ANTOLOGIA

Control Inteligente

ISC

9°

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Nombre de la materia

Objetivo de la materia:

Proporcionar los conocimientos básicos para el diseño de Sistemas de Control Difuso.

UNIDAD I
CONJUNTOS DIFUSOS Y CONJUNTOS CERTEROS

1.1.- Introducción.
1.2. Conceptos básicos de Conjuntos Difusos.
1.3. Lógica clásica y lógica multivariada.
1.4.- Lógica Difusa.
1.5.- Operaciones simples sobre los conjuntos difusos.
1.5.1.- Inclusión difusa.
1.5.2.- Igualdad difusa.
1.5.3.- Intersección difusa.
1.5.4.- Unión difusa.
1.5.5.- Negación difusa.

UNIDAD II
PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

2.1.- Conmutatividad.
2.2.- Asociatividad.
2.3.- Distributividad.
2.4.- Involución.
2.5.- Idempotencia.
2.6.- Leyes de Morgan.
2.7.- Absorción.
2.8.- Fórmulas de equivalencia.
2.9.- Ley de no contradicción.
2.10.- Ley del tercero excluido.

UNIDAD III
CARACTERÍSTICAS DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

3.1.- Soporte.
3.2.- Altura.
3.3.- Punto de cruce.
3.4.- Corte-alfa.
3.5.- Corte-alfa estricto.
3.6.- Escalamiento difuso.
3.7.-Impulso difuso.
3.8.- Convexidad.

3.9.- Producto cartesiano.
3.10.- Relaciones difusas.
3.11.- Composición.
3.12.- Principio de extensión.
3.13.- Operadores alternos en la lógica difusa.
3.13.1.- Normas-t.
3.13.2.- Conormas-t.
3.13.3.- Parejas de normas-t y conormas-t típicas.
3.13.4.- Producto drástico. Producto acotado. Suma acotada.
3.14.- Producto einsteniano. Suma einsteniana. Suma algebraica.
3.14.1.- Producto de Hamacher. Suma de Hamacher.
3.14.2.- Operador mínimo. Operador Máximo. Diferencia acotada.
3.15.- Criterios para seleccionar operadores apropiados de agregación.

UNIDAD IV
RELACIONES DIFUSAS
4.1.- Ecuaciones certeras y difusas.
4.2.- Relaciones binarias.
4.3.- Relación binaria sobre un conjunto simple.
4.4.- Relaciones de equivalencia y similitud.
4.5.- Relaciones de compatibilidad o tolerancia.
4.6.- Ordenamientos.
4.7.- Morfismos.
4.8.- Ecuaciones de relación difusa.

Índice

UNIDAD IV RELACIONES DIFUSAS

UNIDAD I
CONJUNTOS DIFUSOS Y CONJUNTOS CERTEROS

1.1.- Introducción.

La lógica difusa, como su nombre indica, es una lógica alternativa a la lógica clásica que pretende introducir un grado de vaguedad en las cosas que califica. En el mundo real existe mucho conocimiento no-perfecto, es decir, conocimiento vago, impreciso, incierto, ambiguo, inexacto, o probabilístico por naturaleza. El razonamiento y pensamiento humano frecuentemente conlleva información de este tipo, probablemente originada de la inexactitud inherente de los conceptos humanos y del razonamiento basado en experiencias similares, pero no idénticas a experiencias anteriores.

El problema principal surge de la poca capacidad de expresión de la lógica clásica. Supongamos por ejemplo que tenemos un conjunto de personas que intentamos agrupar según su altura, clasificándolas en altas o bajas. La solución que presenta la lógica clásica es definir un umbral de pertenencia (por ejemplo, un valor que todo el mundo considera que, de ser alcanzado o superado, la persona en cuestión puede llamarse alta). Si dicho umbral es 1.80, todas las personas que midan 1.80 o más serán altas, mientras que las otras serán bajas. Según esta manera de pensar, alguien que mida 1.79 será tratado igual que otro que mida 1.50, ya que ambos han merecido el calificativo de bajas. Sin embargo, si dispusiéramos de una herramienta para caracterizar las alturas de forma que las transiciones fueran suaves, estaríamos reproduciendo la realidad mucho más fielmente.

Asimismo, no hay un valor cuantitativo que defina el término joven. Para alguna gente, 25 años es joven, mientras que, para otros, 35 es joven. Incluso el concepto puede ser relativo al contexto. Un presidente de gobierno o de 35 años es joven, mientras que un futbolista no lo es. Hay sin embargo cosas que están claras: una persona de 1 año es joven, mientras que una de 100 años no lo es. Pero una persona de 35 años tiene algunas posibilidades de ser joven (que normalmente dependen del contexto). Para representar este hecho, definiremos el conjunto joven de modo que cada uno de sus elementos pertenezca a él con cierto grado (posibilidad). De un modo más formal, un conjunto difuso A se caracteriza por una función de pertenencia:

$\mu A : U \rightarrow [0,1]$

que asocia a cada elemento x de U un número $\mu A(x)$ del intervalo [0,1], que representa el grado de pertenencia de x al conjunto difuso A. A U se le llama universo de discurso. Por ejemplo, el término difuso joven puede definirse mediante el conjunto difuso siguiente:

Edad	Grado de Pertenencia
≤25	1.0
30	0.8
35	0.6
40	0.4
45	0.2
≥50	0

Es decir, la función de pertenencia del conjunto difuso *joven* viene dada por:

$\mu_A(x) = 1$ si $x \leq 25$, $\mu_A(30) = 0.8$, ..., $\mu_A(x) = 0$ si $x \geq 50$.

Que podemos representar en la siguiente gráfica:

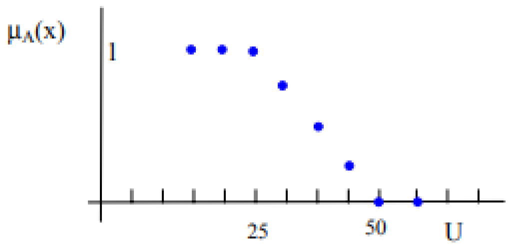


Figura 1. Función de pertenencia del conjunto difuso joven

Si el universo de discurso es continuo, tendremos funciones de pertenencia continuas:

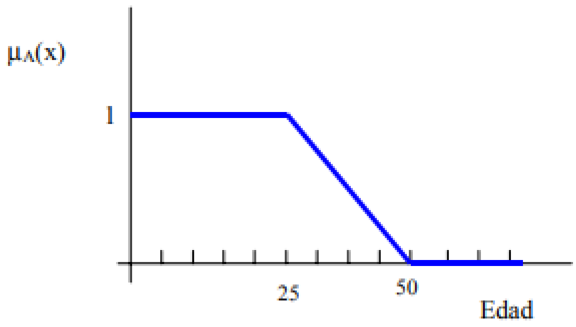


Figura 2. Función de pertenencia de joven si U es continuo

En general, si una función de pertenencia se da especificando los valores correspondientes a un conjunto discreto de elementos del universo de discurso, el valor asociado al resto de los elementos se obtiene por interpolación (utilizando la ecuación de la recta que une los dos puntos).

El origen del interés actual por la teoría de conjuntos difusos se debe a un artículo publicado por Lofti Zadeh en 1.965. En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus implicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones prácticas. Prueba de esta importancia es el gran número de revistas internacionales (Fuzzy Sets and Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems..) congresos (FUZZ-IEEE, IPMU, EUSFLAT, ESTYLF...) y libros (Kruse, 1994), (McNeill, 1994), (Mohammd, 1993), (Pedrycz, 1998) dedicados al tema.

¿En qué situaciones es útil aplicar la lógica difusa?

- En procesos complejos, si no existe un modelo de solución sencillo.
- Cuando haya que introducir la experiencia de un operador "experto" que se base en conceptos imprecisos.
- Cuando ciertas partes del sistema a controlar son desconocidas y no pueden medirse de forma fiable (con errores posibles).
- Cuando el ajuste de una variable puede producir el desajuste de otras.

- En general, cuando se quieran representar y operar con conceptos que tengan imprecisión o incertidumbre Algunas aplicaciones importantes de la lógica difusa son:
- Control de sistemas: Control de tráfico, control de vehículos (helicópteros...), control de compuertas en plantas hidroeléctricas, centrales térmicas, control en máquinas lavadoras, control de metros (mejora de su conducción, precisión en las paradas y ahorro de energía), ascensores...
- Predicción y optimización: Predicción de terremotos, optimizar horarios...
- Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador: Seguimiento de objetos con cámara, reconocimiento de escritura manuscrita, reconocimiento de objetos, compensación de vibraciones en la cámara, sistemas de enfoque automático...
- Sistemas de información o conocimiento: Bases de datos, sistemas expertos...

1.2. Conceptos básicos de Conjuntos Difusos.

Para poder entender algunas de las aplicaciones de los números difusos, primero hemos de introducir algunos conceptos sobre la Teoría de Conjuntos Difusos. En la lógica tradicional o lógica binaria únicamente se presentan dos casos: o un elemento pertenece a un conjunto o no pertenece. Sin embargo, como se nos comenta en [1], la pertenencia a un conjunto difuso es gradual, según la cual el valor de pertenencia 0 indica que el elemento no está en el conjunto y el valor 1 indica que se encuentra totalmente dentro del conjunto. Por tanto, decimos que un elemento forma parte de un conjunto difuso con un determinado grado de pertenencia.

- Definición 1 Se define variable lingüística x como la noción o concepto que vamos a calificar de forma difusa. Ejemplos: altura, edad ...
- Definición 2 Se define universo de discurso como el conjunto X de todos los posibles valores que puede tomar una determinada variable x. Ejemplo: x = Altura, X = [1.4, 2.3] Un conjunto clásico o crisp set es un conjunto empleado en la lógica binaria. Son los conjuntos que surgen por la necesidad del ser humano de clasificar objetos y conceptos. Únicamente contemplan la pertenencia o no pertenencia al conjunto.

- Definición 3 Un conjunto difuso o fuzzy set es un conjunto que puede contener elementos de forma parcial, es decir, que la propiedad de que un elemento x pertenezca al conjunto A (x ∈ A) puede ser cierta con un grado parcial de verdad.

Ejemplo 1. Si hablamos de temperatura, tendremos que para una persona de Alaska el concepto de caliente puede estar por encima de 10◦C, mientras que para un mexicano caliente estaría por encima de 30◦C o en un proceso de fundición el concepto de caliente sería para aquellas temperaturas superiores a 300◦C. Por esta razón los conjuntos "Caliente", "Tibio" y "Frío" son llamados conjuntos difusos ya que tienen límites borrosos o "no muy bien" definidos.

Ejemplo 2. Supongamos que queremos clasificar a las personas de un país o de una zona en" Ricos" y "No Ricos". Lo más sencillo parece asignar un valor numérico y decir que una persona pertenece al conjunto ricos o no dependiendo de si su fortuna sobrepasa esa cantidad. ¿Y si a una persona le faltaran 100e para llegar a este valor? ¿Y si le faltaran 10e? Aquí vemos un ejemplo de la representación de los conjuntos aplicando la lógica clásica y la lógica difusa.

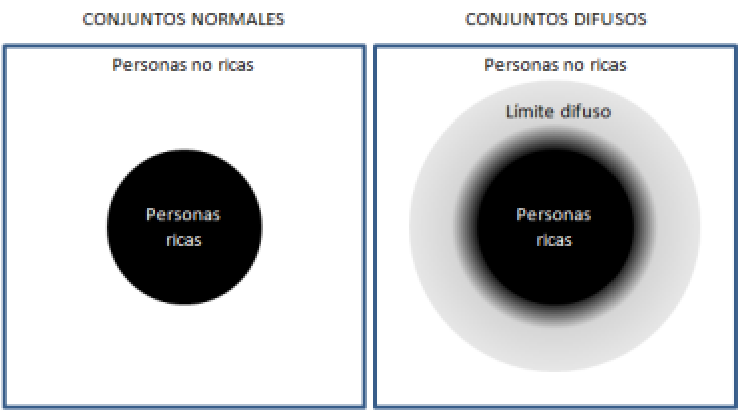


Figura 2.1: Diferencia de límites entre los conjuntos crisp y fuzzy.

Definición 4 *Sea A un conjunto difuso y sea $x \in X$ un valor del conjunto universal. Su* ***función de pertenencia*** *o* ***función de membresia*** *μ_A es una aplicación que indica el grado de pertenencia de un valor a dicho conjunto difuso:*

$$\mu_A(x) : X \longrightarrow [0, 1].$$

Así pues, un conjunto difuso A puede definirse de la siguiente manera

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) : X \longrightarrow [0, 1]\},$$

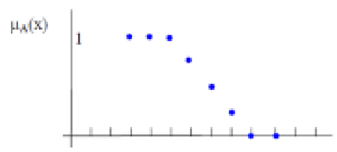


Figura 2.2: Función de membresía en un Universo discreto.

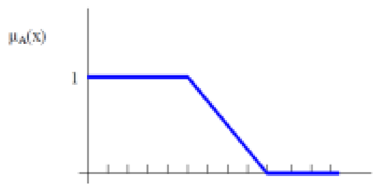


Figura 2.3: Función de membresía en un Universo continuo.

donde μA(x) = 1 si x está totalmente en A, μA(x) = 0 si x no está en A y 0 < μA(x) < 1 si x está parcialmente en A. Este valor entre 0 y 1 representa el grado de pertenencia (también llamado valor de pertenencia) de un elemento x al conjunto A. Cuanto más cerca esté μA(x) del valor 1, mayor será la pertenencia del objeto x al conjunto A. En algunas ocasiones la función de pertenencia a un conjunto difuso A también se representa sencillamente como A(x).

Otra forma de representar conjuntos difusos es la siguiente:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i},$$

donde el símbolo "+" representa una enumeración y no una operación de suma. En esta representación no se tienen en cuenta los valores de X tal que μA(x) = 0. En el caso de que la variable X tome valores continuos y no discretos tendríamos que

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x_i)}{x_i},$$

donde la integral tampoco debe considerarse como una operación algebraica sino como una forma de representar los pares de valores.

Uno de los aspectos más interesantes del uso de la lógica difusa, es que podemos utilizar palabras ambiguas para la generación de cálculos computacionales. Esta visión fue dada por Zadeh[2] y podemos verla ampliada en [3], donde se plantea la idea del cómputo con palabras.

Definición 5 Los valores lingüísticos son las diferentes clasificaciones que efectuamos sobre la variable lingüística. Ejemplo: La variable x = Altura se puede clasificar en bajo, medio y alto.

