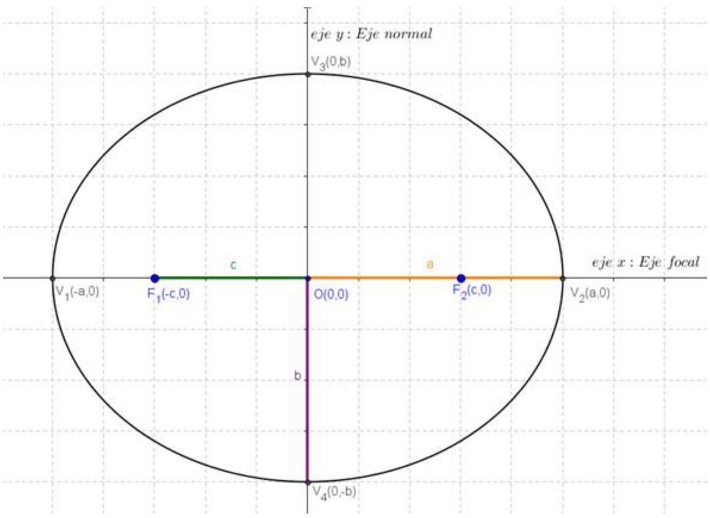
b es el semieje menor

c es la semidistancia focal: (distancia del centro a un foco)

2c es la distancia entre los focos

Eje focal: es la recta que pasa por los focos, en este caso el eje x

La gráfica representando todos estos elementos es la siguiente:



Observen que el centro es centro de simetría de la elipse.

Si en la ecuación canónica anterior permutamos x por y (x↔y) queda:

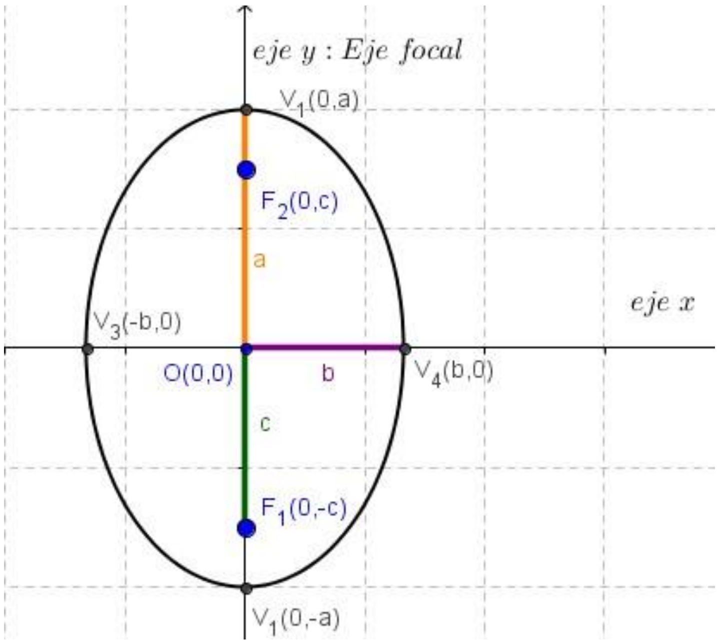
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad , \quad a>b$$

Es la ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal x=0 (eje y).

En este caso las coordenadas de los vértices y focos son:

Vértices: V1(0,a) V2(0,–a), V3(–b,0) V4(b,0)

Focos: F1(0,–c) F2(0,c) Su gráfica es:



3.14 Visualización mental y descripción de una gráfica a partir de su ecuación

La gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una recta (es por eso que se le llama lineal).

Si Usted sabe que una ecuación es lineal, puede graficarla al encontrar cualquiera de las dos soluciones

(x 1 , y 1) y (x 2 , y 2),

graficando esos dos puntos, y dibujando la recta que los une.

Ejemplo :

Grafique la ecuación x + 2 y = 7.

Puede encontrar dos soluciones, correspondientes a la intercepción en x y la intercepción en y de la gráfica, al establecer primero x = 0 y luego y = 0.

Cuando x = 0, obtenemos:

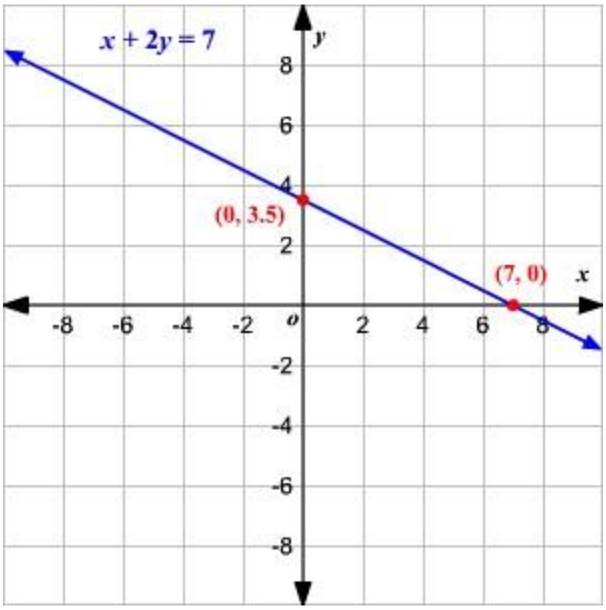
0 + 2 y = 7 y = 3.5

Cuando y = 0, obtenemos:

x + 2(0) = 7 x = 7

Así los dos puntos son (0, 3.5) y (7, 0).

Grafique estos dos puntos y dibuje la recta que los une.

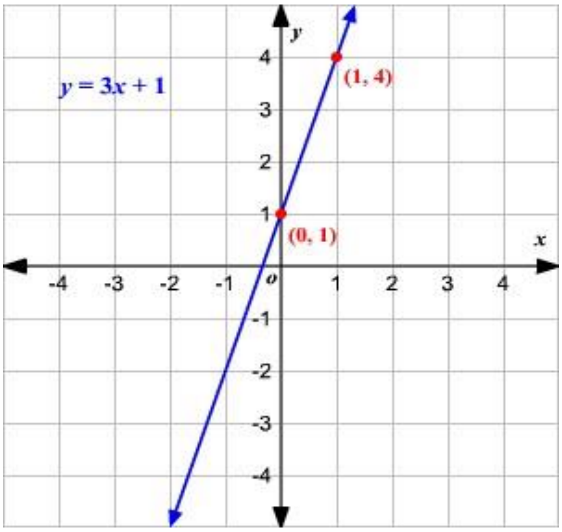


Si la ecuación está en la forma intercepción-pendiente o de la forma punto-pendiente , puede también utilizar la pendiente para ayudarlo a graficar.

Ejemplo :

Grafique la recta y = 3 x + 1.

De la ecuación, sabemos que la intercepción en y es 1, el punto (0, 1) y la pendiente es 3. Grafique el punto (0, 1) y de ahi vaya hacia arriba 3 unidades y a la derecha 1 unidad y grafique un segundo punto. Dibuje la recta que contiene ambos puntos.

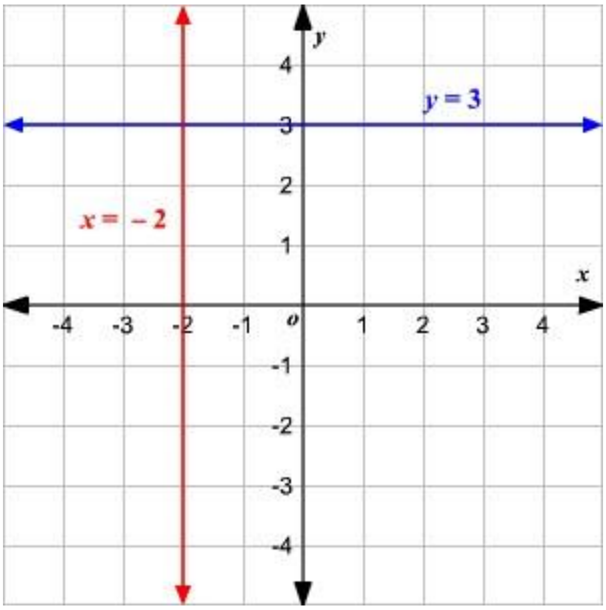


Las rectas horizontales y verticales tienen ecuaciones sencillas extra.

Ejemplo :

Recta Horizontal: y = 3

Recta Vertical: x = –2



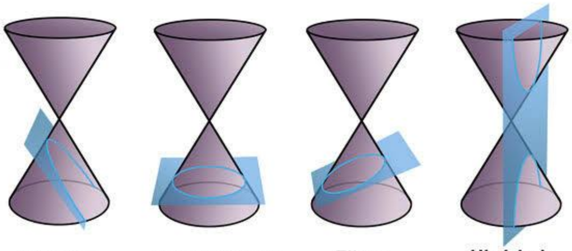
UNIDAD IV

CÓNICAS

4.1 Definición básica de las cónicas

Las cónicas son curvas planas obtenidas mediante la intersección de un cono con un plano. El ángulo que forman el plano y el eje del cono, comparado con el ángulo que forman el eje y la generatriz del cono determina las distintas clases de cónicas.

Se conocen como secciones cónicas las curvas que se obtienen al cortar un cono de doble rama como un plano. Al variar la inclinación del plano se puede obtener una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola, como se muestra en la siguiente figura.



