



LIBRO

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

7°

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta

alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO



El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

“Mi Universidad”

ALBORES



Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Nombre de la materia

Objetivo de la materia: Conocerá la teoría y técnicas básicas generales para el análisis de señales, vistas como sistemas lineales.

INDICE

UNIDAD I OBJETIVOS DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

- 1.1 Importancia
- 1.2 Aplicaciones
- 1.3 Definiciones (sistemas lineales determinísticos, etc.).
- 1.4 Modelos para sistemas físicos.
- 1.5 Solución de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio del tiempo
- 1.6 Solución de diferencia lineal.
- 1.7 Solución no homogénea de ecuaciones de diferencia no lineales.
- 1.8 Superposición y convolucion en sistemas de tiempo discreto.
- 1.9 Operaciones con la convolucion.
- 1.10 Calculo de la secuencia respuesta al impulso.
- 1.11 Funciones singulares y respuesta de señales de tiempo continuo.
- 1.12 Superposición y convolucion en sistemas de tiempo continuo.

UNIDAD II SEÑALES Y SISTEMAS DE VARIABLES DISCRETAS

- 2.1 Señales de variables discretas
- 2.2 Descripción con variables de estado de sistemas de tiempo discreto.
- 2.3 Ecuaciones diferenciales en las cuales no contiene derivada de excitación.
- 2.4 Ecuaciones diferenciales en las cuales contiene derivada de excitación.
- 2.5 Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados.
- 2.6 Enfoque de la transformada de laplace para la solución de las ecuaciones de estado.
- 2.7 Señales sinusoidales y el concepto de frecuencia
- 2.8 Sistemas en tiempo discreto
- 2.9 Análisis de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo
- 2.10 Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones de diferencias
- 2.11 Correlación

UNIDAD III ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI DISCRETOS CON LA TRANSFORMADA

z

- 3.1 Convergencia de la transformada z.
- 3.2 Propiedades de la transformada z.
- 3.3 Inversión de la transformada z.
- 3.4 Aplicaciones de la transformada z.
- 3.5 Transformadas z racionales
- 3.6 Polos y ceros
- 3.7 Localización de los polos y el comportamiento en el dominio de n para señales causales
- 3.8 La función de transferencia de un sistema LTI
- 3.9 Respuesta de sistemas con función de transferencia racional
- 3.10 Condiciones iniciales no nulas
- 3.11 Respuesta transitoria y en régimen permanente
- 3.12 Causalidad y Estabilidad
- 3.13 Cancelación polo-cero
- 3.14 Polos de orden múltiple y estabilidad
- 3.15 Estabilidad de sistemas de segundo orden

UNIDAD IV ANÁLISIS FRECUENCIAL

- 4.1 Espectro de señales continuas
- 4.2 Series exponencial de fourier.
- 4.3 Espectro complejo de fourier.
- 4.4 Transformada de algunas señales de energías sencillas y de potencia.

- 4.5 Muestreo de señales de tiempo.
- 4.6 Modulación.
- 4.7 Transmisión de señales a través de filtros lineales.
- 4.8 Sistemas LTI en el dominio de la frecuencia
- 4.9 Sistemas LTI como filtros selectivos en frecuencia
- 4.10 Sistemas inversos
- 4.11 Transformada Discreta de Fourier

Unidad I

OBJETIVOS DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

1.1.- Importancia.

El área de la Ingeniería Electrónica denominada “Procesamiento Digital de Señales” (DSP) se concentra en el análisis y en el procesamiento de señales representadas en forma digital, es decir, discretizadas en el tiempo y en la amplitud.

DSP se ha desarrollado en forma sostenida durante los últimos 40 años, desde que la disponibilidad de computadores hizo posible la aplicación práctica de algoritmos que previamente sólo habían podido ser evaluados en forma manual.

Los continuos avances en las tecnologías de integración de circuitos electrónicos han permitido reemplazar en forma paulatina los circuitos análogos por circuitos digitales que ocupan un menor volumen, y que están libres de los problemas de tolerancia de los componentes, calibración, y deriva térmica que afectan a los primeros.

El procesamiento digital requiere de 2 componentes básicos: un algoritmo y una máquina calculadora.