A diferencia de una variable numérica, la variable lingüística es ambigua, y está representada por un conjunto difuso. Por ejemplo, la variable numérica puede ser definida como altura=180 cm, mientras que la variable lingüística estaría definida como altura=alto. Por medio de estos valores lingüísticos sirven para modelar un fenómeno tal como se puede ver en la Figura 2.4:

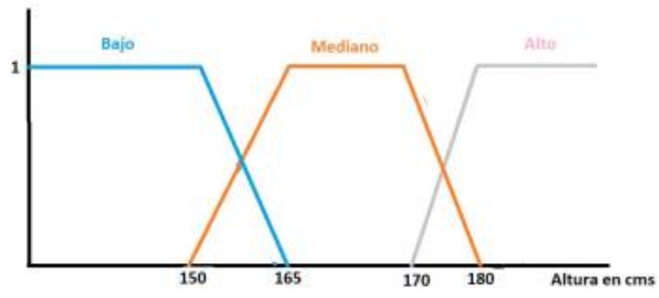
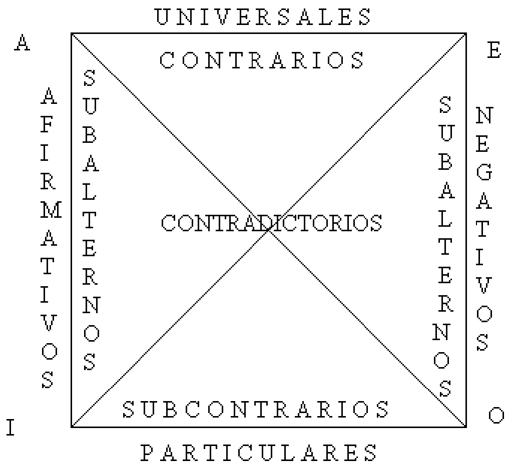


Figura 2.4: Separación de la variable altura en los conjuntos, o valores: bajo, mediano y alto.

1.3. Lógica clásica y lógica multivariada.

¿Qué es la lógica clásica? Según algunos la lógica clásica estaría constituida por un **conjunto de cálculos lógicos equivalentes al cálculo presentado por Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead en sus *Principia Mathematica* (1910-1913)**. Otro punto de vista es el que dice que la lógica clásica es aquella que **se desarrolla desde Aristóteles hasta las aportaciones de Alfred Tarski**, hacia mediados de los años 30 del siglo XX. Cualquiera de las dos definiciones nos viene bien, pues resulta que todos los sistemas lógicos a los que llamamos «lógica clásica» comparten la propiedad de ser equivalentes al cálculo de *Principia* y, a su vez, todos ellos son producto y han nacido gracias a las aportaciones realizadas por los lógicos desde Aristóteles a Tarski. Dicho esto, pasamos a profundizar en la lógica clásica.



Cuadro de la oposición de los juicios. Se utilizaba para el estudio de las relaciones formales entre los distintos tipos de juicios.

Varios son los cálculos que caen bajo el dominio de la lógica clásica, pero entre ellos destacan la lógica proposicional, la lógica de predicados de primer orden y la lógica de predicados de segundo orden. Todos ellos comparten una serie de características comunes, las cuales a continuación enumeramos.

1. **Son lógicas bivalentes**, esto es, solo operan con dos valores de verdad: verdadero y falso.

2. Todas ellas **se basan en el principio de identidad, el de no contradicción, en el principio del tercero excluido y en el principio de explosión** (*ex falso quodlibet*).

3. Son, como hemos dicho, **equivalentes al cálculo de *Principia* y, por lo tanto, equivalentes entre sí**.

Proceso de formación de la lógica clásica

La lógica clásica, los sistemas lógicos a los que clasificamos como tal, no nació como un *corpus* cerrado, sino que se fue construyendo a lo largo de la historia. Así, la lógica clásica **nace con Aristóteles, con su teoría del silogismo categórico**, expuestas en los *Primeros analíticos*. Allí el estagirita introduce de forma implícita las nociones que van a constituir esta ciencia, a saber, las nociones de validez, la de deducción y la de inferencia.

Por su parte, **los lógicos megáricos y estoicos identificaron las conectivas y algunas reglas de inferencia**, dándole el primer empujón de la historia al cálculo deductivo. Destaca la introducción del antepasado de nuestro condicional material, en aquel entonces conocido como condicional filónico, y la del antepasado de nuestra implicación estricta, llamado en aquella época condicional diodórico. También introdujeron las reglas de inferencia asociadas al condicional material: *Modus Ponens* y *Modus Tollens*.

Tras los avances de los lógicos estoicos y de los megáricos, la lógica queda estancada, salvo por la teoría de la consequentia desarrollada durante la Edad Media, sobre todo a partir de Boecio. Ya **en el siglo XVII Leibniz publica *Ars combinatoria***. En esta obra Leibniz plantea la creación de un lenguaje artificial para expresar el pensamiento puro sin la interferencia de las vaguedades propias del lenguaje ordinario. Por su parte, en el siglo XIX Bolzano introduce algunas ideas que influyeron en la formación de la lógica.

Y es en el **siglo XIX** cuando la lógica clásica va a experimentar su mayor evolución, cuando sea matematizada. Los inicios de la **matematización de la lógica** nos los encontramos en las obras de Augustus De Morgan y de George Boole, quienes comienzan a utilizar fórmulas algebraicas para expresar relaciones lógicas. No obstante, no es hasta finales del siglo XIX, cuando **las bases definitivas de la lógica clásica quedan sentadas**, alcanzando, asimismo, un alto grado de matematización. **Este espectacular avance se produce cuando Gottlob Frege publica *Begriffschriff* (*Conceptografía*)**

en 1879. Es la primera vez en la historia en la que un sistema lógico aparece totalmente formalizado. **La propuesta de Frege será perfeccionada por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica***.

Finalmente hay que añadir **el programa formalista de Hilbert, comenzado en 1899,** con la introducción del concepto de *metamatemática* como nombre de una disciplina formal que estudia desde un metalenguaje el lenguaje objeto de la matemática. Por último, hay que introducir las **contribuciones al campo de la semántica de la lógica realizadas por Alfred Tarski**, concretamente a sus investigaciones sobre el concepto de verdad (1933) y el de consecuencia lógica (1936).

1.4.- Lógica Difusa.

La conocida como **Fuzzy Logic es la lógica que utiliza expresiones que no son ni completamente ciertas ni falsas.** Es una lógica difusa. Actualmente, es una de las disciplinas matemáticas con un mayor número de seguidores.

La Fuzzy Logic se aplica a conceptos que pueden adquirir un valor cualquiera de veracidad dentro de un conjunto de valores que oscilan entre dos extremos:

- La verdad absoluta
- La falsedad total

Es importante tener en cuenta que **lo difuso no es la lógica en sí, sino el objeto que se estudia.** Esto se debe a la falta de definición del concepto al que se aplica. La Fuzzy Logic nos permite jugar con información que no es precisa. Por ejemplo, «temperatura baja» o «estatura media», en términos de conjuntos que no son claros.

Este tipo de lógica surge de **la necesidad de utilizar en nuestra vida diaria esos adjetivos del lenguaje natural con los cuales estamos cualificando** y, de esta manera, poder volcarlos o cuantificarlos de alguna forma. Esta cuantificación de los adjetivos será la base que vamos a intentar tratar mediante la Fuzzy Logic.

¿Cómo surge la Fuzzy Logic?

La Fuzzy Logic nació de la mano de Lofti A. Zadeh, un iraní de nacionalidad americana, matemático y catedrático de la Universidad de Berkeley de California. El autor sintió la necesidad de aportar en el campo de la matemática una nueva lógica multievaluada. Esto significa que va más allá de la lógica booleana.

Zadeh presentó la fuzzy logic como una forma de procesamiento de la información en la que **los datos podrían tener asociados un grado de pertenencia parcial a conjuntos**. Hacia 1970 se empezó a aplicar esta teoría en los sistemas de control y, desde entonces, el número de aplicaciones industriales y su ejecución ha aumentado exponencialmente.

Mediante esta lógica el autor quería facilitar la expresión mediante las etiquetas del lenguaje natural y poder acercarnos más a ese tratamiento natural del lenguaje a la hora de intentar cualificar y cuantificar dentro de lo que es el desarrollo de sistemas de información.

¿Para qué sirve la Fuzzy Logic?

Se trata de una disciplina que nos permite tratar información imprecisa. Veamos un ejemplo. La temperatura se puede medir en grados centígrados. Es decir, podemos decir que hace 16 grados y medio, pero también la podemos medir de una forma no precisa. Por ejemplo, como «hace frío», «hace un poco de frío» o «hace un poco de calor». Dicho esto, tenemos que establecer qué valores son los que abarcan frío, calor, etc.

Aquí es donde entra la fuzzy logic, ya que nos permite moderar este tipo de información. **Esta lógica parte de la teoría clásica de conjuntos.** Esta teoría dice que un elemento puede pertenecer o no a un conjunto. Pero la fuzzy logic nos permite establecer rangos de pertenencia más allá del 0 y 1.

Es decir, en vez de decir «esto es frío» o «esto es cálido», pues podemos decir: «esto es 0,5 unidades de frío» o «0,8 unidades de cálido». Esto es lo que nos permite moderar frases del estilo «hace un poco de frío» o «eres alto».

La pertenencia de un elemento a un conjunto borroso se calcula mediante su **función de pertenencia**, que es una función a trozos que determina el grado de pertenencia en función de intervalos. Otro de los elementos que conforman los conjuntos borrosos son las **particiones borrosas**. También tenemos que definir el **conjunto de partición borrosa**, que es un conjunto de conjuntos borrosos. Concretamente, es un conjunto de todos los conjuntos que se han definido para una determinada variable.

Sigamos con el mismo ejemplo. Para la variable «temperatura» podríamos tener tres conjuntos borrosos. Estos serían «cálido», «templado» y «frío». Una partición borrosa sería el conjunto de las tres. Estos conjuntos se relacionan en funciones de pertenencia. **Las formas más típicas para estas funciones son la trapezoidal, la triangular y la singleton.**

Por último, hay que definir la **variable lingüística**. Esta variable es aquella que toma valores que son términos del lenguaje natural como poco, mucho o bastante. Estas variables sirven como etiquetas para el conjunto borroso.

Aplicaciones de la Fuzzy Logic

Las aplicaciones de la Fuzzy Logic podemos ampliarlas a los sistemas expertos o podemos desarrollar controladores borrosos. Algún ejemplo de controlador borroso sería el controlador de un termostato. Lo primero que tenemos que tener en cuenta para definir un controlador borroso es que hay que definir las particiones. Generalmente, estas particiones tienen que ser completas. Es decir, tienen que cubrir todo el rango de valores posible para el problema que pretendemos resolver.

Por otro lado, también es habitual definir un solapamiento entre variables de entre un 20% o un 30%. En el ejemplo de las temperaturas, este solapamiento se encontraría, por ejemplo, en los 19 grados. Los 19 grados pueden ser una temperatura templada pero también podrían acercarse a ser una temperatura cálida.

1.5.- Operaciones simples sobre los conjuntos difusos.

Como en la lógica clásica, en la lógica difusa se pueden aplicar diferentes funciones básicas para trabajar con los conjuntos definidos. En este punto, sólo vamos a hablar de las tres operaciones base de la lógica: La unión, la intersección y el inverso. Desde un punto de vista subjetivo, se puede asegurar que el trabajar con estas operaciones sobre estos conjuntos es más fácil que trabajar sobre lógica clásica.

Operaciones numéricas

Las operaciones ya descritas, pueden ser realizadas de forma numérica, por ejemplo, tenemos los conjuntos µA (x) y µB (x) representados por:

$$\mu_A(X) = \left\{\frac{.4}{1} + \frac{.7}{2} + \frac{.3}{3} + \frac{.8}{4} + \frac{.5}{5} + \frac{.2}{6} + \frac{.1}{7} + \frac{.8}{8} + \frac{.7}{9} + \frac{.3}{10}\right\}$$

$$\mu_B(X) = \left\{\frac{.8}{1} + \frac{.3}{2} + \frac{.9}{3} + \frac{.6}{4} + \frac{.4}{5} + \frac{.1}{6} + \frac{.7}{7} + \frac{.6}{8} + \frac{.5}{9} + \frac{.1}{10}\right\}$$

A partir de los conjuntos anteriores, podemos obtener la unión de ambos:

$$\mu_C(X) = \mu_A(X)\ U\ \mu_B(X) = \left\{\frac{.8}{1} + \frac{.7}{2} + \frac{.9}{3} + \frac{.8}{4} + \frac{.5}{5} + \frac{.2}{6} + \frac{.7}{7} + \frac{.8}{8} + \frac{.7}{9} + \frac{.3}{10}\right\}$$

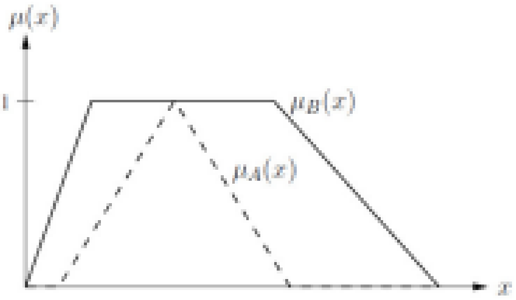
Y en la misma forma, podemos obtener la intersección:

$$\mu_C(X) = \mu_A(X)\ \cap\ \mu_B(X) = \left\{\frac{.4}{1} + \frac{.3}{2} + \frac{.3}{3} + \frac{.6}{4} + \frac{.4}{5} + \frac{.1}{6} + \frac{.1}{7} + \frac{.6}{8} + \frac{.5}{9} + \frac{.1}{10}\right\}$$

Como se puede observar en los ejercicios realizados, las operaciones de los conjuntos difusos son de gran sencillez y simplicidad.

1.5.1.- Inclusión difusa.

Inclusión [inclusión] Un conjunto difuso está incluido en otro si su función de pertenencia toma siempre valores más pequeños: $A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x), \forall x \in X$



Si el universo es finito, podemos relajar la condición de inclusión para medir el grado en el que un conjunto difuso está incluido en otro (Kosko, 1992):

$$S(A,B) = \frac{1}{card(A)}\left(card(A) - \sum_{x \in X} max\{0, A(x) - B(x)\}\right)$$

El cardinal, en el sentido de Zadeh, como suma de los grados de pertenencia:

$$card(A) = \sum_{x \in X} A(x)$$

EJEMPLO A = 0.2/1+ 0.3/2+ 0.8/3+ 1/4 + 0.8/5 card(A) = 3.1 B = 0.2/2+ 0.3/3+ 0.8/4+ 1/5 + 0.1/6 card(B) = 2.4 S(A,B) = 1/3.1 (3.1 – (0.2+0.1+0.5+0.2+0+0)) = 2.1 / 3.1 = 0.68 S(B,A) = 1/2.4 (2.4 – (0+0+0+0+0.2+0.1)) = 2.1 / 2.4 = 0.88

1.5.2.- Igualdad difusa.