Cada una de las cónicas se puede representar por medio de una expresión algebraica, pero existe una ecuación que aplica para todas. La ecuación de segundo grado que describe a las cónicas recibe el nombre de ecuación general de una sección cónica, y su expresión es:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

El coeficiente B indica si la cónica tiene rotación o no, si B = 0 la cónica no está rotada.

Los coeficientes D y E indican si la cónica está trasladada o no, si D = E = 0 la cónica está centrada en el origen.

El término independiente F indica si la cónica pasa o no por el origen, si F = 0, entonces la cónica si pasa por el origen.

Ejemplo 01

Determinar el tipo de cónica representa la ecuación $\boldsymbol{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$

Observa que $A \neq C$ y son del mismo signo, por lo que la cónica es una elipse.

Los coeficientes D = E = 0 indican que el centro de la elipse está en el origen.

El término independiente F = -36 indica que la elipse no pasa por el origen.

Ejemplo 02

Determinar y graficar en GeoGebra el tipo de cónica que representa la ecuación

$\boldsymbol{16x^2 - 9y^2 - 32x - 9y + 100 = 0}$.

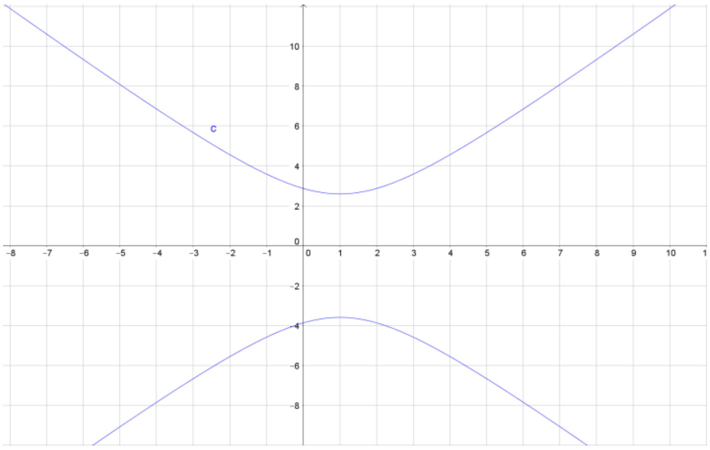
Se observa que $A \neq C$ y son de signo contrario, por lo que se trata de una hipérbola.

Los coeficientes D = -32 y E = -9 indican que el centro de la hipérbola está fuera del origen.

El término independiente F = 100 indica que la hipérbola no pasa por el origen.

Para graficarlo en GeoGebra se escribe en el cuadro de entrada:

16x^2 – 9y^2 – 32x -9y + 100 = 0.



Ejemplo 03

Determinar el tipo de cónica que representa la ecuación $\mathbf{2x^2 - 8x - 2y = 0}$

Se observa que A = 2 y C = 0, por lo que se trata de una parábola vertical.

Los coeficientes D = -8 y E = -2 indican que el centro de la parábola está fuera del origen.

El término independiente F = 0 indica que la parábola si pasa por el origen.

Ejemplo 04

Determinar y graficar el tipo de cónica que representa la ecuación

$$\mathbf{3x^2 + 3y^2 - 24y + 12 = 0}$$

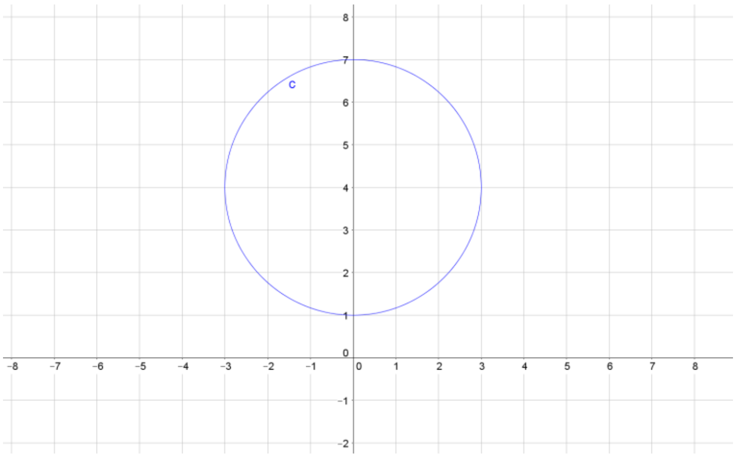
Se observa que A = C, por lo tanto, que se trata de una circunferencia.

Los coeficientes D = 0 y E = -24 indican que el centro de la circunferencia está sobre el eje Y.

El término independiente F = 21 indican que la circunferencia no pasa por el origen.

En GeoGebra se puede graficar escribiendo en el cuadro de entrada

3x^2 + 3y^2 -24y + 21 = 0.



4.2 Circunferencia: definición, elementos y ecuación canónica

La circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos en el plano P(x,y) equidistantes de un punto fijo llamado centro. Todos los puntos que pertenezcan una circunferencia tienen la misma distancia entre el lugar geométrico y el punto fijo.

Los elementos de la circunferencia son:

Centro. Es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

Radio. Es el segmento comprendido entre el punto fijo llamado centro y cualquier punto de su circunferencia.

Diámetro. Es un segmento comprendido entre dos puntos de la circunferencia que pasa por el centro de ella (equivale a dos radios).

Cuerda. Es el segmento comprendido entre dos puntos de la circunferencia.

Tangente. Es la línea recta que toca a la circunferencia en un solo punto.

Para obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen se toma una circunferencia donde el radio es igual a ® y donde este se forma por un punto O(0,0) y un punto P(x,y). Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene:

$$d(O,P) = r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

La expresión resultante también se puede representar como:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta expresión se conoce como ecuación canónica de la circunferencia.

Ejemplo 01

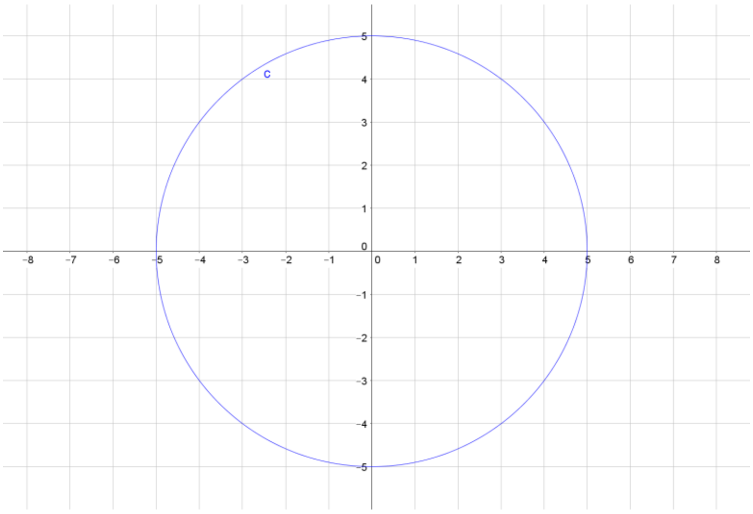
Determinar el radio de la circunferencia a partir de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y trazar su grafica.

Se sustituye $r^2 = 25$ en la ecuación y queda:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{25}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

El radio es 5 y la gráfica correspondiente es:



Ejemplo 02

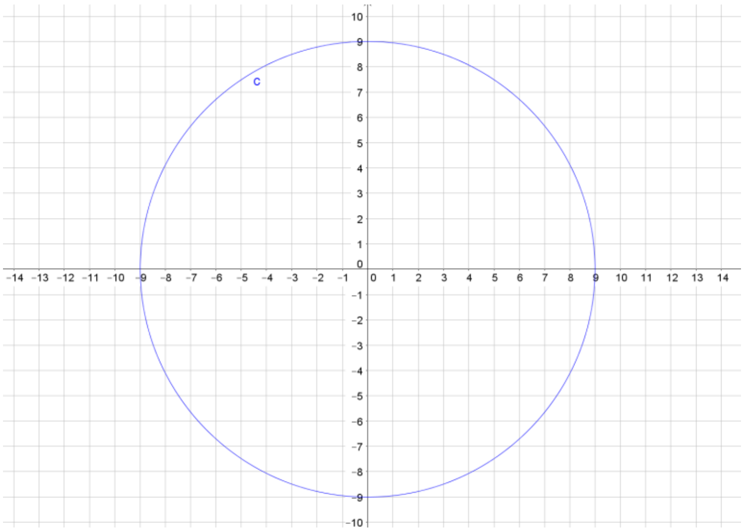
Encontrarla ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es de 18 cm.

El diámetro es igual a dos radios; por lo tanto, si D = 18, entonces 2r = 18; despejando, r = 9.

Se sustituye r en la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y queda:

$$x^2 + y^2 = 9^2$$

$$x^2 + y^2 = 81$$



Ejemplo 03

Graficar y encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen. Su radio para por el punto P(6,4).

Si P(x,y), se sabe que x = 6, y = 4.