Este libro contiene una introducción a la teoría y a los algoritmos clásicos de DSP, en las áreas de análisis espectral y de diseño e implementación de filtros digitales. No cubre el funcionamiento de las máquinas o de los procesadores DSP, pero contiene ejemplos y aplicaciones en el lenguaje MATLAB, desarrollado por la empresa The MathWorks. La mayoría de los programas incluye comentarios, para facilitar su comprensión y su adaptación a los requerimientos del lector. Los archivos de los programas están disponibles en Internet, tal como se detalla en el Apéndice I.

Algunas de las funciones realizadas por los programas incluidos en el libro son:

- Estimación del espectro de frecuencia de una señal periódica, correspondiente a la corriente de línea en una carga no lineal (Sección 8.3.6).
 - Estimación del espectro de potencia de una señal aleatoria estacionaria sumada con sinusoides, y detección de sinusoides inmersas en ruido (ejemplo 8.16).
 - Estimación y representación del espectro de potencia de una señal aleatoria no estacionaria, proveniente del eco de radar de un trasbordador espacial (ejemplo 8.17).
 - Diseño de un filtro digital FIR pasabajos casi ideal mediante el método de la ventana (ejemplo 9.5).
- 14 Juan Vignolo Barchiesi • Diseño de filtros digitales FIR pasabajos y multibanda mediante el método óptimo (ejemplos 9.7 y 9.8).
- Diseño de filtros digitales IIR pasabajos y pasabanda mediante la transformación bilineal (ejemplos 10.7 y 10.8).
 - Reducción del ruido de línea en un electrocardiograma mediante un filtro FIR y un filtro IIR, y comparación de los resultados (ejemplo 10.9).

Debe tenerse presente que los ejemplos desarrollados en MATLAB no son simulaciones, tal como ocurre cuando un sistema análogo es simulado en un computador digital. Dado que los computadores digitales operan en tiempo discreto, los resultados obtenidos son los mismos que se obtendrían en procesamientos reales. De hecho, en muchos casos, el procesamiento digital real se realiza en MATLAB.

Es conveniente (aunque no imprescindible) que el lector tenga conocimientos básicos de análisis de señales y de sistemas análogos, incluyendo operaciones tales como la convolución continua, la Transformada de Fourier y la Transformada de Laplace.

Existe un gran número de libros que cubren tópicos de DSP. Sin embargo, muchos de estos libros están escritos en inglés, lo que dificulta su comprensión por parte de nuestros estudiantes. Otros libros han sido traducidos al español en un 100%, privilegiando la pureza del idioma por sobre el aprendizaje de los términos utilizados frecuentemente en la mayoría de las referencias, las cuales están escritas en inglés. Como consecuencia de esta metodología, no ayudan al alumno a conocer la terminología empleada mayoritariamente en la literatura original de DSP. En este libro se incluyen algunas palabras y expresiones en inglés, para familiarizar al lector con la terminología común de DSP.

Algunos libros de DSP cubren un gran número de tópicos en forma exhaustiva, pero con pocas explicaciones. Aparentemente el autor supone que no se requieren más explicaciones, probablemente porque los tópicos le resultan obvios. Por ejemplo, cuando describe una operación matemática tal como la convolución o una transformada, presenta la definición, una lista de propiedades, y varios ejemplos, pero no explica cómo o por qué funciona la operación descrita.

Como resultado de lo anterior, los alumnos generalmente aprenden la mecánica de las operaciones matemáticas utilizadas en DSP, pero no aprehenden su esencia, y no se sienten cómodos con ellas. Sabido es que la memoria humana tiende a olvidar lo que no entiende, y por lo tanto, se olvidan fácilmente los procedimientos mecánicos que no se ejercitan frecuentemente. Sin embargo, los conceptos que han sido incorporados a la mente no se olvidan tan fácilmente.

En este libro introductorio no se cubren los tópicos en forma tan amplia como en la mayoría de los textos de DSP, pero se intenta explicar cómo funcionan algunas de las operaciones usadas comúnmente en DSP. Algunos de los tópicos explicados e ilustrados con cierto detalle son:

- Significado de las señales complejas (Sección 2.2.6).
- Importancia de las frecuencias negativas en señales reales (sección 2.3.2) y en señales complejas (ejemplo 4.7).
- Significado de “no causalidad”, y ejemplos de sistemas reales no causales (Sección 3.2.4).
- Justificación conceptual de la fórmula de la convolución discreta (Sección 3.4.5).