Al igual que en la teoría de conjuntos tradicional, a los conjuntos difusos se les asocian ciertas propiedades. Los conjuntos difusos que generalmente se utilizan en aplicaciones prácticas son convexos, es decir,

b,a U; [1,0]: (a (1)b) min((a), (b)) ∀ ∈ ∀λ ∈ μA λ + − λ ≥ μA μA

Existen muchas formas de construir un conjunto difuso convexo, como por ejemplo los que se ven en las Figuras 1.4 y 1.5. Para aplicaciones de control en tiempo real se han preferido funciones sencillas, o computacionalmente más rápidas. Ejemplos al caso son las funciones triangulares y trapezoidales, que podemos ver en la Figura 1.7, en tanto que en la Figura 1.6 se ve un ejemplo de conjunto no-convexo.

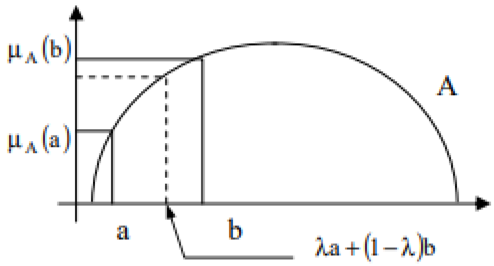


Figura 1.4. Ejemplo de Conjunto Convexo.

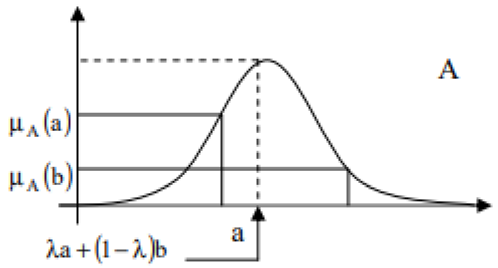


Figura 1.5. Conjunto Convexo.

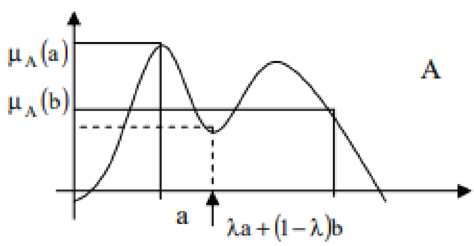


Figura 1.6. Conjunto No Convexo

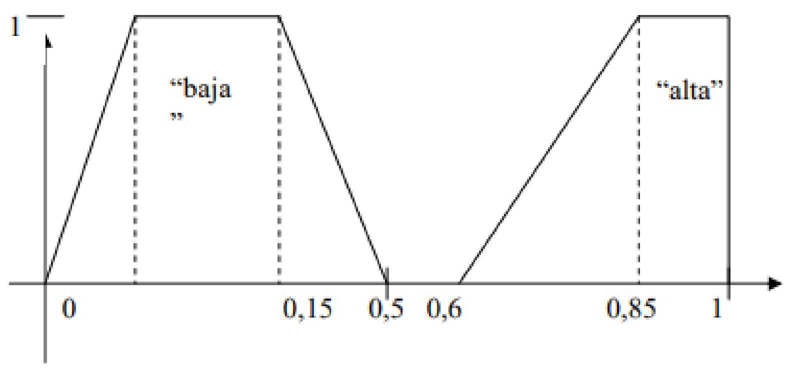


Figura 1.7. Ejemplos de conjuntos difusos "baja" y "alta" utilizando funciones convexas de tipo trapezoidal.

1.5.3.- Intersección difusa.

Intersección

La intersección de dos conjuntos difusos μA (x) y μB (x), puede interpretarse como el valor mínimo en el punto (x) de cada uno de ellos tal como se describe a continuación.

$$\mu_C(X) = \min(\mu_A(X),\ \mu_B(X)) = \mu_A(X)\ \cap\ \mu_B(X)$$

Esta función también es representada por la expresión lógica AND.

Suponemos que tenemos los conjuntos μA (x) y μB (x) que se muestran en la figura 1 y a partir de ellos vamos a obtener:

$$\mu_C(X) = \mu_A(X)\ \cap\ \mu_B(X)$$

Quedando como resultado el conjunto verde μC (x) de la figura 3:

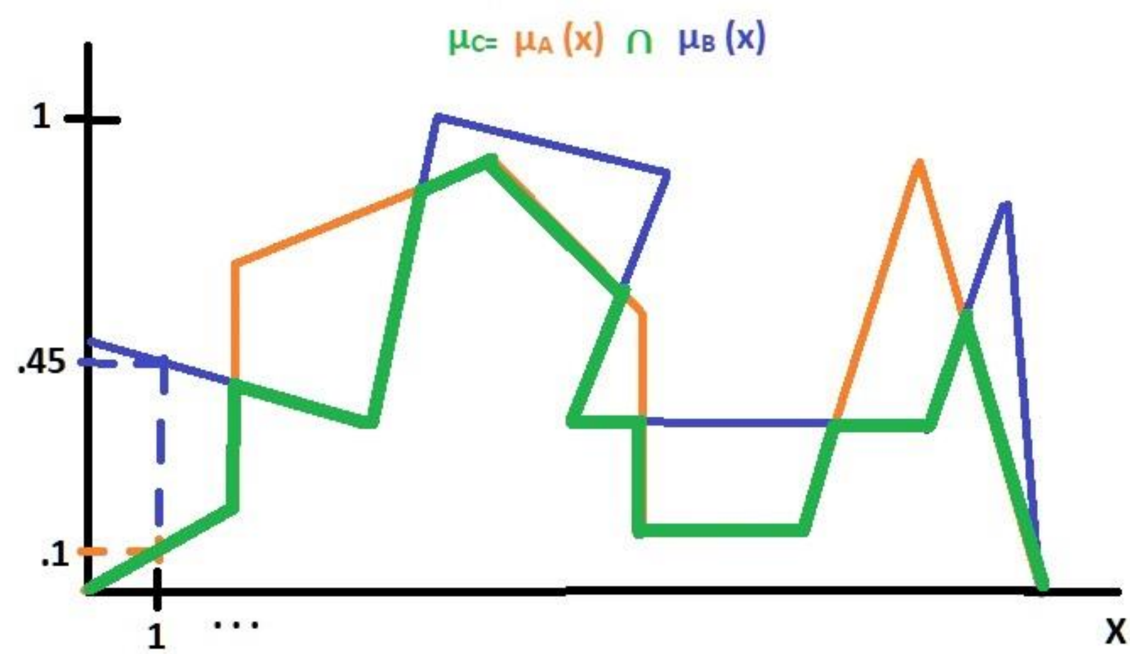


Fig. 3.- Intersección de los conjuntos μA (x) y μB (x).

Como podemos observar en la figura 3, se fueron comparando en punto a punto los dos conjuntos, y de cada par de puntos comparados, se fue marcando el valor mínimo.

1.5.4.- Unión difusa.

Unión

La unión de dos conjuntos difusos μA (x) y μB (x), puede interpretarse como el valor máximo en el punto (x) de cada uno de ellos tal como se describe a continuación.

$$\mu_C(X) = \max\big(\mu_A(X), \mu_B(X)\big) = \mu_A(X) \cup \mu_B(X)$$

Esta función también es representada por la expresión lógica OR.

Suponemos que tenemos los conjuntos μA (x) y μB (x) que se muestran en la figura 1:

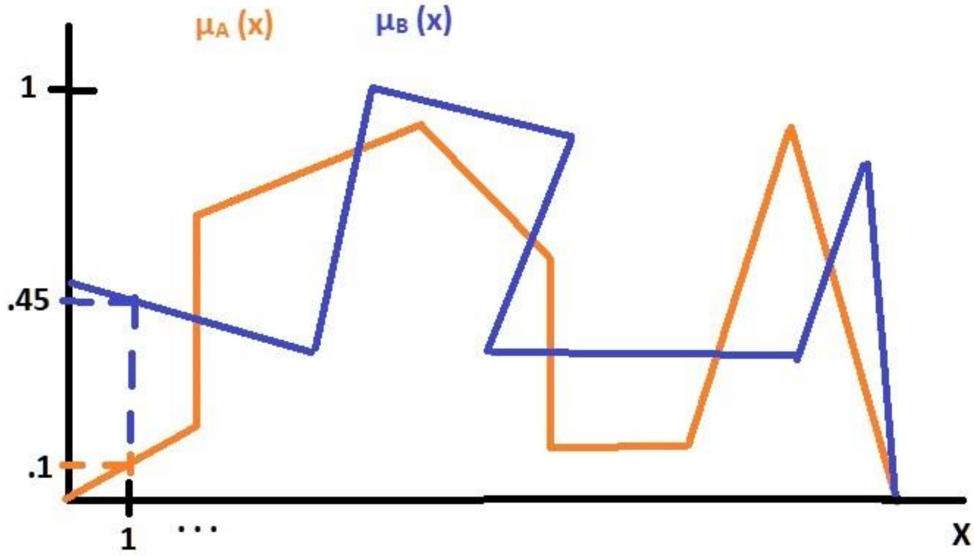


Fig. 1.- Conjuntos μA (x) y μB (x), utilizados como base para las operaciones de unión e intersección.

Ahora, a partir de ellos vamos a obtener:

$$\mu_C(X) = \mu_A(X)\ U\ \mu_B(X)$$

Quedando el conjunto verde μC (x) de la siguiente figura:

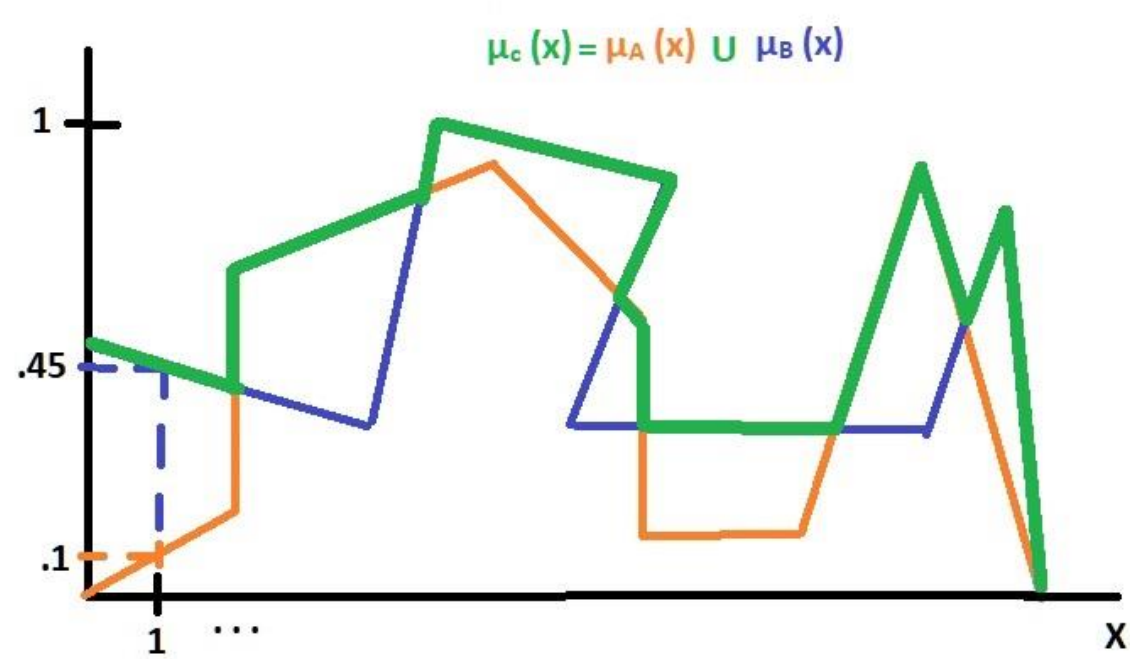


Fig. 2.- Unión de los conjuntos μA (x) y μB (x).

Como podemos observar en la figura 2, se fueron comparando en punto a punto los dos conjuntos, y de cada par de puntos comparados, se fue marcando el valor máximo.

1.5.5.- Negación difusa.

Inverso

El inverso de un conjunto difuso μA (x), puede obtenerse a través de la operación μB (x)=1- μA (x).

Suponemos que tenemos el conjunto μA (x) que se muestran en la figura 4 y a partir del conjunto anaranjado μA (x), obtenemos μB (x) =1- μA (x).

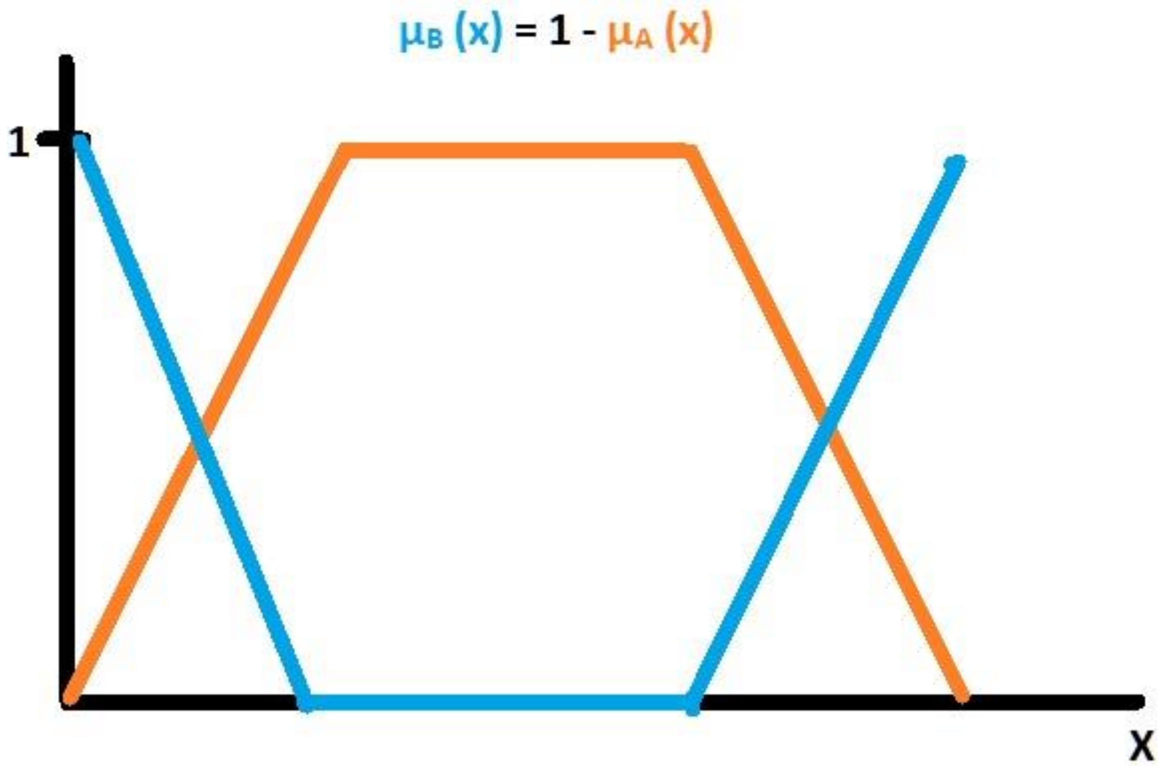


Fig. 4.- Representación del inverso del conjunto difuso μA (x).