Se sustituye en la fórmula $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$ y queda:

$$6^2 + 4^2 = r^2$$

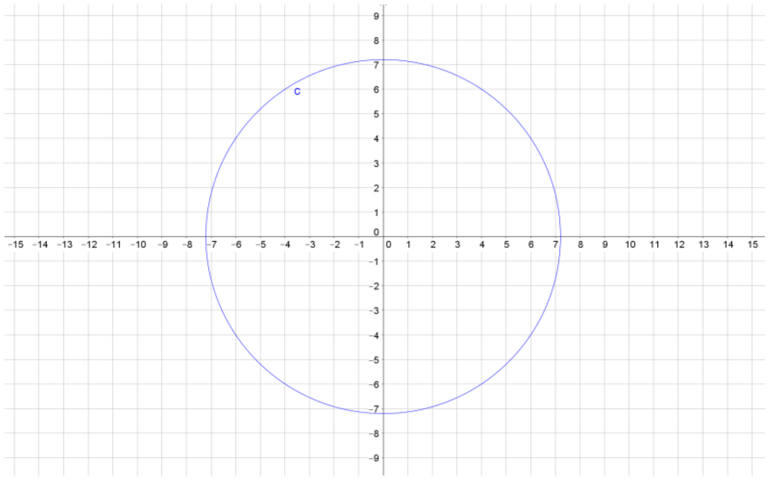
$$36 + 16 = r^2$$

$$52 = r^2$$

$$\sqrt{52} = r$$

La ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P(6,4) es:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 52}$$



4.3 Ecuación ordinaria y general de la circunferencia

En la figura se observa que P(x,y) es un punto cualquiera de la circunferencia y C(h,k) es el centro de ella. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, los catetos están formados por los lados (x – h) y (y – k) y la hipotenusa es el radio ®, por lo tanto:

$$\boldsymbol{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

La anterior se conoce como ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro (h,k) y radio (r).

Al desarrollar los productos notables del binomio al cuadrado en el primer miembro de la ecuación se obtiene:

$$\boldsymbol{x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2}$$

Se iguala a 0 y se reordenan los términos:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=-0$$

Después, para agrupar términos, se establecen las siguientes equivalencias:

$$D=-2h$$

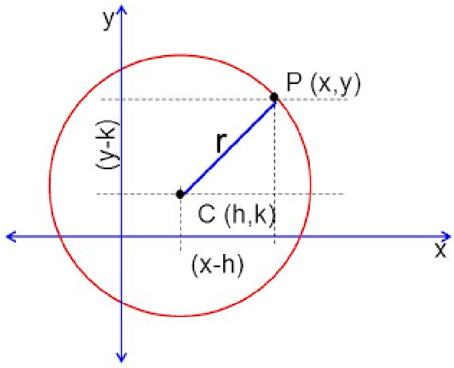
$$E=-2k$$

$$F=h^2+k^2-r^2$$

Se sustituyen las equivalencias en la ecuación y queda:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

A esta ecuación se le llama forma general o ecuación general de la circunferencia.



Ejemplo 01

Encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en C(-4,3) y radio r = 4 y trazar la gráfica.

Puesto que C(-4,3), h = -4 y k = 3, r = 4.

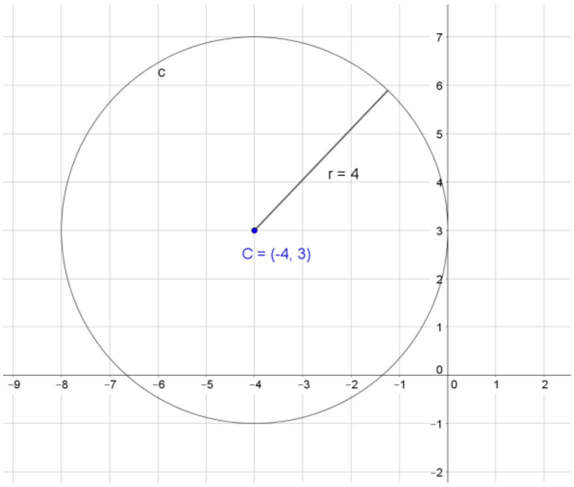
Se sustituye con los valores anteriores en la ecuación ordinaria y queda:

$$\left(x-(-4)\right)^2+(y-3)^2=4^2$$

Se multiplican los signos para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=16$$

La grafica se muestra a continuación.



Ejemplo 02

Dada la ecuación ordinaria $(x+5)^2+(y+2)^2=25$, determinar el centro y el radio de la circunferencia y trazar su gráfica.

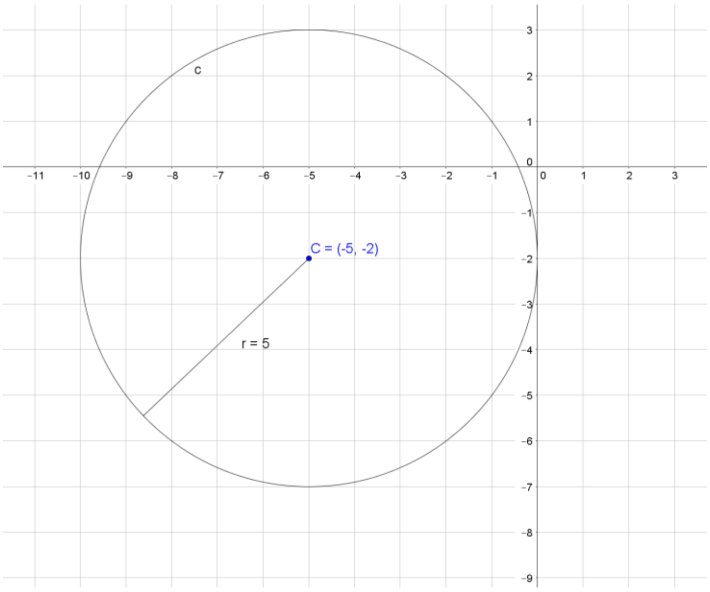
La ecuación ordinaria es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

De la ecuación se deduce que las coordenadas del centro son:

$h=-5,\ k=-2\ y\ r^2=25$.

El centro es C(-5,-2) y el radio r = 5.

Su gráfica se muestra de la siguiente manera:



Resuelve

Encontrar la ecuación general de la circunferencia si los extremos de uno de sus diámetro son los puntos A(-5,-3) y B(1,5).

Primero es necesario encontrar el centro y el radio de la circunferencia. Si conocemos los puntos extremos de uno de los diámetros, es posible utilizar la fórmula para calcular el punto medio de un segmento y obtener lss coordenadas del centro C(h,k).

4.4 Parábola: definición, elementos y ecuación canónica

Dados un punto FF (foco) y una recta rr (directriz), se denomina parábola al conjunto de puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz.

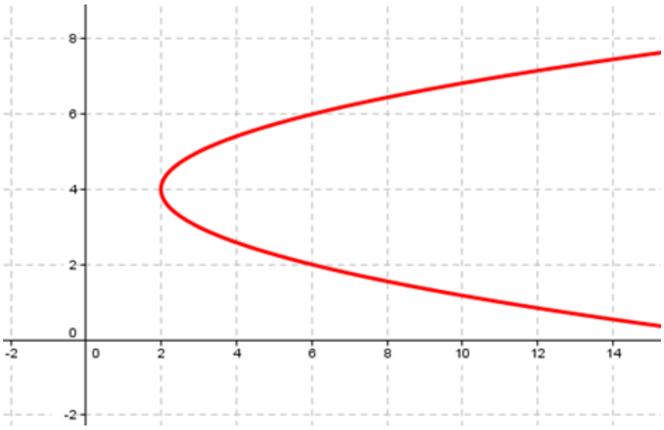
Simbólicamente:

$$P = \{P(x,y) | d(P,r) = d(P,F)\} P = \{P(x,y) | d(P,r) = d(P,F)\}$$

Observen que estamos definiendo la parábola como un conjunto de puntos que verifican cierta propiedad geométrica, no como la gráfica de una función cuadrática (que es como ustedes la conocían hasta ahora).

La gráfica de una función cuadrática es una parábola. Pero el concepto geométrico de parábola es más amplio, como veremos a continuación.

El siguiente gráfico muestra una parábola acostada:

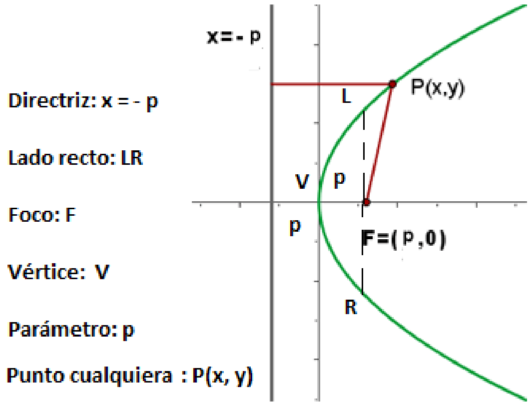


Existen también las parábolas rotadas. Por ejemplo, si nosotros graficáramos en algún programa de computadora el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y = 0$, obtendríamos la siguiente gráfica:

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta llamada directriz y un punto fijo F llamado foco.

Los elementos y propiedades de la parábola son:



Vértice. Punto donde se cortan la parábola y su eje.

Foco. Punto fijo ubicado en el eje oficial.

Directriz. Recta fija que define la parábola.

Lado recto. Segmento que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.

Parámetro. Es la distancia del vértice al foco, se le llama p.