- Principio de funcionamiento de la Transformada Discreta en el Tiempo de Fourier, o DTFT (Sección 4.2.1).
- Implicaciones del Principio de Incertidumbre en Análisis Espectral (Sección 4.4.3 y ejemplo 8.18).
- Principio de funcionamiento de la Transformada Discreta de Fourier, o DFT (sección 6.1) y equivalencia de la DFT con un banco de filtros pasabanda (Sección 8.3.3).
- Análisis de un filtro digital FIR pasabajos de bajo orden y equivalencia del filtro con un promedio móvil (Sección 9.2).
- Análisis de un filtro digital IIR pasabajos de primer orden y equivalencia del filtro con la promediación con decaimiento exponencial (Sección 10.2.1).
- Principio de funcionamiento de la Transformada Z (Sección 10.3.6).
- Distorsión generada por un filtro digital IIR, ilustrada por medio de las anomalías introducidas en la forma de onda de un electrocardiograma (ejemplo 10.9).

Una de las diferencias entre este libro y algunos libros de DSP está en la forma en la cual se presenta la Transformada Z (TZ). Esta operación matemática aparece generalmente en el segundo o tercer capítulo de algunos libros, antes de tópicos tales como análisis espectral, o diseño de filtros digitales. De esta forma, puede quedar la impresión de que la TZ es una herramienta esencial para comprender casi cualquier tópico de DSP. Sin embargo, no es así; muchos procedimientos empleados en DSP se pueden explicar recurriendo solamente a combinaciones de multiplicaciones y sumas.

En este libro se presenta el tópico del análisis espectral clásico para señales periódicas y aleatorias, el cálculo de la respuesta de frecuencia de los filtros digitales FIR e IIR, la metodología para filtrar con ellos, el diseño de los filtros FIR, y el diseño de los filtros IIR de primer orden, sin utilizar la TZ, la cual sólo es descrita en el último capítulo, para poder explicar uno de los métodos de diseño de filtros IIR de orden mayor que 1.

Por último, en algunos libros de DSP se encuentran ocasionalmente expresiones frustrantes tales como “*resulta evidente que*”, “*se desprende directamente de*”, “*es obvio que*”, a pesar de que para muchos estudiantes no resulta necesariamente así. El lector puede estar seguro de que en este libro no encontrará ninguna de dichas expresiones.

1.2.- Aplicaciones.

Significado de “Procesamiento Digital de Señales”

Las **señales eléctricas** son tensiones o corrientes que contienen información. Además de las señales eléctricas existen otras, de naturaleza magnética, hidráulica, neumática, luminosa, etc.

Las señales pueden ser generadas en forma natural o artificial. Algunos ejemplos de señales naturales son la radiación electromagnética de una estrella, la altura de la marea y la velocidad del viento. Algunos ejemplos de señales artificiales son la emisión de un canal de TV, las ondas emitidas y recibidas por radares, teléfonos celulares, sonares, etc.

Las señales se representan matemáticamente como funciones de una o más variables independientes.

La variable independiente más común es el tiempo, y algunas señales que dependen de él son, por ejemplo, la voz, una onda de radio, un electrocardiograma, etc.

Otras señales, tales como las imágenes, son funciones de 2 variables independientes, ya que contienen información de brillo o de colorido en función de las coordenadas X e Y de un plano.

Procesamiento de Señales es un área de la Ingeniería Electrónica que se concentra en la representación, transformación y manipulación de señales, y de la información que ellas contienen. El primer tipo de procesamiento electrónico que se desarrolló y se aplicó extensivamente fue el **procesamiento análogo**, el cual se lleva a cabo mediante circuitos compuestos por resistores, capacitores, inductores, amplificadores operacionales, etc.

Procesamiento de Señales en Tiempo Discreto (*Discrete-Time Signal Processing*) se refiere al procesamiento de señales discretas en el tiempo o en el espacio. Esto implica que sólo se conoce el valor de la señal en instantes o en puntos específicos. Sin embargo, la amplitud de la señal es continua, es decir, puede tomar infinitos valores diferentes.