UNIDAD II

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

2.1.- Conmutatividad.

El orden de los factores no varía el producto.

Vamos a ver un ejemplo de la propiedad conmutativa.

$$10 \times 3 = 3 \times 10$$
$$30 = 30$$

El resultado de multiplicar 10 x 3 será igual que al multiplicar 3 x 10. Aunque cambiemos el orden de los factores el resultado seguirá siendo 30.

a)A U B = B U A

b)A ∩ B = B ∩ A

2.2.- Asociatividad.

El modo de agrupar los factores no varía el resultado de la multiplicación.

Pongamos un ejemplo de la propiedad asociativa de la multiplicación.

$$(3 \times 2) \times 5 = 3 \times (2 \times 5)$$
$$6 \times 5 \qquad 3 \times 10$$
$$30 = 30$$

En este caso, como mostramos en la imagen, nos dará el mismo resultado si multiplicamos 3 x 2 y después lo multiplicamos por 5, que si multiplicamos 2 x 5 y después lo multiplicamos por 3.

a)A U (B U C)=(A U B) U C

b)A ∩ (B ∩ C)= (A ∩ B) ∩ C

2.3.- Distributividad.

La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos.

Pongamos un ejemplo: 2 x (3 + 5)

$$2 \times (3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$$

Según la propiedad distributiva 2 x (3 + 5) será igual a 2 x 3 + 2 x 5

Comprobemos si esto es cierto.

2 x (3 + 5) = 2 x 8 = 16

2 x 3 + 2 x 5 = 6 + 10 = 16

Ambas nos dan como resultado 16, por lo que queda demostrada la propiedad distributiva de la multiplicación.

Sacar factor común

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva. Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

Pongamos un ejemplo de sacar factor común. Si tenemos la operación (2 x 7) + (3 x 7), que tiene como factor común el 7, podríamos transformar esta operación en 7 x (2 + 3)

$$(2 \times 7) + (3 \times 7) = 7 \times (2+3)$$

Comprobemos que da el mismo resultado:

(2 x 7) + (3 x 7) = 14 + 21 = 35

7 x (2 + 3) = 7 x 5 = 35

Por lo tanto queda demostrada esta propiedad de la multiplicación.

Si quieres repasar lo que hemos visto en este post, aquí te dejo estos vídeos tutoriales sobre las propiedad conmutativa, la asociativa y la distributiva.

a)A ∩ (B U C)= (A∩B) U (A∩C)
b)A U (B ∩ C)= (AUB) ∩ (A U C)

2.4.- Involución.

Esta operación tiene la propiedad de involución, (dos negaciones implican su propia anulación): Aplicado a un sistema digital binario con dos elementos, el 0 y el 1, nos dice que si una variable "a"=0, su complemento es siempre =1, y al revés, si "a"=1, su complemento = 0.

Doble negación de una proposición es una afirmación.

$\sim(\sim p)\equiv p$

Ley de **doble negación**: Dentro de un sistema de lógica clásica, la doble negación, esto es, la negación de la negación de una proposición *p*, eslógicamente equivalente a *p*. Expresado simbólicamente, $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$. En lógica intuicionista, una proposición implica su doble negación, pero no al revés. Esto marca una importante diferencia entre la negación clásica e intuicionista. Algebraicamente, la negación clásica es llamada una involución de periodo dos.

Sin embargo, en lógica intuicionista, sí tenemos la equivalencia entre $\neg\neg\neg p$ y $\neg p$. Es más, en el caso proposicional, una oración es demostrable de forma clásica, si su doble negación es demostrable de manera intuicionista. Este resultado es conocido como el teorema de Glivenko.

2.5.- Idempotencia.

En matemática y lógica, la idempotencia es la propiedad para realizar una acción determinada varias veces y aun así conseguir el mismo resultado que se obtendría si se realizase una sola vez. Un elemento que cumple esta propiedad es un elemento idempotente, o un idempotente. De esta manera, si un elemento al multiplicarse por sí mismo sucesivas veces da él mismo, este elemento es idempotente. Por ejemplo, los dos únicos números reales que son idempotentes, para la operación producto (·), son 0 y 1. (0 ·0=0,1 ·1=1).

Cuando se está frente a una disyunción o una conjunción cuyos dos miembros están constituidos por la misma proposición, se puede prescindir de uno de ellos y quedarse con el otro, como conclusión, ya que en realidad uno y otro son equivalentes. Es decir, si las dos opciones a elegir en realidad son la misma, la conclusión es esa opción. Consideremos el siguiente ejemplo:

O tomas una paleta de limón o tomas una paleta de limón.
Tomas una paleta de limón.

Se representa:

(1) E V E

(2) E   DP 1

Y podemos decir que: E V E ßà E

"DP" o “idem” es el signo para aludir a la ley de la idempotencia, también conocida como ley de la simplificación disyuntiva (cuando se aplica a una disyunción).

Ejercicio

I. Resuelve los siguientes silogismos haciendo uso de la simplificación disyuntiva y de la ley del silogismo disyuntivo:

1. (1) A V B

(2) ¬B à C

(3) Aà C

2. (1) ¬R à ¬T

(2) Q V ¬R

(3) Qà ¬T

3. (1) A à ¬B

(2) Cà ¬B

(3) A V C

4. (1) ¬W à T

(2) D V ¬W

(3) D à T

2.6.- Leyes de Morgan.

Las leyes de De Morgan nos permiten reordenar o simplificar expresiones booleanas, así como la conversión entre compuertas AND y OR.

Primera ley de Morgan

El complemento de un producto de "n" variables es igual a la suma de los complementos de "n" variables. En otras palabras, el complemento de dos o más variables a las que se les aplica la operación AND es equivalente a aplicar la operación OR.

$X \cdot Y = X + Y$

Ejemplo primera ley

Suponiendo que tenemos la siguiente expresión:

$A \cdot B \cdot C \cdot D$

Considerando A=1, B=0, C=1 y D=0.

Aplicando la primera ley de De Morgan:

$A \cdot B \cdot C \cdot D = A + B + C + D$

Al sustituir los valores correspondientes de las letras obtenemos:

$1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1 + 0 + 1 + 0$

Al realizar la multiplicación del lado izquierdo de la ecuación obtenemos "0" negado.

$0 = 1 + 0 + 1 + 0$

Aplicamos la negación o inverso y el resultado sería:

$1 = 0 + 1 + 0 + 1$

Ahora bien al sumar los números lógicos tenemos que 1 + 1 = 1 por lo tanto:

$1 = 1$

Segunda ley de Morgan

El complemento de una suma de "n" variables es igual al producto de los complementos de "n" variables. En otras palabras, el complemento de dos o más variables a las que se les aplica la operación OR es equivalente a aplicar la operación AND.

$X + Y = X \cdot Y$

Ejemplo segunda ley

Suponiendo que tenemos la siguiente expresión:

$A + B + C + D$

Considerando A=1, B=0, C=1 y D=0

Aplicando el segundo teorema de De Morgan:

$A + B + C + D = A \cdot B \cdot C \cdot D$

Al sustituir los valores correspondientes de las letras obtenemos:

$1 + 0 + 1 + 0 = 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0$

Al realizar la suma del lado izquierdo de la ecuación obtenemos "1" negado, recordemos que 1 + 1 = 1.

$1 = 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0$

Aplicamos la negación o inverso y el resultado sería:

$0 = 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1$

Ahora bien, al multiplicar el lado derecho de la ecuación obtenemos:

$0 = 0$

Compuertas obtenidas con el teorema de Morgan

Con esto demostramos las leyes de De Morgan, con estas dos leyes es posible llegar a una gran variedad de conclusiones, por ejemplo:

Se puede obtener una compuerta **AND** al utilizar una compuerta **NOR** con sus entradas negadas:

$A \cdot B = A + B$

Se puede obtener una compuerta **OR** al utilizar una compuerta **NAND** con sus entradas negadas:

$A + B = A \cdot B$

Se puede obtener una compuerta **NAND** al utilizar una compuerta **OR** con sus dos entradas negadas, como indica la primera ley de De Morgan:

$A \cdot B = A + B$

Se puede obtener una compuerta **NOR** al utilizar una compuerta **AND** con sus entradas negadas, como indica la segunda ley de De Morgan:

$A + B = A \cdot B$

2.7.- Absorción.

Se le llamada ley de "absorción" porque da la apariencia de que Q es absorbido por P

Como decíamos anteriormente la P es dominante ante las demás preposiciones por la función de los (...) por tal motivo las preposiciones son iguales a: P

- p v (p ^ q) = p
- p ^ (p v q) = p

Si probamos la ley de absorción del siguiente ejemplo obtenemos los siguientes resultados.

Para reconocer una preposición de absorción es sencillo, solo debemos fijarnos en los conectores lógicos, el segundo conector debe de ser opuesto al primero.

Demostración por tabla de verdad

P	Q	$P \to Q$	$P \to P \wedge Q$
v	v	v	V
v	F	F	F
F	v	v	v
F	F	v	v

Prueba formal

Proposición	*Derivación*
$P \to Q$	Implicación
$\neg P \vee Q$	Implicación material
$\neg P \vee P$	Ley del tercero excluido
$(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q)$	Conjunción
$\neg P \vee (P \wedge Q)$	Distribución inversa
$P \to (P \wedge Q)$	Implicación material

2.8.- Fórmulas de equivalencia.

Dos fórmulas lógicas son equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Diremos que dos proposiciones P y Q son lógicamente equivalentes si es una tautología, es decir, si las tablas de verdad de P y Q son iguales.

Equivalencia lógica en la ley asociativa de la conjunción

A modo ilustrativo demostraremos, a continuación, que, en virtud de la ley asociativa de la conjunción, la fórmula p(qr) es lógicamente equivalente a (pq)r.

Para ello no hay más que hacer la tabla de verdad de cada una de esas expresiones y comprobar si, en efecto, todas sus interpretaciones son iguales para la conectiva dominante.

Equivalencia lógica en la ley asociativa de la disyunción

Te proponemos que rellenes la siguiente tabla con “Vs” y “Fs” donde proceda para comprobar que, en virtud de la ley asociativa de la disyunción, la fórmula p(qr) es equivalente a (pq)r.

Si dos fórmulas lógicas son equivalentes entonces la fórmula que se obtiene al operarlas con la bicondicional es una tautología.

EJEMPLO

Equivalencia lógica en la ley asociativa de la conjunción

A modo ilustrativo demostraremos, a continuación, que, en virtud de la ley asociativa de la conjunción, la fórmula p(qr) es lógicamente equivalente a (pq)r.

Para ello no hay más que hacer la tabla de verdad de cada una de esas expresiones y comprobar si, en efecto, todas sus interpretaciones son iguales para la conectiva dominante.

Equivalencia lógica en la ley asociativa de la disyunción

Te proponemos que rellenes la siguiente tabla con “Vs” y “Fs” donde proceda para comprobar que, en virtud de la ley asociativa de la disyunción, la fórmula p(qr) es equivalente a (pq)r.

Si dos fórmulas lógicas son equivalentes entonces la fórmula que se obtiene al operarlas con la bicondicional es una tautología.

$$(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r) \qquad \neg p \vee \neg q \vee r$$

p	q	r	¬q	¬p	p → ¬q	¬p ∨ r	(p → ¬q) ∨ (¬p ∨ r)	¬ p ∨ ¬q	¬p ∨ ¬q ∨ r
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

2.9.- Ley de no contradicción.

Ley de contradicción

Ley de la lógica, según la cual dos proposiciones A y A que se niegan (*Negación*) una a la otra no puede ser al mismo tiempo verdaderas. El primero en formular dicha ley fue Aristóteles. El principio de contradicción puede enunciarse también del modo siguiente: la proposición A no puede ser al mismo tiempo verdadera y falsa. Su notación simbólica es: A · A, donde · es signo de *conjunción*, y el trazo encima de los símbolos es signo de negación. El principio de contradicción desempeña un importante papel en el pensar y en el conocer. El razonamiento o la teoría científica en que se den contradicciones formales resultan inconsistentes. El principio de contradicción constituye un reflejo del carácter cualitativamente determinado de los objetos en el pensamiento, refleja el simple hecho de que, si hacemos abstracción del cambio de un objeto, éste no puede poseer al mismo tiempo propiedades que se excluyan mutuamente.

En lógica, la **ley de no contradicción** (**LNC**) (también conocida como **ley de contradicción**, **principio de la no contradicción** (**PNC**), o el **principio de contradicción**) establece que las proposiciones contradictorias no pueden ser ambas verdaderas en el mismo sentido al mismo tiempo, p. gramo. las dos proposiciones "*p es el caso*" y "*p no es el caso*" son mutuamente excluyentes. Formalmente esto se expresa como la tautología ¬(p ∧ ¬p). La ley no debe confundirse con la ley del tercero excluido que establece que al menos uno, "p es el caso" o "p no es el caso" sostiene

Una razón para tener esta ley es el principio de explosión, que establece que cualquier cosa se sigue de una contradicción. La ley se emplea en una prueba *reductio ad absurdum*.

Para expresar el hecho de que la ley no tiene tiempo temporal y evitar equívocos, a veces se modifica la ley para decir "las proposiciones contradictorias no pueden ser ambas verdaderas 'al mismo tiempo y en el mismo sentido' ".

Es una de las llamadas tres leyes del pensamiento, junto con su complemento, la ley del tercero excluido y la ley de la identidad. Sin embargo, ningún sistema de lógica se basa solo en estas leyes, y ninguna de estas leyes proporciona reglas de inferencia, como *modus ponens* o las leyes de De Morgan.

La ley de no contradicción y la ley del tercero excluido crean una dicotomía en el "espacio lógico", donde las dos partes son "mutuamente excluyentes" y "conjuntamente exhaustivo". La ley de la no contradicción es simplemente una expresión del aspecto mutuamente excluyente de esa dicotomía, y la ley del tercero excluido, una expresión de su aspecto conjuntamente exhaustivo.

Interpretaciones

Una dificultad en la aplicación de la ley de no contradicción es la ambigüedad en las proposiciones. Por ejemplo, si no se especifica explícitamente como parte de las proposiciones A y B, entonces *A* puede ser *B* en un momento y no en otro.

En algunos casos, se puede hacer que A y B suenen mutuamente excluyentes lingüísticamente, aunque *A* puede ser en parte *B* y en parte no *B* al mismo tiempo. Sin embargo, es imposible predicar de la misma cosa, al mismo tiempo y en el mismo sentido, la ausencia y la presencia de la misma cualidad fija.