Eje focal. Recta que pasa por el foco y el vértice.

La longitud del lado recto corresponde al valor absoluto de 4p, es decir, |4P|.

P(x,y) es cualquier punto sobre la parábola.

La distancia del vértice a la directriz es igual a la distancia del vértice al foco p.

Para encontrar la ecuación de una parábola se toman en cuenta las siguientes propiedades:

Vértice En el origen V(0,0) y eje focal en x.

Foco con coordenada F(p,0).

Punto sobre la parábola con coordenadas P(x,y).

Directriz con coordenadas D(-p,0).

De acuerdo con la definición, la distancia de un punto de la parábola a la directriz (PD) es igual a la distancia del punto de la parábola al foco (PF):

Se sustituye con los valores de P, D y F en la fórmula de distancia entre dos puntos y se tiene:

$$\boldsymbol{d(PD) = d(PF)}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{\left(x-(-p)\right)^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros y se desarrollan los productos notables:

$$(x+p)^2 = (x-p)^2 + (y-0)^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - xp + p^2 + y^2$$

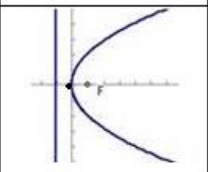
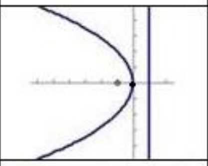
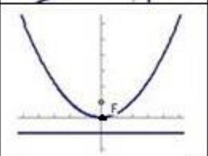
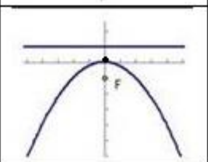
Se agrupan y simplifica para obtener:

$$y^2 = 4px$$

Esta expresión representa la ecuación canónica de la parábola. En ella el eje de simetría coincide con el eje x y abre hacia la derecha (concavidad). Esto quiere decir que p > 0, y si abre hacia la izquierda p > 0.

4.5 Ecuación ordinaria y general de la parábola

La parábola también puede presentarse con el vértice fuera del origen V(h,k) y su eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados. Para encontrar la ecuación respectiva se cambia la x por (x – h) y la y por (y – k). De este modo las ecuaciones y los elementos de la parábola quedarían de la siguiente manera:

Orientación	Sentido	Grafica	Ecuación Ordinaria	Foco	Vértice	Ecuación de la Directriz	Eje focal	LR
Horizontal	Derecha		$y^2 = 4\,px$	F = (p, 0)	V = (0,0)	x + p = 0	y = 0	$LR = \lvert 4P \rvert$
	Izquierda		$y^2 = -4\,px$	F= (- p, 0)				
Vertical	Arriba		$x^2 = 4\,py$	F= (0, p)	V = (0,0)	y + p = 0	x = 0	$LR = \lvert 4P \rvert$
	Abajo		$x^2 = -4\,py$	F= (0, - p)				

A las ecuaciones anteriores se les conoce como ecuaciones ordinarias de la parábola.

Si se desarrolla la ecuación $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2 = \boldsymbol{4p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$, cuyo eje focal es paralelo al eje x'x con la concavidad de su parábola hacia la derecha, y considerando que p > 0, se obtiene:

$$\boldsymbol{y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph}$$

Se iguala a 0 y se reordenan los términos:

$$y^2 - 2yk + k^2 - 4px + 4ph = 0$$

$$y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4ph = 0$$

Se obtiene la ecuación conocida como ecuación general, que se puede expresar de las siguientes formas:

Si la parábola es vertical y abre hacía arriba o hacia abajo:

$$x^2 + Dx + Ey + F$$

Donde: D = -2h, E = -4p y F = h2 + 4pk.

Si la parábola es horizontal y abre hacia la derecha o hacia la izquierda.

$$y^2 + Dx + Ey + F$$

Donde: D = -4p, E = -2k y F = k2 + 4ph.

Ejemplo 01

Encontrar la ecuación general de la parábola cuyo vértice está en el punto V(3,5) y su foco en el punto F(3,4) y trazar su gráfica.

Se localiza en el plano vértice, que está en V(3,5), y el foco, localizado en F(3,4) de la gráfica.

Se observa que la parábola es paralela al eje Y'Y y abre hacia abajo.

La distancia del vértice al foco es VF = p y equivale a p = 1.

Se sustituye con los daros de V(h,k), h = 3, k = 5, en la ecuación ordinaria, se desarrolla y queda:

$$(x-3)^2 = 4(y-5)^2$$

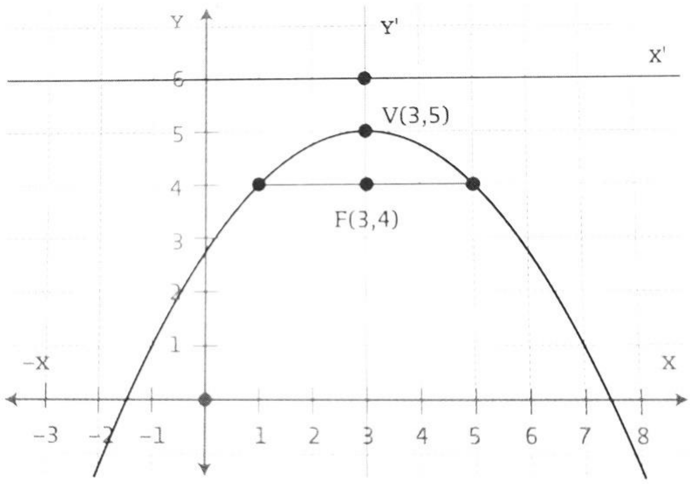
$$x^2 - 6x + 9 = -4y + 20$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4y - 20 = 0$$

$$x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$$

La ecuación general de la parábola es:

$$\boldsymbol{x^2 - 6x + 4y - 11 = 0}$$



Ejemplo 02

Determina el vértice, foco, directriz, lado recto y la gráfica de la parábola cuya ecuación es .

Al analizar la ecuación se observa que se trata de una parábola vertical que abre hacia abajo y es de tipo $(x-6)^2 = -5(y+3)^2$.

Los valores de h y k son: h = **6**, k = **-3**.

El parámetro (p) equivale a:

$$4p = 5 \rightarrow p = \frac{4}{5} \rightarrow \boldsymbol{p = 1.25}$$

El vértice se ubica en la coordenada V(**6**,**-3**).

Se calcula la ubicación del foco:

$$F(h, k-p) \rightarrow F(6, -3-1.25) \rightarrow \boldsymbol{F(6, -4.25)}$$

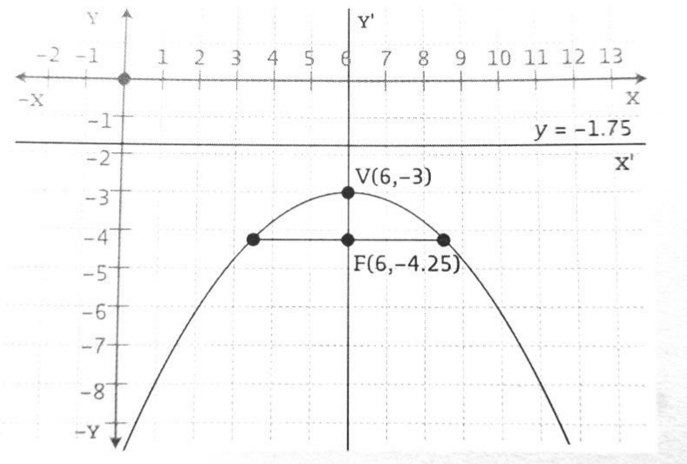
La ecuación de la directriz es:

$$y = k + p \rightarrow y = -3 + 1.25 \rightarrow \boldsymbol{y = -1.75}$$

La longitud del lado recto es:

$$LR = 4p \rightarrow LR = |(4)(1.25)| \rightarrow \boldsymbol{LR = 5}$$

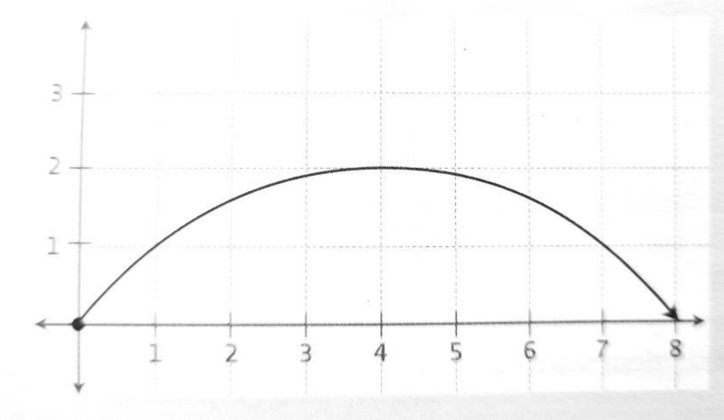
Su representación gráfica es:



La gráfica muestra la trayectoria que siguió un proyectil. El eje x coincide con el lado recto de la trayectoria parabólica del proyectil y el diagrama está dado en metros.

¿Cuál fue la altura máxima alcanzada por el proyectil?

¿Cuál fue la distancia total recorrida?



Al analizar la gráfica se observa lo siguiente:

Se trata de una parábola que abre hacia abajo y es del tipo $(x-h)^2 = -4p(y-k)$.