Procesamiento Digital de Señales (*Digital Signal Processing* o **DSP**) añade a la característica anterior la de manejar la amplitud en forma discreta, la cual es una condición necesaria para que la señal pueda ser procesada en un computador digital. La amplitud de la señal sólo puede tener un número finito de valores diferentes.

En el ejemplo 1.1 se ilustra la diferencia entre los distintos tipos de procesamiento.

Ejemplo 1.1: en la Figura 1.1 se muestra un filtro pasabajos implementado con 3 tecnologías diferentes, que procesan la señal en las 3 formas descritas anteriormente.

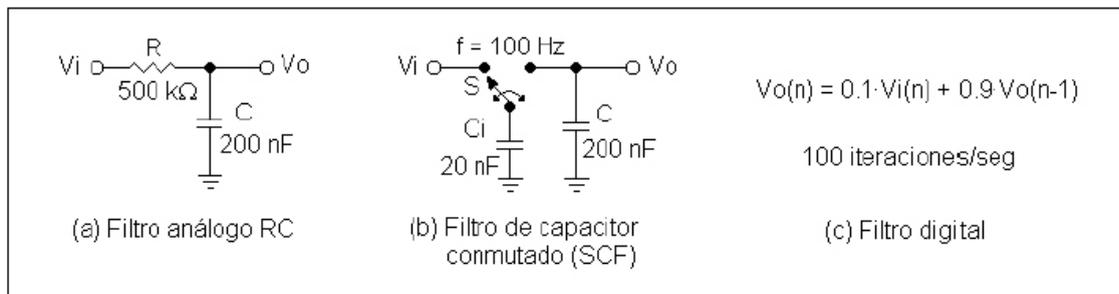


Figura 1.1. Filtro pasabajos análogo (a), en tiempo discreto (b) y digital (c).

Para describir el funcionamiento de los 3 filtros se supondrá que todos los voltajes son cero hasta el instante inicial, momento en el cual se aplica una tensión de 1 V en la entrada (V_i). Esto se conoce como la “respuesta escalón” del filtro.

(a) Filtro análogo RC: la tensión de entrada hace fluir una corriente a través del resistor R , cargando al capacitor C . A medida que V_o aumenta, disminuye la diferencia de potencial en R , disminuyendo la corriente y la velocidad de crecimiento de V_o , el cual se aproxima asintóticamente a 1 V, siguiendo una curva exponencial creciente.

(b) Filtro de capacitor conmutado (SCF): cuando el conmutador S se encuentra en la posición izquierda, el capacitor C_i se carga con V_i ; cuando S conmuta a la posición derecha, C_i transfiere parte de su carga a C , elevando el voltaje de este último. Como C_i es bastante menor que C , cada conmutación de S eleva V_o en un peldaño de pequeña magnitud. Además, a medida que V_o aumenta, la transferencia de carga desde C_i a C es cada vez menor, haciendo que V_o se asemeje a una escalera, con una velocidad de elevación decreciente.

(c) Filtro digital: está constituido por una fórmula y una máquina calculadora. La fórmula dice: *la salida actual se obtiene sumando un 10% de la entrada actual con un 90% de la salida anterior*. Por lo tanto, la primera salida será 0.1 V, la segunda será $0.1 \cdot 1 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.19 \text{ V}$, etc. En este ejemplo la máquina recalcula la fórmula 100 veces por segundo.

Las salidas de los 3 filtros están graficadas en la Figura 1.2.

Se aprecia que las respuestas son virtualmente idénticas.

El circuito (a) es un filtro análogo. Las señales están definidas para todo instante de tiempo, y pueden tomar infinitos valores diferentes.

El circuito (b) discretiza la señal en el tiempo, pero no en la amplitud, ya que el voltaje en el capacitor C puede tomar infinitos valores diferentes, dependiendo de la entrada aplicada.