Heráclito

Según Platón y Aristóteles, *se dice* que Heráclito negó la ley de la no contradicción. Esto es bastante probable si, como señaló Platón, la ley de no contradicción no se cumple para cambiar las cosas en el mundo. Si una filosofía del Devenir no es posible sin cambio, entonces (el potencial de) lo que va a devenir ya debe existir en el objeto presente. En "*Nos pisamos y no pisamos los mismos ríos; somos y no somos*", tanto el objeto de Heráclito como el de Platón deben, en algún sentido, ser simultáneamente lo que ahora es y tener el potencial (dinámico) de lo que es. podría convertirse.

tan poco queda de Heráclito' aforismos de los que poco se puede decir con certeza de su filosofía. Parece haber sostenido que la lucha de los opuestos es universal tanto dentro como fuera, por lo tanto, *ambos* existentes opuestos o cualidades deben existir simultáneamente, aunque en algunos casos en diferentes aspectos. "El *camino hacia arriba y hacia abajo es el mismo*" implica que o bien el camino conduce en ambos sentidos, o no puede haber ningún camino en absoluto. Este es el complemento lógico de la ley de no contradicción. Según Heráclito, el cambio y el constante conflicto de los opuestos es el logos universal de la naturaleza.

Protágoras

Solo se puede decir que las percepciones o juicios subjetivos personales son verdaderos al mismo tiempo en el mismo aspecto, en cuyo caso, la ley de no contradicción debe ser aplicable a los juicios personales. El dicho más famoso de

Protágoras es: "*El hombre es la medida de todas las cosas: de las cosas que son, que son, y de las que no son, que no son*". Sin embargo, Protágoras se refería a cosas que son usadas por o de alguna manera relacionadas con los humanos. Esto hace una gran diferencia en el significado de su aforismo. Propiedades, entidades sociales, ideas, sentimientos, juicios, etc. se originan en la mente humana. Sin embargo, Protágoras nunca ha sugerido que el hombre deba ser la medida de las estrellas o el movimiento de las estrellas.

Parménides

Parménides empleó una versión ontológica de la ley de no contradicción para probar que el ser es y para negar el vacío, el cambio y el movimiento. También refutó de manera similar las proposiciones contrarias. En su poema Sobre la naturaleza, dijo:

las únicas rutas de investigación hay para pensar:

el que es y que no puede ser
es el camino de la Persuasión (porque asiste a la verdad)
el otro, que no es y que es correcto que no sea,
esto es un camino totalmente inescrutable
porque no podías saber lo que no es (porque no es ser logrado)

ni puedes señalarlo... Lo mismo es pensar y ser

La naturaleza del 'es' o lo que es en Parménides es un tema muy polémico. Algunos lo han tomado como cualquier cosa que exista, otros como cualquier cosa que sea o pueda ser objeto de investigación científica.

Sócrates

En los primeros diálogos de Platón, Sócrates usa el método eléntico para investigar la naturaleza o definición de conceptos éticos como la justicia o la virtud. La refutación eléctica depende de una tesis dicotómica, que puede dividirse exactamente en dos partes mutuamente excluyentes, de las cuales sólo una puede ser verdadera. Luego Sócrates pasa a demostrar lo contrario de la parte comúnmente aceptada utilizando la ley de no contradicción. Según Gregory Vlastos, el método tiene los siguientes pasos:

El interlocutor de Sócrates afirma una tesis, por ejemplo, "El valor es la resistencia del alma", que Sócrates considera falsos y objetivos para la refutación.

Sócrates asegura el acuerdo de su interlocutor con otras premisas, por ejemplo, "Courage is a fine thing" y "La resistencia ignorante no es algo bueno".

Sócrates argumenta entonces, y el interlocutor está de acuerdo, que estas premisas adicionales implican lo contrario de la tesis original, en este caso, conduce a: "el courage no es la resistencia del alma".

Sócrates afirma entonces que ha demostrado que la tesis de su interlocutor es falsa y que su negación es verdadera.

La síntesis de Platón

La versión de Platón de la ley de no contradicción establece que "*La misma cosa claramente no puede actuar o ser objeto de acción en la misma parte o en relación con la misma cosa al mismo tiempo., de manera contraria*" (La *República* (436b)). En esto, Platón expresa cuidadosamente tres restricciones axiomáticas sobre *acción* o reacción: en la misma parte, en la misma relación, al mismo tiempo. El efecto es crear momentáneamente un estado congelado e intemporal, algo así como figuras congeladas en acción en el friso del Partenón.

De esta manera, logra dos objetivos esenciales para su filosofía. Primero, separa lógicamente el mundo platónico de cambio constante del mundo formalmente conocible de objetos físicos momentáneamente fijos. En segundo lugar, proporciona las condiciones para que se utilice el método dialéctico para encontrar definiciones, como por ejemplo en el *Sofista*. Entonces, la ley de no contradicción de Platón es el punto de partida necesario empíricamente derivado para todo lo demás que tiene que decir.

Por el contrario, Aristóteles invierte el orden de derivación de Platón. En lugar de comenzar con *experiencia*, Aristóteles comienza *a priori* con la ley de no contradicción como el axioma fundamental de un sistema filosófico analítico. Este axioma necesita entonces el modelo fijo y realista. Ahora, comienza con fundamentos lógicos mucho más fuertes que la no contrariedad de la acción de Platón en reacción a las demandas en conflicto de las tres partes del alma.

La contribución de Aristóteles

La fuente tradicional de la ley de no contradicción es la *Metafísica* de Aristóteles donde da tres versiones diferentes.

Ontológica: "Es imposible que la misma cosa pertenezca y no pertenezca a la misma cosa al mismo tiempo y al mismo respecto." (1005b19-20)

Psicológica: "Nadie puede creer que lo mismo puede (al mismo tiempo) ser y no ser." (1005b23-24)

Lógica (también la medieval *Lex Contradictoriarum*): "Lo más cierto de todos los principios básicos es que las proposiciones contradictorias no son verdaderas simultáneamente." (1011b13-14)

Aristóteles intenta varias pruebas de esta ley. Primero argumenta que cada expresión tiene un solo significado (de lo contrario, no podríamos comunicarnos entre nosotros). Esto descarta la posibilidad de que por "ser hombre", "no ser hombre" se significa. Pero "hombre" significa "animal de dos patas" (por ejemplo), y así si algo es un hombre, es necesario (en virtud del significado de 'hombre') que debe ser un animal de dos patas, y por lo tanto es imposible al mismo tiempo para que *no* sea un animal de dos patas. Por lo tanto, "no es posible decir con verdad al mismo tiempo que la misma cosa es y no es un hombre" (*Metafísica* 1006b 35). Otro argumento es que cualquiera que crea algo no puede creer su contradicción (1008b).

¿Por qué no se levanta primero y entra en un pozo o, si encuentra uno, sobre un acantilado? De hecho, parece bastante cuidadoso con los acantilados y pozos.

Avicena

El comentario de Avicena sobre la *Metafísica* ilustra la opinión común de que la ley de no contradicción "y sus similares se encuentran entre las cosas que no requieren nuestra elaboración. &# 34; Las palabras de Avicena para "los obstinados" son bastante graciosas: "él debe ser sometido a la conflagración del fuego, ya que 'fuego' y 'no disparar' son uno. Se le debe infligir dolor a través de golpes, ya que 'dolor' y 'sin dolor' son uno. Y se le debe negar la comida y la bebida, ya que el comer y el beber y la abstención de ambos son uno [y lo mismo]."

Filosofía india

La ley de la no contradicción se encuentra en la antigua lógica india como metarregla en los *Shrauta Sutras*, la gramática de Pāṇini y los *Brahma Sutras* atribuidos a Vyasa. Más tarde fue elaborado por comentaristas medievales como Madhvacharya.

Leibniz y Kant

Leibniz y Kant usaron la ley de no contradicción para definir la diferencia entre proposiciones analíticas y sintéticas. Para Leibniz, los enunciados analíticos se derivan de la ley de no contradicción y los sintéticos del principio de razón suficiente.

Russell

El principio fue declarado como un teorema de lógica proposicional por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* como:

Dialeteísmo

Graham Priest defiende la opinión de que, *bajo ciertas condiciones*, algunas declaraciones pueden ser verdaderas y falsas simultáneamente, o pueden ser verdaderas y falsas en diferentes momentos. El dialteísmo surge de paradojas lógicas formales, como la paradoja del mentiroso y la paradoja de Russell.

Presunta imposibilidad de su prueba o negación

Se alega que la ley de no contradicción no es verificable ni falsable, sobre la base de que cualquier prueba o refutación debe usar la ley misma antes de llegar a la conclusión. En otras palabras, para verificar o falsificar las leyes de la lógica se debe recurrir a la lógica como arma, un acto que se argumenta como contraproducente. Desde principios del siglo XX, ciertos lógicos han propuesto lógicas que niegan la validez de la ley.

Lógicas conocidas como "paraconsistentes" son lógicas tolerantes a la inconsistencia en el sentido de que, de P junto con ¬P, no implica que se siga ninguna proposición. Sin embargo, no todas las lógicas paraconsistentes niegan la ley de la no contradicción y algunas de tales lógicas incluso la prueban.

Algunos, como David Lewis, se han opuesto a la lógica paraconsistente sobre la base de que es simplemente imposible que un enunciado y su negación sean verdaderos en conjunto. Una objeción relacionada es que la "negación" en lógica paraconsistente no es realmente *negación*; es simplemente un operador formador de subcontrario.

2.10.- Ley del tercero excluido.

El principio del tercero excluido es uno de los tres principios fundamentales de la lógica clásica, junto con los principios de identidad y de no contradicción, de los que hemos hablado aquí ya. Aparece en el análisis de los valores de verdad en el presente de los enunciados sobre el futuro realizado por Aristóteles en el *De Interpretatione*. Lo que este principio dice es lo siguiente:

(1) Todo enunciado es o verdadero o falso y no cabe otra posibilidad.

Este principio se formula en lógica proposicional así:

$$A \vee \neg A$$

Principio del tercero excluido formulado en el lenguaje de la lógica proposicional

La lectura de la fórmula en el lenguaje natural es la siguiente: «A o no A». Se trata de una tautología. Este principio es exactamente **el mismo que el principio de bivalencia**, en el cual se basa la lógica clásica. Por ello, desde algunas de las lógicas no clásicas, como las lógicas trivalentes, el principio del tercero excluido no ha sido aceptado. De modo que a continuación veremos algunas de las críticas realizadas a este principio.

Las excepciones de Kant al principio del tercero excluido

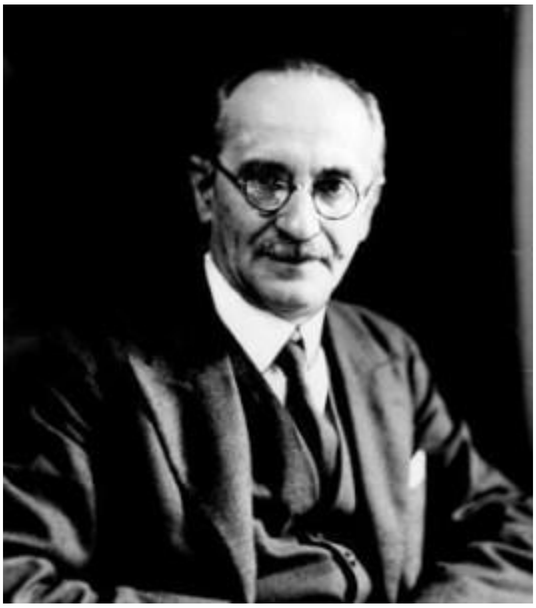
Sin llegar a rechazarlo del todo, **Inmanuel Kant pensó en algunas excepciones a este principio**. En la *Crítica de la razón pura*, en la parte dedicada a las antinomias cosmológicas, el filósofo de Königsberg distingue dos tipos de antítesis: por un lado, la analítica, en la que el principio del tercero excluido tiene plena validez; por otro lado estaría la oposición dialéctica, en la no tiene lugar este principio. Y pone un ejemplo para que quede claro. Este es, más o menos, como sigue.

«El mundo es finito o infinito».

Si aceptamos la validez de la idea de mundo, entonces (2) será una oposición analítica y el principio del tercio excluido nos dice que (2) es evidentemente verdadera. Ahora bien, Kant piensa que la idea de mundo es algo que está más allá del alcance de nuestra intuición sensible, es un noúmeno y, por tanto, carece de validez, por lo que si se ve (2) como una oposición dialéctica, entonces hay que rechazarla ya que, para Kant, el mundo ni existe como un todo finito ni como un todo infinito.

Rechazo del principio del tercero excluido desde las lógicas no clásicas

Muchos lógicos vieron defectuosa la lógica clásica por diversas razones y algunos de estos propusieron lógicas trivalentes, es decir, lógicas en las que las fórmulas de aquellos lenguajes tuvieran tres valores de verdad y no dos. Esto por supuesto conlleva un rechazo del principio de bivalencia y del principio del tercero excluido.



Jan Łukasiewicz

Uno de los que criticaron la lógica bivalente sobre la base de importantes consideraciones filosóficas fue **Jan Łukasiewicz, quien criticó la lógica bivalente llamando la atención sobre el hecho de que esta conllevaba el determinismo y el fatalismo. Łukasiewicz piensa que los sistemas lógicos bivalentes, como el de la lógica clásica, imponen unos esquemas deterministas en nuestro pensamiento**, de modo que en el caso del valor de verdad que tienen en el presente los enunciados sobre el futuro, no deben ser considerados ni verdaderos ni falsos, sino «posibles» o «indeterminados». De este modo, el lógico polaco introdujo la primera lógica no clásica, el sistema Ł3. Este tenía dos conectivas primitivas (negación y condicional) y el cálculo de tablas de verdad del sistema se caracteriza por incluir un tercer valor.

UNIDAD III
CARACTERÍSTICAS DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

3.1.- Soporte.

Soporte de un Conjunto Difuso (*support*)**:** Elementos de ***X*** que pertenecen a ***A*** con grado mayor a **0**: **Soporte(*A*) = {*x*ÎX | *A*(*x*) > 0}.**

3.2.- Altura.

Altura de un Conjunto Difuso (*height*)**:** El valor más grande de su función de pertenencia: **sup*x*ÎX *A*(*x*).**

Altura de un Conjunto Difuso (*height*)**:** El valor más grande de su función de pertenencia: **sup*x*ÎX *A*(*x*).**

3.3.- Punto de cruce.

ADIMOT es la herramienta integral de gestión inteligente de la Movilidad desarrollada por SICE aplicando los más altos niveles tecnológicos y de ingeniería de tráfico.

El sistema permite, además de la gestión centralizada semafórica de la ciudad, la integración y operación de sistemas tales como control de accesos, priorización al transporte público, detección de infracciones (enforcement), información al usuario a través de paneles de mensajes, cámaras de vigilancia del tráfico, etc.

La plataforma facilita el control centralizado total de la gestión de la movilidad de una ciudad, mejorando los niveles de servicios y contribuyendo a la eficiencia energética al disminuir las demoras y proporcionar información detallada en tiempo real a los usuarios.