El vértice se ubica en la coordenada V(4,2).

La longitud del lado recto es de 8 cm y corresponde al valor absoluto de 4p.

El parámetro se puede calcular a partir del valor del lado recto:

$$4p = 8$$

$$p = \frac{8}{4}$$

$$\boldsymbol{p = 2}$$

La coordenada del foco de la parábola es F(4,0).

La fórmula de la ecuación de la directriz es y = k + p. Al sustituir valores queda:

$$y = 2 + 2$$

$$\boldsymbol{y = 4}$$

La ecuación de la parábola se obtiene al sustituir con los daos encontrados anteriormente en la ecuación ordinaria:

$$(x-4)^2 = -8(y-2)$$

Una vez analizada la información y obtenidos todos los datos, se puede dar respuesta a las preguntas:

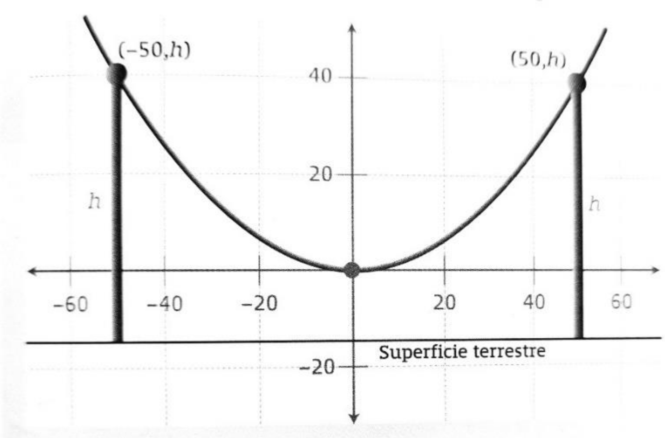
La altura máxima alcanzada por el proyectil fue de 2 cm.

La distancia alcanzada fue de 8 cm.

Ejemplo 02

Las torres de un puente colgante, que toma la forma de una parábola, tienen una separación de 100 m. Si la superficie terrestre es la directriz de la parábola y el punto más bajo del puente está a 15 m del suelo, ¿cuál es la altura de las torres?

Se hace un bosquejo del puente considerando que el vértice de la parábola se ubica en el origen



Se observa que se trata de una parábola vertical que abre hacia arriba.

La superficie terrestre es la directriz, se encuentra a 15 m del vértice y equivale al parámetro (p).

Para obtener la ecuación ordinaria se sustituye con el valor de p en la formula

$x^2 = 4py$ y se resuelve la operación:

La altura de las columnas desde el eje x se obtiene al sustituir el punto (50,h) en la ecuación de la parábola $x^2 = 60y$ y resolviendo las operaciones:

$$(50)^2 = 50(h)$$

$$2500 = 60(h)$$

$$\frac{2500}{60} = h$$

$$\mathbf{41.67 = h}$$

La altura total de las columnas se calcula sumando el resultado anterior a la distancia del vértice a la superficie, en este caso 15 m:

$$41.67 + 15 = \mathbf{56.67}$$

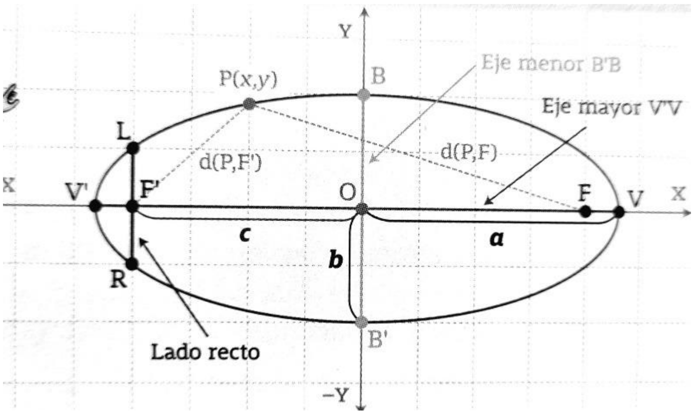
4.6 Elipse: definición, elementos y ecuación canónica

La elipse es el lugar geométrico del conjunto de puntos P(x,y) en el plano cartesiano donde la suma de sus distancias a dos puntos fijos F' y F es constante y se representa como 2ª. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{d(P, F') + d(P, F) = 2a}$$

Donde: d = distancia, P = punto, F = foco.

Los elementos de una elipse son:



Focos. Son los puntos fijos F y F'.

Distancia focal. Segmento FF' que une los focos.

Eje mayor. Segmento de recta VV' cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse.

Vértices. Puntos de intersección de la elipse con su eje mayor, se señalan como V y V'.

Eje menor. Segmento de recta que pasa por el centro de la elipse y cuyos puntos extremos son BB', es perpendicular al eje mayor.

Lado recto. Segmento perpendicular al eje mayor que pasa por uno de sus focos cuyos puntos extremos son L y R. Al segmento de recta que pasa por F' se le denomina L'R'.

Excentricidad. Es una medida del estiramiento de la elipse. Si es cercana a 1 la elipse tendrá forma alargada, pero si e es cercana a 0 la elipse casi formará un círculo. Se calcula mediante .

La distancia del origen O al vértice V o V' se conoce como semieje mayor y equivale al valor de a.

La distancia del origen O a cualquiera de los extremos B o B' del eje menor es igual a b.

La distancia del origen O a cualquiera de los focos F o F' se conoce como c.

Ejemplo 01

Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen cuyos vértices están en V' (-5,0) y V (5,0) y los focos en F'(-3,0) y F(3,0). Determinar la longitud del eje mayor y del eje menor, la distancia focal, la excentricidad, del lado recto y trazar la gráfica.

De acuerdo con los datos, la distancia del origen al vértice es a = 5 y la distancia del origen al foco es c = 3.

Observa que se cumple la relación pitagórica .

Entonces, para calcular b se despeja del teorema de Pitágoras y se realizan las operaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 5^2 - 3^2$$

$$b^2 = 25 - 9$$

$$b = \sqrt{16}$$

$$\boldsymbol{b = 4}$$

Se sustituyen las variables $a^2 = 25 \;\; y \;\; b^2 = 16$ en la ecuación y se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

La longitud del eje mayor equivale a 2a:

$$2a = 2(5) = \mathbf{10}$$

La longitud del eje menor es igual a 2b:

$$2b = 2(4) = \mathbf{8}$$

La distancia focal es 2c:

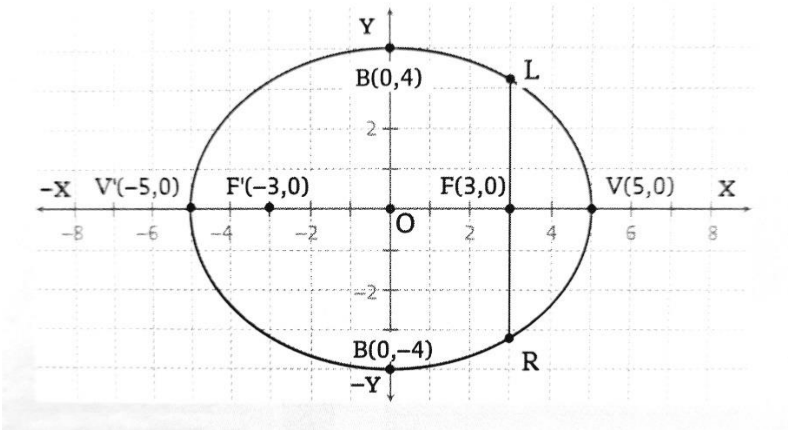
$$2c = 2(3) = \mathbf{6}$$

La excentricidad equivale a e = c/a.

$$e = \frac{3}{5} = \mathbf{0.6}$$

El lado recto es igual a $\frac{2b^2}{a}$:

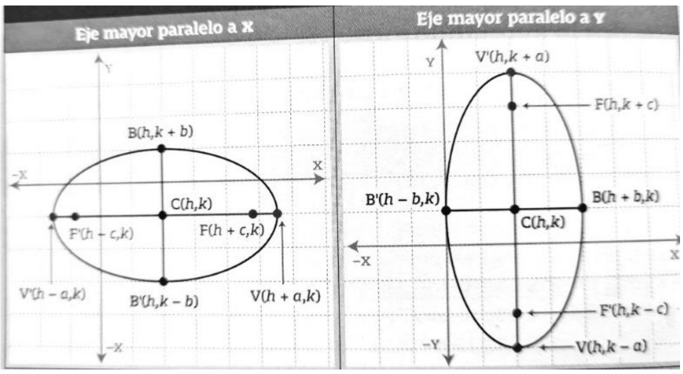
$$LR = \frac{2(16)^2}{5} = 6.4$$



4.7 Ecuación ordinaria y general de la elipse

En una elipse con centro fuera del origen y donde los ejes mayor y menor son paralelos a los ejes coordenados X y Y, el centro se ubica en un punto C(h,k).

Los elementos de la elipse cuando tiene el centro fuera del origen son los mismos, pero cambian la ecuación, las coordenadas de los focos y los vértices de los ejes mayor y menos. En la siguiente tabla se observa cómo obtenerlos.