ADIMOT es una plataforma fundamental para un correcto mantenimiento y operación del sistema, enfocada tanto a operadores como a personal especializado en ingeniería de tráfico.

La plataforma está pensada para cualquier tipología de ciudad, grande o pequeña, ya que se adapta a la resolución concreta de los problemas de movilidad.

Está basada en estándares mundiales en cuanto a protocolos de comunicación con los diferentes equipos de campo, y dispone de un sistema de gestión multialgorítmico en donde pueden establecerse diferentes estrategias de funcionamiento tales como planes horarios, selección dinámica, generación, adaptativo, microrregulación, etc.

3.4.- Corte-alfa.

Este elemento transforma las variables de entrada del modelo (y) en variables difusas. Para esta interfaz se deben tener definidos los rangos de variación de las variables de entrada y los conjuntos difusos asociados con sus respectivas funciones de pertenencia.

3.5.- Corte-alfa estricto.

Contiene las reglas lingüísticas del control y la información referente a las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos. Estas reglas lingüísticas, tienen típicamente la siguiente forma:

Si x1 es A y x2 es B entonces u es C

donde A, B y C son los conjuntos difusos de las variables de entrada x1 y x2, y de la variable de salida u respectivamente.

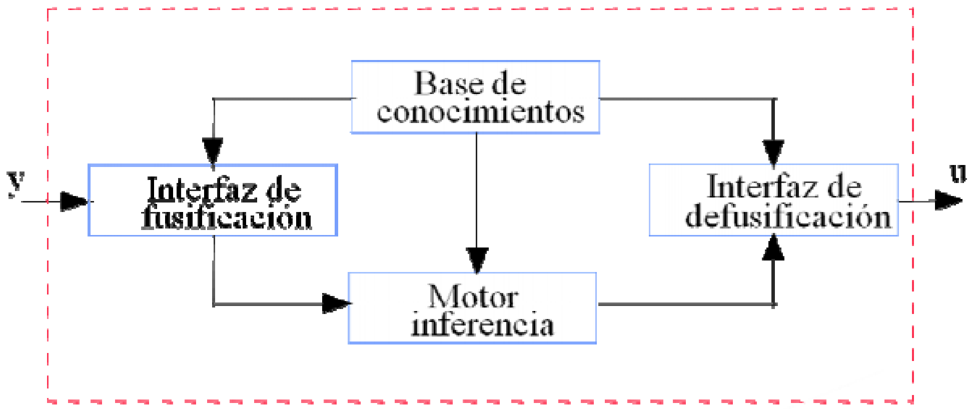
Existen varias formas de derivar las reglas (Lee, 1990), entre las que destacan las basadas en:

- La experiencia de expertos y el conocimiento de ingeniería de control. La base de reglas se determina a partir de entrevistas con el operador o a través del conocimiento de la dinámica del proceso.

- La modelación del proceso. Los parámetros de la base de conocimiento se obtienen a partir de datos de entrada y salida del proceso.

3.6.- Escalamiento difuso.

Estos modelos se basan en un conjunto de reglas heurísticas donde las variables lingüísticas de las entradas y salidas se representan por conjuntos difusos. La siguiente figura muestra las principales componentes de un controlador difuso: interfaz de fusificación, base de conocimiento, motor de inferencia e interfaz de defusificación (Lee, 1990).



3.7.-Impulso difuso.

Realiza la tarea de calcular las variables de salida a partir de las variables de entrada, mediante las reglas del controlador y la inferencia difusa, entregando conjuntos difusos de salida.

Por ejemplo, dada una base de conocimiento con n reglas del tipo:

Si u1 es Ai y u2 es Bi entonces y es Ci

La secuencia de cálculos que realiza el motor de inferencia incluye:

- Determinar el grado de cumplimiento Wi de cada regla a partir de los grados de pertenencia de las variables de entrada obtenidos en la etapa de fusificación, es decir,

Wi = min(uAi ,uBi)

debido a que las premisas de la reglas están unidos por operadores AND, definidos como la intersección de conjuntos difusos.

- Para cada regla se tiene una consecuencia "y es Ci", que tiene asociado una función de pertenencia uCi . Por lo tanto, se tiene un conjunto de salida C'i , cuya función de pertenencia es:

uC'i = min (Wi ,uCi)

donde Wi es el grado de cumplimiento para la regla i.

- Para evaluar el conjunto total de reglas, se unen los conjuntos difusos C'i resultantes de cada regla, generándose un conjunto de salida con la siguiente función de pertenencia:

u u i = 1,...,n C' C'i = max( )

De esta forma, se obtiene una salida difusa del controlador, con una función de pertenencia uC'.

3.8.- Convexidad.

Antes de definir propiamente lo que es un conjunto convexo, resulta conveniente recordar algunos conceptos previos bien conocidos. Así por ejemplo:

Definición 1.1. Se dice que un vector x de R n es una combinación lineal de los vectores x1, . . . , xk si existen λ1, . . . , λk ∈ R adecuados tales que x = λ1x1 + · · · + λkxk. Además:

– Si los λi verifican λ1 + · · · + λk = 1, entonces se dice que x es una combinación afín de los xi. – Si los λi verifican λi ≥ 0, i = 1, . . . , k, entonces x es una combinación positiva de los xi. – Finalmente, si se verifican ambas condiciones a la vez, esto es, si λ1 + · · · + λk = 1 y λi ≥ 0, i = 1, . . . , k, entonces se dice que x es una combinación convexa de los xi.
Definición 1.2. Se dice que un conjunto K de R n es convexo si, dados dos puntos cualesquiera de K, el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, es decir, si la combinación convexa (1 − λ)x + λy ∈ K para x, y ∈ K y 0 ≤ λ ≤ 1.

Proposición 1.3. Un conjunto K es convexo si, y solo si, cualquier combinación convexa de puntos de K está en K. Otro concepto interesante es el de cono convexo, que podemos definir de la siguiente forma.

Definición 1.4. Un cono (convexo) es un subconjunto A de R n que es convexo, no vacío y tal que, si x está en A, entonces λx también está en A para todo λ ≥ 0.
En definitiva, un subconjunto no vacío A de R n es un cono convexo si es cerrado para la suma y el producto por números reales no negativos.

3.9.- Producto cartesiano.

Es una relación entre dos o más conjuntos difusos. Sea A un conjunto difuso en el universo X y B un conjunto difuso en el universo Y, entonces, el producto cartesiano entre los conjuntos difusos A y B resulta en una relación difusa R, contenida dentro del espacio de producto cartesiano:

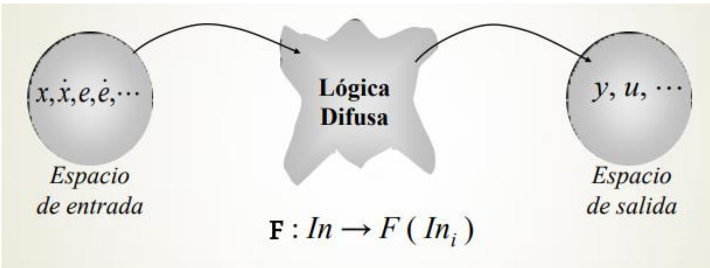
$$A \times B = R \subset X \times Y$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \times B}(x, y) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)$$

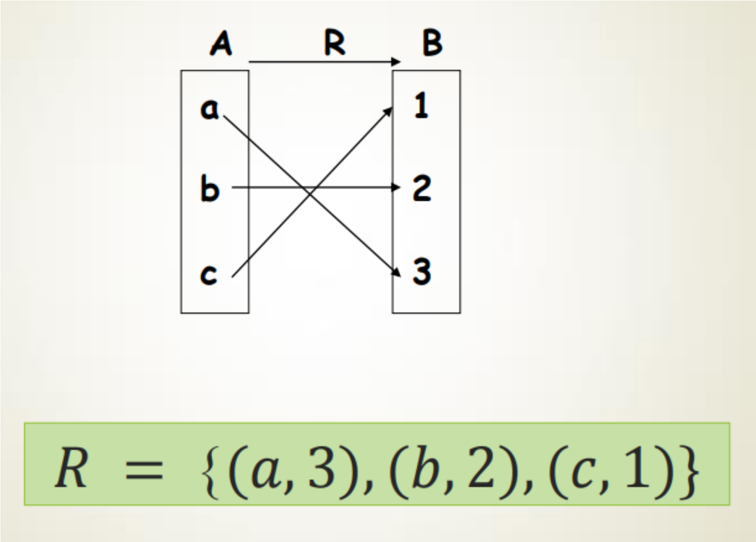
3.10.- Relaciones difusas.

El concepto de relación difusa es similar al de la matemática clásica. La diferencia radica en el grado de pertenencia.

La relación difusa es una transformación que mapea de un espacio de entrada no difuso (llamado universo de discurso) a un espacio de salida llamado conjunto difuso.



Asociado a cada elemento de la relación.



3.11.- Composición.

Este elemento provee salidas discretas y determinísticas a partir de los conjuntos difusos C' obtenidos como resultado de la inferencia.

Existen diferentes métodos de defusificación, algunos de los cuales se describen a continuación:

- Método del máximo. La salida corresponde al valor para el cual la función de pertenencia uC' alcanza su máximo.

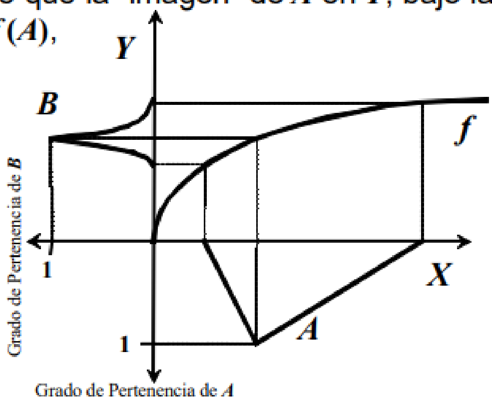
- Media del máximo. La salida es el promedio entre los elementos del conjunto C' que tienen un grado de pertenencia máximo.

- Centro de área. Genera como salida el valor correspondiente al centro de gravedad de la función de pertenencia del conjunto de salida C'.

3.12.- Principio de extensión.

- **Principio de Extensión** (*Extension Principle*): Usado para transformar conjuntos difusos, que tengan iguales o distintos universos, según una función de transformación en esos universos.
  - Sean X e Y dos conjuntos y f una función de transformación de uno en otro: $f: X \rightarrow Y$
  - Sea A un conjunto difuso en X.
  - El **Principio de Extensión** sostiene que la "imagen" de A en Y, bajo la función f es un conjunto difuso $B=f(A)$, definido como:

    $$B(y) = \sup \{A(x) \mid x \in X, y=f(x)\}$$
  - Ejemplo, representado gráficamente:
  - La función $\sup$ se aplica si existen dos o más valores de x que tengan igual valor $f(x)$.
    - Ese caso no ocurre en el ejemplo.



- Se puede **generalizar el Principio de Extensión** para el caso en el que el Universo X sea el producto cartesiano de n Universos:
  - $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$
  - La función de transformación: $f: X \rightarrow Y$, $y = f(x)$, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - El **Principio de Extensión** transforma n Conjuntos Difusos $A_1, A_2, \ldots$ y A_n, de los universos $X_1, X_2, \ldots$ y X_n respectivamente, en un conjunto difuso $B=f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ en Y, definido como:

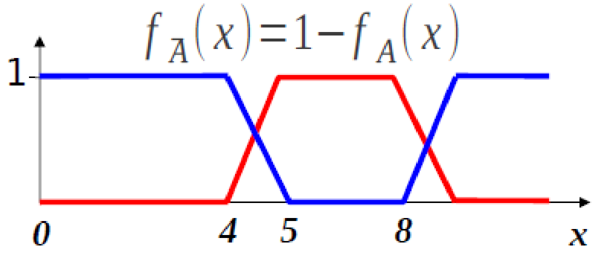
    $$B(y) = \sup \{ \min[A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots, A_n(x_n)] \mid x \in X, y=f(x) \}$$
- **Ejemplos**: Sean X e Y, ambos, el universo de los números naturales.
  - Función **sumar 4:** $y = f(x) = x + 4$:
    - A = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5;
    - $B = f(A)$ = 0.1/6 + 0.4/7 + 1/8 + 0.6/9;
  - Función **suma:** $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:
    - A_1 = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5;
    - A_2 = 0.4/5 + 1/6;
    - $B = f(A_1, A_2)$ = 0.1/7 + 0.4/8 + 0.4/9 + 1/10 + 0.6/11;

3.13.- Operadores alternos en la lógica difusa.

- Dado un conjunto borroso $A=\{x, f_A(x)\}$, el $N(A)$ se interpreta como el **grado** en que x no pertenece a A

$$\textbf{Comp} = N : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

- **Frontera** $N(0)=1$ y $N(1)=0$
- **Monotonía** $N(a) \geq N(b)$ if $a \leq b$
- **Involución** $N[N(a)] = a$

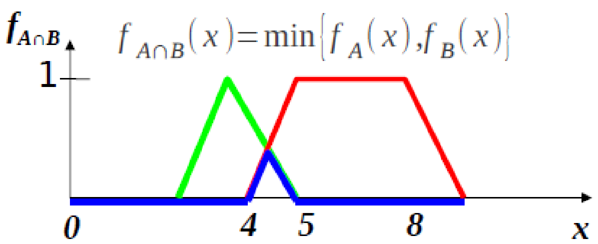


3.13.1.- Normas-T.

Intersection of fuzzy sets ***A*** and ***B***:

$$f_{A\cap B}(x) = T(f_A(x), f_B(x))$$

- **Commutativity:** $T(a, b) = T(b, a)$
- **Associativity:** $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- **Boundary:** $T(a, 0) = 0, T(a, 1) = a$
- **Monotonicity:** $T(a, b) \leq T(a, c)$ if $b \leq c$



Ej. T-norm

- **Intersección estándar:** $\mathrm{Min}(a,b) = \min(a,b)$
- **Producto algebraico:** $\mathrm{Prod}(a,b) = a \cdot b$
- **Diferencia acotada:** $W(a,b) = \max\,(0,\ a+b-1)$
  Lukasiewicz
- **Intersección drástica:**

$$Z(a,b) \begin{cases} a, \text{ si } b=1; \\ b, \text{ si } a=1; \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

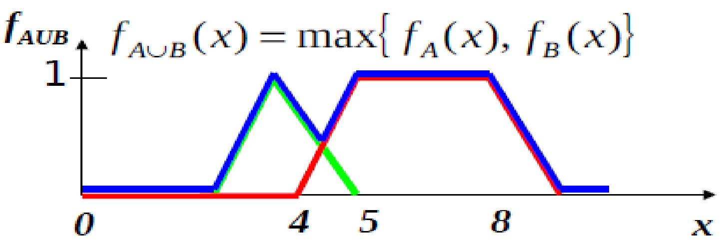
$$Z \le W \le Prod \le Min$$

3.13.2.- Conormas-T.