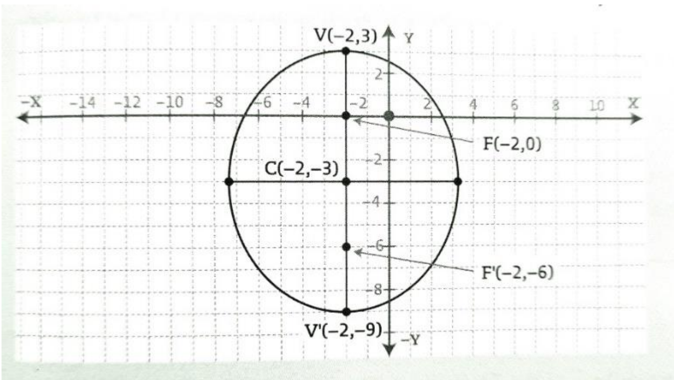


Ejemplo 01

Encontrar los elementos de una elipse con los siguientes datos: C (-2,-3), V (-2,3), V' (-2,-9), F (-2,0) y F' (-2,-6).

De acuerdo con la información proporcionada, h = -2, k = -3.

Se ubican el centro, los vértices y los focos en una gráfica. Se observa que su eje mayor es paralelo al eje Y.



Por inspección se observa que a = 6 y c = 3.

Para conocer la medida de b se utiliza el teorema de Pitágoras y se sustituye con los valores conocidos:

$$b^2 = 6^2 - 3^2 \rightarrow b = 36 - 9 \rightarrow b^2 = 27 \rightarrow b^2 = \sqrt{27}$$

Para obtener la ecuación ordinaria se sustituyen las variables $\boldsymbol{a^2 = 36}\ \ y\ \ \boldsymbol{b^2 27}$:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{\boldsymbol{(x+2)^2}}{\boldsymbol{27}} + \frac{\boldsymbol{(y+3)^2}}{\boldsymbol{36}} = \boldsymbol{1}$$

La longitud del eje mayor es 2a → 2(6) = 12

La longitud del eje menor es 2b → $2(\sqrt{27} = \boldsymbol{10.39}$

La distancia focal equivale a 2c → 2(3) = 6

La excentricidad es $\frac{c}{a} \rightarrow \frac{3}{6} = \boldsymbol{0.5}$

La longitud del lado recto equivale a $\frac{2b^2}{a}$:

$$LR = \frac{2(27)}{6} = \mathbf{9}$$

Ejemplo 02

Calcular los elementos de una elipse a partir de la siguiente ecuación y trazar su gráfica:

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2}{\mathbf{16}} + \frac{(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^2}{\mathbf{9}} = \mathbf{1}$$

Dado que C (h,k), el centro es C (2,-1).

La variable a siempre mide más que b; por lo tanto, de acuerdo con la fórmula, $\boldsymbol{a^2} = \mathbf{16}, \boldsymbol{b^2} = \mathbf{9}$ y el eje mayor es paralelo al eje X.

Para calcular c se utiliza el teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 = b^2$, sustituyendo con los valores concidos:

$$c^2 = 16 - 9 \rightarrow c^2 = 7 \rightarrow c = \sqrt{\mathbf{7}} \rightarrow \boldsymbol{c} = \mathbf{2.64}$$

Para calcular los otros elementos, a = 4, b = 3 y c = 2.64.

Los focos equivalen a F (h + c,k), F' (h – c,k):

$$F(2 + 2.64, -1) = (\mathbf{4.64}, \mathbf{-1})$$

$$F'(2 - 2.64, -1) = (\mathbf{-0.64}, \mathbf{-1})$$

Vértices del eje mayor V (h + a,k), V' (h – a,k):

$$V(2 + 4, -1) = (\mathbf{6}, \mathbf{-1})$$

$$V'(2 - 4, -1) = (\mathbf{-2}, \mathbf{-1})$$

Vértices del eje menor: B (h,k + b), B' (h,k – b):

$$B(2, -1 + 3) = (\mathbf{2}, \mathbf{2})$$

$$B'(2, -1 + 3) = (\mathbf{2}, \mathbf{-4})$$

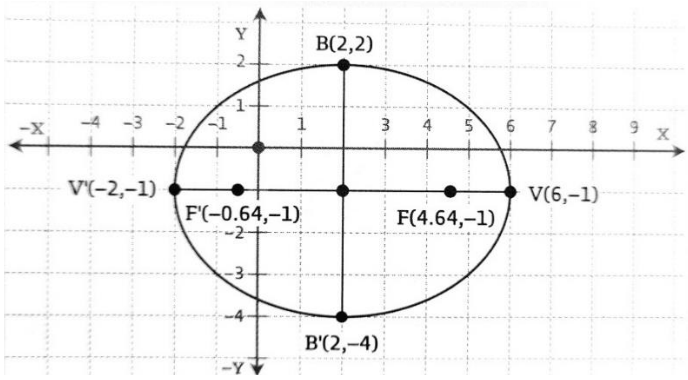
Longitud del eje mayor: $2a \rightarrow 2(4) = \mathbf{8}$

Longitud del eje menor: $2b \rightarrow 2(3) = \mathbf{6}$

La distancia focal equivale a $2c \rightarrow 2(2.64) = \mathbf{5.28}$

La excentricidad es $\frac{c}{a} = \frac{2.64}{4} = \mathbf{0.66}$

Longitud de lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} \rightarrow LR = \frac{2(9)}{4} = \mathbf{4.5}$

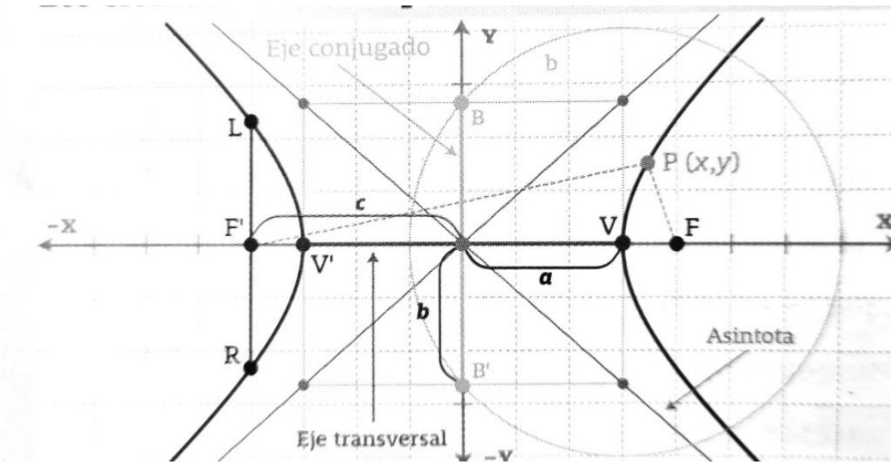


4.8 Hipérbola: definición, elementos y ecuación canónica

La hipérbola es el lugar geométrico de un punto P(x,y) que se mueve en el plano de modo que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos es siempre una cantidad constante y positiva: 2ª. Se denota que:

$$|PF'| - |PF| = 2a$$

Los elementos de la hipérbola son:



Centro. Se ubica en el origen O(0,0).

Focos. Son los puntos fijos F y F'.

Vértices. Puntos de intersección de la hipérbola con el eje transversal, se representan como V y V'.

La distancia del origen al vértice es conocida como semieje transversal y se representa como a.

La distancia del origen a un punto B o B' es conocida como semieje conjugado y es igual a b.

La distancia del origen del foco se conoce como c.

Eje focal. Segmento que une los focos, se representa como FF' y su longitud es 2c.

Eje transversal. Segmento que une los vértices, se representa como VV' y su longitud es igual a 2a.

Eje conjugado. Es la mediatriz del segmento FF', sus puntos extremos son B y B' y su longitud es igual a 2b. Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje conjugado con una circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.

Lado recto: Segmento perpendicular al eje focal y que pasa por uno de los focos, se representa como LR.

Excentricidad. Medida de estiramiento de la hipérbola; resulta de $e = \frac{c}{a}$, donde c > a.

Ejemplo 01

Los focos de una hipérbola con centro en el origen están en F(0,4) y F'(0,-4) y su eje conjugado tiene una longitud de 6 unidades.

Con los datos proporcionados se identifica que:

Se trata de una hipérbola que tiene su eje focal en $Y, \boldsymbol{c = 4} \quad y \quad \boldsymbol{c^2 = 16}$.

La longitud del eje conjugado es 6 = 2b, por lo tanto $\boldsymbol{b = 3} \quad y \quad \boldsymbol{b^2 = 9}$.

Para encontrar a se sustituye con los datos en la relación pitagórica $c^2 = c^2 + a^2$:

$$a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow a^2 = 16 - 9\ a^2 = 7 \rightarrow a = \sqrt{7} \rightarrow \boldsymbol{a = 2.64}$$

Para obtener los otros elementos de la hipérbola se sustituye con los valores de a, b y c en los parámetros de la fórmula de la tabla anterior:

Ecuación de la hipérbola: $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{9} = 1$

Vértices: V'(0,-2.64) y V(0,2.64).

Puntos extremos del eje conjugado: B'(-3,0) y B(3,0).

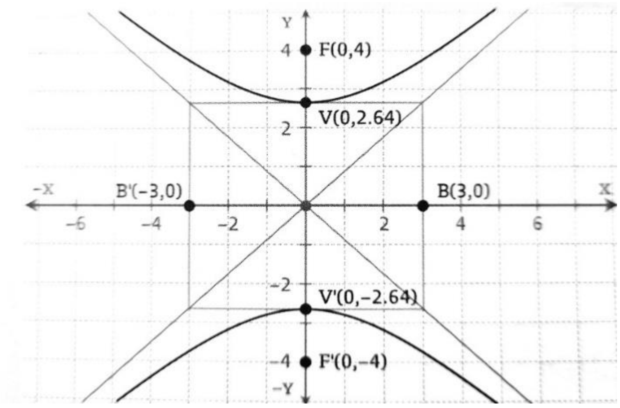
Longitud del eje transversal: $2a \rightarrow 2(2.64) = \boldsymbol{5.28}$

Longitud de la distancia focal: $2c \rightarrow 2(4) = \boldsymbol{8}$.

Excentricidad: $\frac{c}{a} \rightarrow \frac{4}{2.64} = \boldsymbol{1.51}$.

Lado recto $2b^2 \rightarrow \frac{2(9)}{2.64} = \mathbf{6.81}$

Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x \rightarrow y = \pm\frac{2.64}{3}x = \pm\mathbf{0.88}\boldsymbol{x}$



4.9 Ecuación ordinaria de la hipérbola

A partir de la definición de eje transverso, podemos deducir que, para esta hipérbola, $a = 3$. También, dado que el foco está en $F(c, 0)$, la hipérbola es horizontal y $c = 5$. Usando la relación: $c^2 = a^2 + b^2$, podemos fácilmente calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Y a partir de estos valores podemos calcular los demás elementos asociados a la hipérbola:

Vértices: $V(3, 0)$, $V'(-3, 0)$.

Focos: $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$.

Longitud del eje conjugado: $2\,b = 8$.

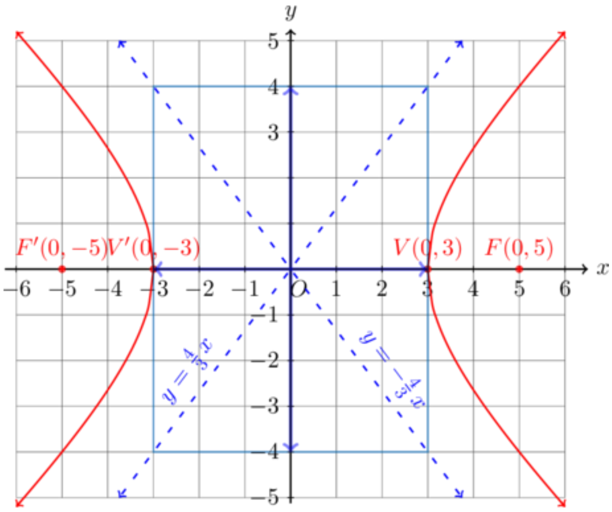
Asíntotas: $y = -\frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$.

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

La ecuación de esta hipérbola es la siguiente:

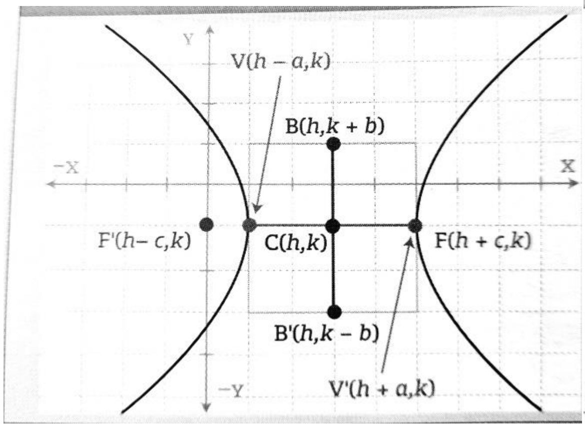
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

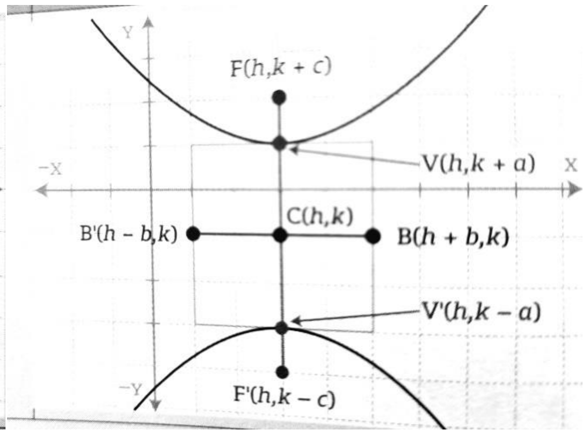
Y su gráfica es la siguiente:



Es una hipérbola con centro fuera del origen y donde el eje transversal y el eje conjugado son paralelos a los ejes coordenados X y Y, el centro se ubica en un punto C(h,k).

Los elementos de la hipérbola son los mismos, pero cambian la ecuación, las coordenadas de los focos y los vértices del eje transversal y del eje conjugado.





Ejemplo 01

Encontrarlos elementos de la parábola con centro fuera del origen tomando como referencia la siguiente ecuación:

$$\frac{(x+3)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Con base los datos, se observa que:

Se trata de una ecuación con centro fuera del origen de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

La hipérbola es horizontal porque el binomio positivo en la ecuación es el que contiene la x.

El eje transversal y el eje focal son paralelos al eje X.

Las coordenadas del centro se obtienen a partir de los binomios y tienen signo contrario al que se observa en la ecuación; por lo tanto, el centro es C(-3,1), donde h = -3 y k = 1.

En la ecuación, $a^2 = 12$; por lo tanto, el semieje transversal es:

$$a=\sqrt{12} \rightarrow \boldsymbol{a=3.46}$$

En la ecuación, $b^2 = 4$; por consiguiente, el semieje conjugado es:

$$b^2=4 \rightarrow b=\sqrt{4} \rightarrow \boldsymbol{b=2}$$

Para encontrar c se sustituye con los datos en la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$, y resulta:

$$c^2=a^2+b^2 \rightarrow c^2=12+4 \rightarrow c=16 \rightarrow c=\sqrt{16} \rightarrow \boldsymbol{c=4}$$

Para localizar los focos se sustituye con los valores de h, k y c en la fórmula:

$$F(h+c,k) \qquad F'(h-c,k)$$

$$F(-3+4,1) \qquad F'(-3-4,1)$$

$$\boldsymbol{F(1,1)} \qquad \boldsymbol{F'(-7,1)}$$

Para localizar los vértices se sustituye con los valores de h, k y a en la fórmula y queda:

$$V(h+a,k) \qquad V'(h-a,k)$$

$$V(-3+3.46,1) \qquad V'(-3-3.46,1)$$

$$\boldsymbol{V(0.46,1)} \qquad \boldsymbol{V'(-6.46,1)}$$

Para localizar los puntos extremos del eje conjugado se sustituye con los valores de h, k y b en la fórmula:

$$B(h,k+b) \qquad B'(h,k+b)$$

$$B(-3{,}1+2) \qquad B'(-3{,}1-2)$$

$$\boldsymbol{B(-3,3)} \qquad \boldsymbol{B'(-3,-1)}$$

Longitud de la distancia focal: $2c \rightarrow 2(4) = \mathbf{8}$

Longitud del eje transversal: $2a \rightarrow 2\left(\sqrt{12}\right) = \mathbf{6.92}$

Longitud del eje conjugado: $2b \rightarrow 2(2) = \mathbf{4}$

El lado recto es $\frac{2b^2}{a} \rightarrow \frac{2(4)}{3.46} = \mathbf{2.30}$.

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{12}} = \mathbf{1.15}$.

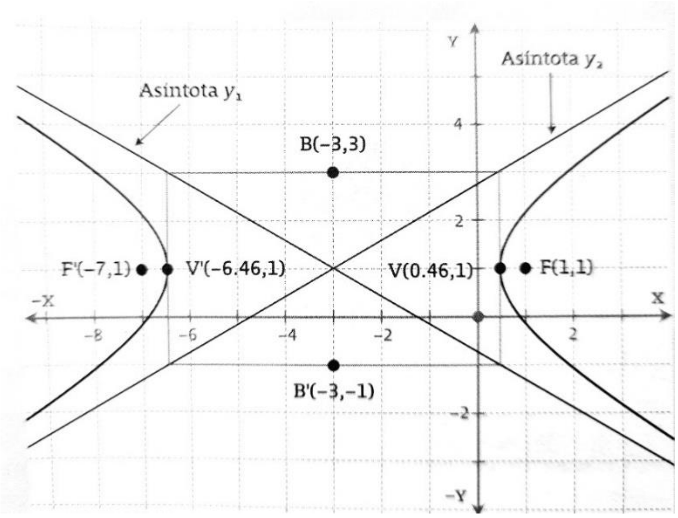
Para calcular las asíntotas se sustituye con los valores de h y k en la fórmula y se obtiene:

$$y_1 = -\frac{a}{b}(x-h)+k \qquad y_2 = \frac{a}{b}(x-h)+k$$

$$y_1 = -\frac{2}{3.46}\left(x-(-3)\right)+1 \qquad y_2 = \frac{2}{3.46}\left(x-(-3)\right)+1$$

$$y_1 = -0.57x - 1.71 + 1 \qquad y_2 = 0.57x + 1.71 + 1$$

$$y_1 = -0.57x - 0.71 \qquad y_2 = 0.57x + 2.71$$



4.10 Problemas y aplicaciones

La propiedad de reflexión de la hipérbola se utiliza para construir telescopios parabólico – hiperbólicos, en los que se combinan un espejo parabólico y otro hiperbólico.