Union of fuzzy sets $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$

$$f_{A\cup B}(x) = S(f_A(x), f_B(x));\ T\text{-conorm or S-norm}$$

- **Commutativity:** $S(a, b) = S(b, a)$
- **Associativity:** $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
- **Boundary:** $S(a, 1) = 1,\ S(a, 0) = a$
- **Monotonicity:** $S(a, b) \le S(a, c)$ if $b \le c$



Ej. T-conorm

- **Unión estándar:** $\text{Max}(a; b) = \max(a; b)$
- **Suma algebraica:** $\text{Prod}^*(a; b) = a + b - a.b$
- **Suma acotada:** $W^*(a; b) = \min(1; a + b)$
  dual de Lukasiewicz
- **Unión drástica:**

$$Z^*(a,b) = \begin{cases} a, \text{ si } b=0; \\ b, \text{ si } a=0; \\ 1 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{Max} \le \text{Prod}^* \le W^* \le Z^*$$

3.13.3.- Parejas de normas-t y conormas-t típicas.

Para representar la intersección de dos conjuntos borrosos, buscamos funciones del tipo T: [0,1] x [0,1] [0,1], que nos permitan obtener la función de pertenencia del conjunto intersección de la siguiente forma:

$$\mu_{P \cap Q}(x) = T(\mu_P(x), \mu_Q(x)), \ \forall \ x \in X$$

Si queremos que la intersección sea conmutativa, asociativa, que tenga por elemento neutro el conjunto X y sea monótona creciente, se debe verificar:

Desde el punto de vista de las funciones de pertenencia se deben cumplir cuatro propiedades:

- Conmutativa:

  $\mu_{P\cap Q}(x) = \mu_{Q\cap P}(x)$, y por tanto, $T(\mu_P(x), \mu_Q(x)) = T(\mu_Q(x), \mu_P(x))\ \forall x$, con lo que T ha de ser conmutativa.

- Asociativa:

  $\mu_{(P\cap Q)\cap R}(x) = \mu_{P\cap(Q\cap R)}(x)$, entonces, $T(T(\mu_P(x), \mu_Q(x)), \mu_R(x)) = T(\mu_P(x), T(\mu_Q(x), \mu_R(x)))\ \forall x$, por lo que T ha de ser asociativa.

- Elemento neutro el conjunto X:

  $\mu_{P\cap X}(x) = \mu_P(x)$ con lo que $T(\mu_P(x), \mu_X(x)) = T(\mu_P(x), 1) = \mu_P(x)\ \forall x$, siendo el 1 el elemento neutro de T.

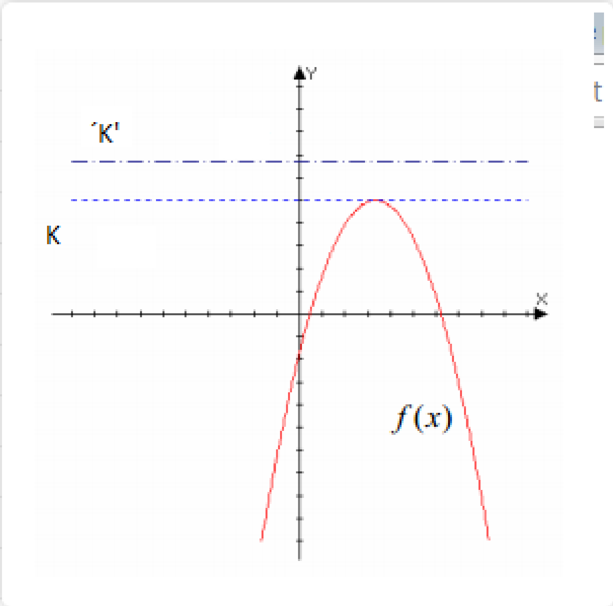
- Monótona creciente:

  Si $\mu_P(x) \leq \mu_Q(x)\ \forall x$ y $\mu_R(x) \leq \mu_S(x)\ \forall x$, entonces, $\mu_{P\cap R}(x) \leq \mu_{Q\cap S}(x)\ \forall x$.

  De esta forma, $T(\mu_P(x), \mu_V(x)) \leq T(\mu_Q(x), \mu_S(x))$ por lo tanto, T ha de ser creciente.

3.13.4.- Producto drástico. producto acotado. suma acotada.

Definición: Decimos que una función está **acotada superiormente** si existe un valor K tal que no es superado por ningún valor de la función, es decir: **f(x)≤K** para todo valor de x perteneciente al dominio, como podemos ver en la siguiente imagen:

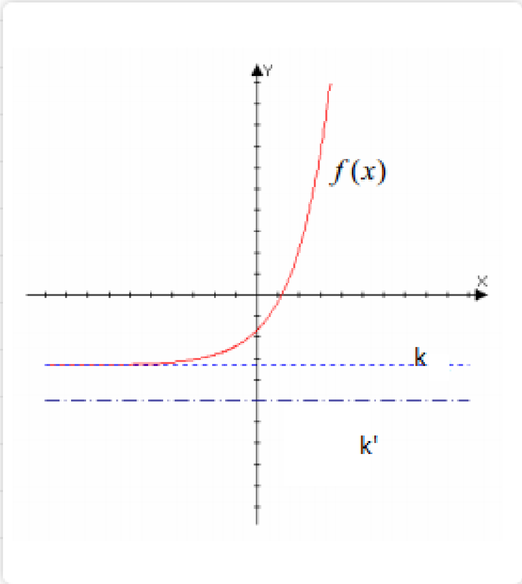


Al valor K se le denomina **cota superior** de f(x). Si lo *interpretamos geométricamente* quiere decir que toda la gráfica de la función se encuentra debajo de la recta y=K, como se puede apreciar en la imagen anterior.

Observación: Cualquier número que sea mayor que K, también es una cota superior de la función f(x). Por ejemplo, K' también es una cota superior de f(x), es decir, forma parte del conjunto de cotas superiores de la función.

FUNCIÓN ACOTADA INFERIORMENTE

Definición: Decimos que una función está **acotada inferiormente** si existe un valor k tal que no hay ningún valor de la función que sea inferior a k, es decir: **f(x)≥k** para todo valor de x perteneciente al dominio, como podemos ver en la siguiente imagen:



Al valor k se le denomina **cota inferior** de f(x). Análo al caso anterior, si lo interpretamos geométricamente, quiere decir que toda la gráfica de la función se encuentra por encima de la recta y=k, como se puede ver en la imagen anterior. *Observación:* De igual forma al caso anterior, cualquier número menor que k, también es una cota inferior de f(x). Es decir, si k'<k, entonces, k' también es cota inferior de f(x), formando parte del conjunto de las cotas inferiores de la función.

FUNCIÓN ACOTADA

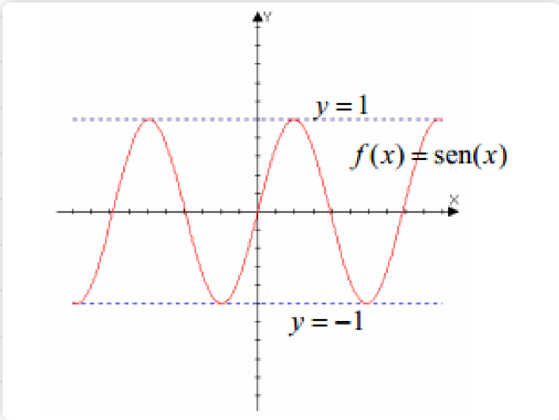
Definición: Decimos que una función está **acotada**, cuando está acotada superior e inferiormente.

En caso contrario, diremos que no está acotada.

Por tanto una función está acotada cuando existe un valor K tal que la gráfica de la función no está por encima de él, y un valor k, tal que la gráfica de la función no está por debajo de él, es decir, **k≤f(x)≤K**, para todo x perteneciente al dominio de la función.

Si lo interpretamos geométricamente, quiere decir que la gráfica de la función se encuentra entre las rectas y=K e y=m.

Ejemplo: *Un ejemplo claro de funciones acotadas son las funciones trigonométricas f(x)= sen x y f(x)= cos x. Ambas tienen como cota superior K=1, y como cota inferior k=-1.*



PROPIEDADES:

Sean f(x) y g(x) dos funciones acotadas, entonces:

1) La función resultante de la suma de las dos, y=f(x)+g(x) también es una función acotada.

2) La función resultante del producto de las dos, y=f(x)·g(x) también es una función acotada.

3) Por tanto el conjunto de funciones acotadas tiene la misma estructura que el conjunto de funciones reales de variable real.

3.14.- Producto einsteniano. suma einsteniana. suma algebraica.

Como los espacios vectoriales que nos interesan suelen estar formados por funciones, las aplicaciones lineales entre ellos transforman unas funciones en otras, y es muy habitual llamar "operadores" a las transformaciones de este tipo. Así pues, un **operador lineal** es, simplemente, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

La continuidad de un operador lineal entre espacios normados puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más útil, para luego comentar las restantes.

Caracterización de la continuidad. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X \tag{1}$$

Demostración. Nótese que, siguiendo una sana costumbre, denotamos de la misma forma a las normas de X e Y, lo que no tiene por qué causar confusión alguna.

Supongamos primero que T es continuo, para comprobar (1). Por ser T continuo en cero, existe $\delta > 0$ tal que, para $u \in X$ con $\|u\| \leqslant \delta$ se tiene $\|T(u)\| \leqslant 1$. Dado $x \in X \setminus \{0\}$, podemos tomar $u = \delta x / \|x\|$, para obtener $\delta \|T(x)\| / \|x\| = \|T(u)\| \leqslant 1$, esto es, $\|T(x)\| \leqslant (1/\delta) \|x\|$. Como esto es válido para todo $x \in X \setminus \{0\}$, y obvio para $x = 0$, tenemos (1) con $M = 1/\delta$.

Recíprocamente, si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando (1), para cualesquiera $u, v \in X$ se tiene claramente $\|T(u) - T(v)\| \leqslant M \|u - v\|$, luego T es una aplicación lipschitziana de X en Y, de donde se deduce la continuidad uniforme de T, y por tanto su continuidad. ■

Conviene destacar toda la información obtenida en la demostración anterior, que no está recogida en el enunciado. Para ello fijamos un operador lineal $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios normados.

En la primera parte de la demostración anterior, para probar (1), no se usa la continuidad de T en todo punto de X, sino tan sólo la continuidad en cero. Así pues, si T es continuo en cero, deducimos que T es continuo en todo punto de X. Pero además, si suponemos que T es continuo en un punto cualquiera $x_0 \in X$, de la igualdad $T(x) = T(x_0 + x) - T(x_0)$, válida para todo $x \in X$, deducimos claramente que T es continuo en cero, y por tanto en todo punto de X. En resumen, si un operador lineal entre espacios normados no es continuo, entonces no puede ser continuo en ningún punto del espacio de partida.

Por otra parte, de la condición (1), no sólo hemos deducido que T es continuo, sino que es una aplicación lipschitziana, luego uniformemente continua. Así pues, la continuidad de un operador lineal entre espacios normados equivale a su continuidad uniforme, que a su vez equivale a que el operador sea una aplicación lipschitziana. La linealidad es esencial para que se verifique esta equivalencia, pues incluso en el caso $X = Y = \mathbb{R}$ conocemos abundantes ejemplos de funciones continuas de X en Y que no son uniformemente continuas, así como de funciones uniformemente continuas que no son lipschitzianas.

En otro orden de ideas, es natural decir que una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$ cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y. Si nuestro operador lineal T es continuo, la condición (1) nos dice que T está acotado en cada conjunto acotado $A \subset X$, o si se quiere, que T preserva la acotación. En efecto, si $K \in \mathbb{R}_0^+$ verifica $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$, de (1) se deduce obviamente que $\|y\| \leqslant MK$ para todo $y \in T(A)$.

Recíprocamente, si T preserva la acotación, en particular T estará acotado en la bola unidad de X, es decir, existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|T(u)\| \leqslant M$ para todo $u \in X$ que verifique $\|u\| \leqslant 1$. Dado $x \in X$, tenemos $x = \|x\| u$ con $u \in X$ y $\|u\| \leqslant 1$, luego $\|T(x)\| = \|x\| \|T(u)\| \leqslant M \|x\|$, y hemos probado (1), que equivale a la continuidad de T. Así pues, T es continuo si, y sólo si, está acotado en cada subconjunto acotado de X, para lo cual es suficiente que esté acotado en la bola unidad de X. Es por esto que a los operadores lineales continuos entre espacios normados se les suele llamar también **operadores lineales acotados**.

Comentemos un caso particular del resultado anterior que ya conocíamos. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X, la topología de $\|\cdot\|_1$ contiene a la de $\|\cdot\|_2$ si, y sólo si, la identidad en X, que obviamente es un operador lineal, es continua como aplicación de X con la norma $\|\cdot\|_1$, en X con $\|\cdot\|_2$. El resultado anterior nos dice que esto ocurre si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|x\|_2 \leqslant M \|x\|_1$ para todo $x \in X$, que es exactamente lo que probamos en su momento, como paso previo para el criterio de equivalencia entre dos normas.

3.14.1.- Producto de hamacher. suma de hamacher.

Observemos que la linealidad y la continuidad son propiedades que se conservan al hacer sumas de funciones y productos por escalares. Para ello, dado un conjunto no vacío X y un espacio vectorial Y, consideremos el espacio vectorial Y^X de todas las funciones de X en Y, con las operaciones puntuales, es decir, para $f,g \in Y^X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in X$$

Cuando X también es un espacio vectorial, es evidente que $f+g$ y λf son lineales, siempre que f y g lo sean, es decir, los operadores lineales de X en Y forman un subespacio de Y^X.

Algo similar ocurre con la continuidad. Si X es ahora un espacio topológico e Y un espacio normado, la continuidad de la suma y el producto por escalares de Y implican claramente que, si $f,g \in Y^X$ son funciones continuas y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $f+g$ y λf también son continuas. Vemos por tanto que las funciones continuas de X en Y también forman un subespacio de Y^X.

Pues bien, si X e Y son espacios normados, denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y que, por lo dicho anteriormente, es un subespacio de X^Y, por ser la intersección de dos subespacios. Por supuesto, las operaciones en el espacio vectorial $L(X,Y)$ siguen siendo las puntuales, es decir, para $T,S \in L(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$(T+S)(x) = T(x)+S(x) \qquad \text{y} \qquad (\lambda T)(x) = \lambda T(x) \qquad \forall x \in X$$

Fijado ahora un operador $T \in L(X,Y)$, y usando la caracterización de la continuidad antes obtenida, cabe pensar en hacer que la desigualdad que aparece en (1) sea la mejor posible, es decir, en considerar la mínima constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ que la verifique. Observamos claramente que, para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \|T(u)-T(v)\| \leqslant M\|u-v\| \quad \forall u,v \in X$$

luego la mínima constante que buscábamos no es otra que la contante de Lipschitz de T.