El foco F es común a las dos cónicas y el foco F’ de la hipérbola es el vértice de la parábola.

La distancia (2c) entre F y F’ es el parámetro p de la parábola.

Ejemplo 01

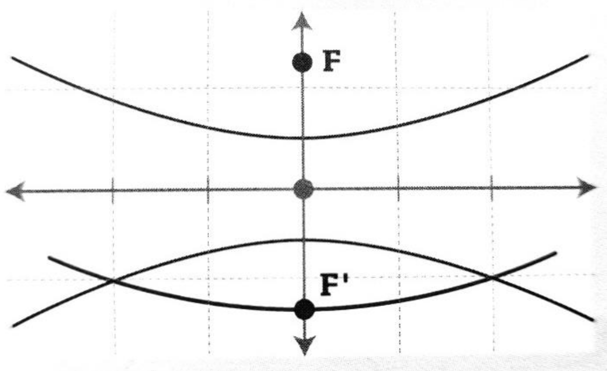
Si en un telescopio parabólico – hiperbólico la ecuación de la hipérbola es:

$$144y^2 - 25x^2 - 3600$$

¿Cuáles son las coordenadas de los focos de la hipérbola?

¿Cuál es el parámetro y cuál la ecuación del espejo parabólico?

Para resolver el problema es necesario dibujar un esquema que represente las lentes del telescopio.



De los datos proporcionados y el análisis del esquema se deduce que:

La ecuación del espejo hiperbólico indica que se trata de una hipérbola vertical con centro en el origen.

El foco F’ de la hipérbola corresponde al vértice de la parábola.

A partir de la ecuación general de la hipérbola se puede deducir la ecuación canónica para calcular la ubicación de los focos, y posteriormente la distancia entre ellos:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{12^2} = 1}$$

De acuerdo con la ecuación canónica, los valores son a = 5 y b = 12. La ubicación de los focos es a F(0,c) y F'(0,-c), por lo que se utiliza la relación pitagórica para calcular c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow c = \sqrt{25 + 144} \rightarrow \boldsymbol{c = 13}$$

Los focos de la hipérbola son:

F(0,c) = (0, 13)

F´(0, -c) = (0,-13)

La distancia entre los focos equivale a 2c y es también la longitud del parámetro p de la parábola:

$$p = 2c \rightarrow p = 2(13) \rightarrow \boldsymbol{p = 26}$$

La parábola es vertical y abre hacia arriba, su vértice se ubica en el foco F' de la hipérbola V(0,-13). Para obtener su ecuación se sustituyen el parámetro p y el valor

k = -13 en la ecuación ordinaria $x^2 = 4p(y - k)$ y se realizan las operaciones:

$$x^2 = 4(26)\big(y - (-13)\big) \rightarrow \boldsymbol{x^2 = 104(y + 13)}$$

Se realizan las operaciones y se iguala a cero para obtener la ecuación general del espejo parabólico:

$$x^2 = 104y + 1352$$

$$\boldsymbol{x^2 - 104y - 1352 = 0}$$

Resuelve

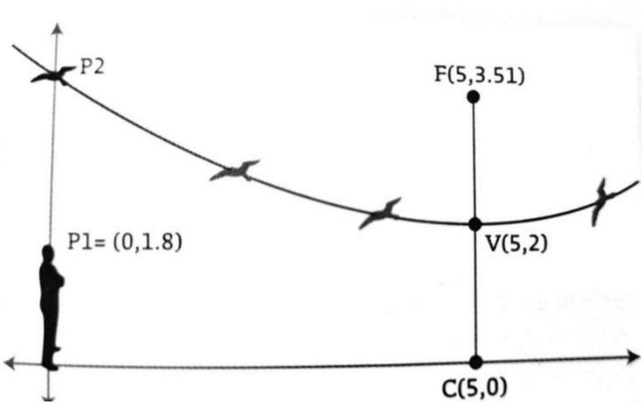
Una persona de 1.80 cm de estatura ve volar un ave en una trayectoria de forma hiperbólica en la que el punto más bajo está 5 m a su derecha y a 2 m del suelo, y el foco de la hipérbola en F(5,3.51).

Cuando el ave pasa por encima del lugar donde está la persona:

¿Cuál es la ecuación de la hipérbola que representa la forma de su trayectoria de vuelo?

¿Cuál es la distancia de la persona al ave?

Se considera el suelo como el eje conjugado.



El análisis del planteamiento y del diagrama arroja los siguientes datos:

Se trata de una hipérbola con centro fuera del origen y el eje focal paralelo al eje Y.

El vértice se ubica en V(5,2).

La distancia del centro al vértice es 2 y equivale al valor de a.

El foco se encuentra en F(5,3.51).

La distancia del centro al foco es 3.51 y equivale al valor de c.

El eje conjugado es perpendicular al eje focal, de lo que se deduce que el centro de la hipérbola es C(5,0), es decir, h = 5 y k = 0.

La persona está parada sobre el origen, y el punto de referencia dese el cual ve al ave es P1(0,1.8).

Para responder la primera pregunta se sustituye con los valores de a, b y c en la formula; pero la relación pitagórica:

Se sustituye con los valores de a, b y c en la fórmula, y la ecuación de la hipérbola que representa la trayectoria del vuelo del ave es:

Para encontrar la distancia de la persona al ave se sustituye en x = 0 y se despeja para encontrar el valor de y:

Luego de obtener que y = 4, se le resta la estatura de la persona, que es 1.8 m.

La distancia respecto al ave es de 2.2 m.

4.11 Gráfica de cónicas con GeoGebra

REALIZA las siguientes construcciones con GeoGebra y contesta las preguntas.

Traza la recta $x - 2y - 2 = 0$.

Ubica el punto A (-2,2).

Traza una perpendicular a la recta que pase por A.

Ubica el punto B en la intersección de ambas rectas.

Ubica un punto C sobre la recta perpendicular.

Traza una circunferencia con centro en A con radio la distancia de B a C (utiliza la herramienta COMPÁS).

Traza una paralela a la recta $x - 2y - 2 = 0$ que pasa por el punto A.

Ubica los puntos D y E en las intersecciones entre la circunferencia y la recta $x - 2y -2=0$.

¿Qué tipo de trayectoria marca el rastro de los puntos D y E cuando el punto B se mueve a lo largo de la recta perpendicular?

Ubica los puntos A(-4,-2), B(8,4), C(0,0) y D(4,2).

Traza la recta que une e estos puntos.

Ubica un punto E sobre esta recta entre C y D.

Traza una circunferencia con centro en C con radio la distancia de A a E (utiliza a la herramienta COMPÁS).

Traza una circunferencia con centro en D con radio la distancia de B a E.

Ubica los puntos F y G en las intersecciones de ambas circunferencias.

¿Qué tipo de trayectoria marca el rastro de los puntos F y G cuando el punto E se mueve a lo largo de la recta entre los puntos A y B?

Ubica los puntos A(-1,2), B(8,-1), C(2,1) y D(5,0).

Traza la recta que une a estos puntos.

Ubica un punto E sobre esta recta

Traza una circunferencia con centro en A con radio la distancia de C a E (utiliza la herramienta COMPÁS).

Traza una circunferencia con centro B con radio la distancia de D a E.

Ubica el punto E fuera del segmento AB.

Ubica los puntos F y G en las intersecciones de ambas circunferencias.

¿Qué tipo de trayectoria marca el rastro de los puntos F y G cuando el punto E se mueve a lo largo de la recta y no se encuentra entre los puntos A y B?

Bibliografía complementaria:

Cuevas Vallejo, A. & Mejía Velasco, R. (2003). Cálculo visual. Ciudad de México, México: Editorial Oxford.

Sánchez Almanza, Oscar. (2018). Geometría Analítica, Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico. Guadalajara, Jalisco. Editorial KeepReading.

Charles H. Lehmann. (1989). Geometría Analítica. Nueva York, USA. Editorial Limusa.

Dr J. A. Baldor. (2018). Geometría plana y del espacio, con una introducción a la trigonometría. Miami, Florida, USA. Editorial Publicaciones cultural.

Orduña Flores, Javier. (2012). Geometría Analítica. Estado de México. Editorial Red Tercer Milenio.

Autores: Julián Pérez Porto y María Merino. Publicado: 2016. Actualizado: 2018. Definicion.de:

Definición de bidimensional (https://definicion.de/bidimensional/)

https://www.youtube.com/watch?v=16eSmD4gWB8

https://www.youtube.com/watch?v=LJv_s8H67BU

https://www.youtube.com/watch?v=yCpTZXuT0-s

https://www.youtube.com/watch?v=VClc7RobHNc