Adelantando acontecimientos, definimos la **norma de un operador** $T \in L(X,Y)$ como su constante de Lipschitz, o lo que es lo mismo,

$$\|T\| = \text{mín}\left\{M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X\right\} \qquad (2)$$

Para $x \in X \setminus \{0\}$ tenemos obviamente $\|T(x)\|/\|x\| = \big\|T\big(x/\|x\|\big)\big\|$ y está claro que el conjunto $\big\{x/\|x\| : x \in X \setminus \{0\}\big\}$ es la **esfera unidad** de X, es decir, $S = \{z \in X : \|z\| = 1\}$. Por tanto la igualdad (3) equivale a

$$\|T\| = \sup\big\{\|T(z)\| : z \in S\big\} = \sup\big\{\|T(z)\| : z \in X, \ \|z\| = 1\big\} \qquad (4)$$

El conjunto que aparece en el segundo miembro de (4) aumenta obviamente si sustituimos la esfera unidad S por la bola unidad $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, pero su supremo no varía, pues para $x \in B$ se tiene $x = \|x\| z$ con $z \in S$, y por tanto $\|T(x)\| = \|x\| \|T(z)\| \leqslant \|T(z)\|$. Así pues, podemos escribir

$$\|T\| = \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in B \right\} = \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in X, \ \|x\| \leqslant 1 \right\} \tag{5}$$

3.14.2.- Operador mínimo. operador máximo. diferencia acotada.

Todo lo dicho anteriormente sobre operadores, es cierto en particular cuando el espacio de llegada es el cuerpo escalar, cuya norma es el valor absoluto o el módulo. Si X es un espacio vectorial formado por funciones, una aplicación de X en $\mathbb{K}$ asocia un número a cada función de X, por lo que el término "operador" deja de ser adecuado y se suele sustituir por "funcional".

Así pues, un **funcional lineal** en un espacio vectorial X no es más que una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$. Repasemos los resultados obtenidos anteriormente para operadores, en el caso particular de los funcionales, que es el que ahora nos interesa.

Para un funcional lineal f en un espacio normado X, es equivalente ser continuo en algún punto, ser continuo en todo punto, ser uniformemente continuo y ser una función lipschitziana.

Cualquiera de las propiedades de f recién mencionadas equivale a la existencia de una constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando que

$$|f(x)| \leqslant M \|x\| \qquad \forall x \in X$$

Esto a su vez ocurre si, y sólo si, f está acotado en cada subconjunto acotado de X, para lo cual es suficiente que f esté acotado en la bola unidad de X.

La complitud de $\mathbb{K}$ nos asegura que X^* es siempre un espacio de Banach, que se conoce como el **espacio dual** del espacio normado X, y también es habitual decir que la norma de X^* es la **norma dual** de la norma de X. Hasta qué punto existe una auténtica *dualidad* entre un espacio normado X y su dual X^*, es algo que discutiremos a fondo más adelante. De momento tenemos cierta asimetría, pues X^* es completo aunque X no lo sea.

Comentemos también que, si M es un subespacio denso en un espacio normado X, entonces la aplicación $f \mapsto f\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de X^* sobre M^*. Destaquemos sobre todo la sobreyectividad de dicha aplicación: cada $g \in M^*$ es la restricción a M de un único $\widetilde{g} \in X^*$.

Veamos ahora una propiedad de los funcionales lineales que ya no es caso particular de un resultado referente a operadores lineales en general. Para ello, veamos que un funcional lineal f en un espacio vectorial X, queda determinado por su núcleo $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$, salvo un factor de proporcionalidad, es decir: si g es otro funcional lineal en X con $\ker g = \ker f$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g = \lambda f$. En el caso $f = 0$ se tiene $\ker g = \ker f = X$, luego $g = 0$ y podemos usar cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$. En otro caso, existe $u \in X$ tal que $f(u) = 1$ con lo que, para todo $x \in X$, se tiene $x - f(x)u \in \ker f = \ker g$, luego $g(x) = f(x)\,g(u)$. Tomando $\lambda = g(u) \in \mathbb{K}$, se tiene por tanto $g = \lambda f$, como queríamos.

Es bien fácil convencerse de que el resultado análogo al anterior, para operadores lineales cualesquiera, está muy lejos de ser cierto. Pero volviendo a los funcionales lineales, no es de extrañar ahora que, en un espacio normado, la continuidad de un funcional lineal se caracterice en términos de su núcleo, como vamos a comprobar.

- *Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

Si X es un espacio normado y $f \in X^*$, está claro que $\ker f$ ha de ser un subconjunto cerrado de X. Recíprocamente, sea f un funcional lineal en X y supongamos que $\ker f$ es cerrado, para probar que f es continuo. Si $f = 0$ no hay nada que demostrar, y en otro caso fijamos $z \in X$ con $f(z) = -1$. Como $\ker f$ es cerrado, tenemos $z \notin \overline{\ker f}$, luego existe un entorno de z cuya intersección con $\ker f$ es vacía. Tenemos por tanto $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\big(z + rU\big) \cap \ker f = \emptyset$, donde U es la bola abierta unidad de X.

Si $x \in X$ y $f(x) \neq 0$, se tiene $z + \big(x/f(x)\big) \in \ker f$, luego $z + \big(x/f(x)\big) \notin \big(z + rU\big)$, o lo que es lo mismo, $x/f(x) \notin rU$. Esto significa que $\|x/f(x)\| \geqslant r$, es decir, $|f(x)| \leqslant (1/r)\|x\|$. Esta desigualdad es obvia cuando $f(x) = 0$, luego es válida para todo $x \in X$, y prueba que f es continuo, como se quería. ■

Conviene resaltar una consecuencia fácil del resultado anterior. Si un funcional lineal f, en un espacio normado X, no es continuo, entonces $\ker f$ es denso en X. En efecto, hemos visto que $\ker f$ no puede ser cerrado, pero entonces $\overline{\ker f}$ es un subespacio de X que contiene estrictamente a $\ker f$, de donde se deduce claramente que $\overline{\ker f} = X$.

3.15.- Criterios para seleccionar operadores apropiados de agregación.

1. Selección de alternativas: aquí se busca el conjunto solución de alternativa/s que mejor se adecue a los objetivos perseguidos en el problema de Decisión. En este proceso distinguimos dos fases:

    (i) Una fase de Agregación en la que se combinan las preferencias individuales de criterios y/o expertos para obtener una preferencia colectiva sobre las alternativas del problema.

    (ii) Una fase de Explotación en la que a partir de las preferencias colectivas se aplicará un grado de selección para generar un conjunto solución de alternativas para el problema.

2. Consenso: El proceso de selección de alternativas en proble : mas de decisión con múltiples expertos puede dar lugar a soluciones que no son aceptadas como buenas por parte de algunos expertos, por lo que el estudio del Consenso se ha convertido en un campo de investigación de gran importancia dentro de la TD. Podemos decir que el Consenso es un proceso de discusión en grupo e iterativo que es coordinado por un moderador que ayuda a los expertos del problema a acercar sus opiniones. El consenso se ha definido clásicamente como el acuerdo total y unánime de todos los expertos que participan en un problema, debido a esta definición primero se utilizaron medidas de consenso absolutas para posteriormente evolucionar hacia medidas difusas (Soft Consensus) que ofrecen una mayor flexibilidad para expresar una medida vaga "per se" como es el consenso.

para enseñar la habilidad hace uso de múltiples procedimientos y operaciones, adecuando el método más general a las condiciones específicas concretas del colectivo de estudiantes, enriqueciéndolo y particularizándolo según las variadas situaciones que implica cada problema o situación específica en cada escolar. De ahí que los métodos de enseñanza y aprendizaje son mucho más ricos, variados y multifacéticos que la habilidad que encierra el objetivo.

UNIDAD IV RELACIONES DIFUSAS

4.1.- Ecuaciones certeras y difusas.

Las Ecuaciones Diferenciales Difusas surgen por la necesidad de modelar y resolver problemas en donde las condiciones iniciales de la ecuación diferencial presentan incertidumbre y no se conoce el valor exacto.

4.2.- Relaciones binarias.

La importancia en matemáticas de las relaciones binarias, se debe a que una gran parte de las asociaciones entre elementos de conjuntos, tanto numéricos como no numéricos, se hace de dos en dos elementos, tanto si son elementos de un único conjunto o de dos conjuntos distintos, en el esquema se puede ver algunas estructuras algebraicas o subtipos de relación binaria.

En primer lugar, diferenciamos las relaciones binarias homogéneas, de las heterogéneas. En las primeras, la relación binaria se establece entre los elementos de un único conjunto, por lo que, en realidad, lo que determina es su estructura interna, mientras que en las segundas se establecen relaciones entre dos conjuntos distintos, lo que da lugar a operaciones o funciones matemáticas de cálculo. Una relación homogénea puede ser tratada como heterogénea con los mismos subtipos, pero no al contrario.

4.3.- Relación binaria sobre un conjunto simple.

Llamamos relación binaria a la relación R existente entre dos elementos a y b, de dos conjuntos A y B respectivamente. Indicando que el elemento a está relacionado con b. Esta relación se puede denotar de diversas formas:

1- Como pares ordenados (a, b).
2- Indicando que aRb.
3- Como una mezcla entra los dos anteriores R(a,b).

Al conjunto de todos los elementos relacionados mediante la relación R en un conjunto lo denotamos como R(M)

4.4.- Relaciones de equivalencia y similitud.

En teoría de conjuntos y álgebra, la noción de relación de equivalencia sobre un conjunto permite establecer una relación entre los elementos del conjunto que comparten cierta característica o propiedad.

Esto permite reagrupar dichos elementos en clases de equivalencia, es decir, «paquetes» de elementos similares. Esto posibilita la construcción de nuevos conjuntos «añadiendo» todos los elementos de una misma clase como un solo elemento que los representará y que define la noción de conjunto cociente.

4.5.- Relaciones de compatibilidad o tolerancia.

https://www.youtube.com/watch?v=BY2BxpOCgd0

***Investigación y Ejercicios enteramente practicos**

4.6.- Ordenamientos.

ordenamiento con árbol binario es un algoritmo de ordenamiento, el cual ordena sus elementos haciendo uso de un árbol binario de búsqueda. Se basa en ir construyendo poco a poco el árbol binario introduciendo cada uno de los elementos, los cuales quedarán ya ordenados. Después, se obtiene la lista de los elementos ordenados recorriendo el árbol en inorden.

Complejidad:

Insertar elementos en un árbol binario de búsqueda tiene una complejidad O(log n). Entonces, agregar n elementos a un árbol cualquiera da como resultado una complejidad O(n log n). Además, recorrer los elementos del árbol en inorden tiene complejidad O(n).

Características:

Tiene un buen rendimiento.

Es estable (no cambia el orden relativo de elementos iguales).

No requiere espacio de almacenamiento extra.

Puede ordenar listas tal cual las recibe.

4.7.- Morfismos.

En matemáticas, un morfismo es una estructura de preservar mapa de una estructura matemática a otra del mismo tipo. La noción de morfismo se repite en gran parte de la matemática contemporánea. En la teoría de conjuntos, morfismos son funciones; en álgebra lineal, transformaciones lineales; en la teoría de grupos, grupo Homomorfismos ; en la topología , las funciones continuas , y así sucesivamente.

En la teoría de categorías, morfismo es una idea muy similar, pero algo más abstracto: los objetos matemáticos involucrados no tienen por qué ser conjuntos, y la relación entre ellos puede ser algo más general que un mapa, aunque tiene que comportarse de manera similar a los mapas, por ejemplo, tiene que admitir composición asociativa.

El estudio de morfismos y de las estructuras (llamados "objetos") sobre las que se definen es central en la teoría de categorías. Gran parte de la terminología de morfismos, así como la intuición que subyace a ellos, proviene de categorías concretas, donde los objetos son simplemente sets con alguna estructura adicional, y morfismos son las funciones que preservan la estructura. En la teoría de categorías, morfismos veces también se llaman flechas.

4.8.- Ecuaciones de relación difusa.

Llamamos relaciones entre dos conjuntos porque existe una propiedad que las vincula, generalmente las relaciones son un conjunto de pares ordenados capaz de correlacionar algunos elementos entre dos conjuntos siendo este es el tema principal de la sección.

Las relaciones binarias dependen de los conceptos de pares ordenados y producto cartesiano anteriormente estudiados, pero aquí solo me limitaré a exponer sus definiciones como teorías preliminares y continuar con el tema principal del curso actual. Sin más que decir, comencemos.

Recursos

Ecuaciones Difusas

https://www.youtube.com/watch?v=Q13I0JzJ2lo

BIBLIOGRAFIA

- Zadeh, L. A. (1965). «Fuzzy sets» (pdf). *Information and Control* (8): 338–353.
- Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). *Fuzzy Set Theory—and Its Applications*. Springer Science & Business Media.
- Dubois, D., Prade, H. Fuzzy sets in approximate reasoning II (Logical approaches), Fuzzy sets and systems., 40, pp. 203-244, 1991.
- Dubois, D., Prade, H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications, Academic Press, 1980.
- H´ajek, P., God´o Ll. Deductive systems of fuzzy logic, unpublished manuscript, 1997.
- Kantrowitz, M. et al, FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems, disponible en ftp.cs.cmu.edu:/user/ai/pubs/faqs/fuzzy/fuzzy.faq, (desde 1995).
- Kaufmann, A., Introducci´on a la teor´ıa de los subconjuntos borrosos, C´ıa. Editorial Continental, 1982.
- Zadeh, L. Fuzzy sets, Information & Control., 8, 1965. [7] Zadeh, L. Fuzzy logic, IEEE Computer, 1:83, 1988.
- J. Galindo, "Tratamiento de la Imprecisión en Bases de Datos Relacionales: Extensión del Modelo y Adaptación de los SGBD Actuales". Ph. Doctoral Thesis, University of Granada (Spain), March 1999 (www.lcc.uma.es).
- J.M. Medina, "Bases de Datos Relacionales Difusas. Modelo Teórico y Aspectos de su Implementación". PhD. Thesis, Univ. of Granada (Spain), 1994 (www.decsai.ugr.es).
- J.M. Medina, O. Pons, M.A. Vila, "FIRST. A Fuzzy Interface for Relational SysTems". VI International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA'1995). Sao Paulo (Brasil), 1995.
  - Urruita, "Modelo Conceptual para una Base de Datos Difusa", Ph. Doctoral Thesis, University of Castilla-La Mancha (Spain), July 2003 (www.ganimides.ucm.cl).
- L.A. Zadeh, "A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages". Computer Mathematics with Applications, 9, pp. 149-183, 1983.