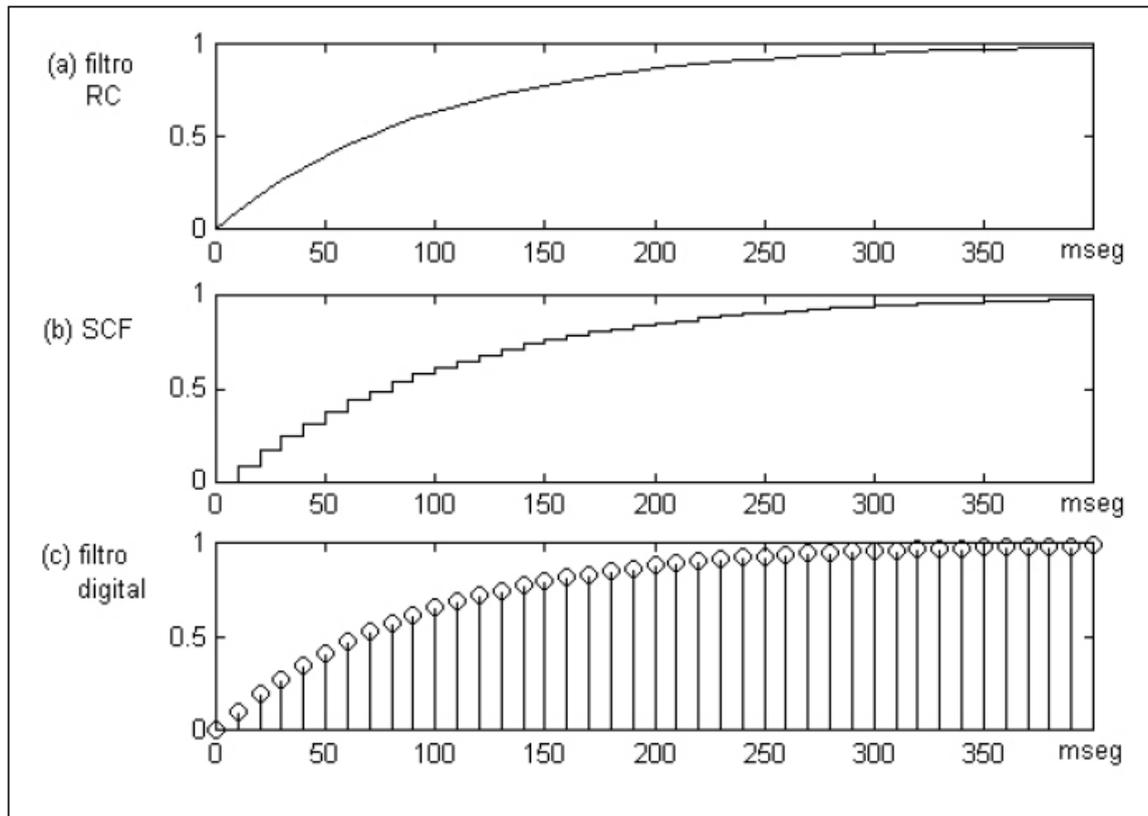


Figura 1.2. Respuesta escalón de los 3 filtros anteriores.

La ecuación del filtro (c) se ejecuta en un computador digital, por lo que existe discretización en el tiempo y en la amplitud.

La **discretización en el tiempo** es la diferencia más importante entre el procesamiento digital y el procesamiento análogo. La discretización en el tiempo modifica las fórmulas de las transformadas, convolución, correlación, etc., e introduce un posible problema que no existe en el mundo análogo, denominado *aliasing*, el cual se origina cuando la tasa de muestreo es insuficiente, generando una pérdida irrecuperable de la información contenida en la señal.

La **discretización en la amplitud** puede ser casi imperceptible, como cuando se efectúan los cálculos en punto flotante con doble precisión (alrededor de 15 decimales) en un lenguaje de programación de alto nivel, o notoria, si se cuantiza la señal con pocos *bit*. La discretización en la amplitud puede provocar algunos efectos indeseados, tales como:

- Si proviene de la conversión A/D de la señal, es equivalente a sumarle un cierto tipo de ruido, el cual se denomina “ruido de cuantización”.
- Si afecta a los cálculos, y es significativa, puede producir errores importantes, e incluso inestabilidad en algunos sistemas.

Como se había mencionado anteriormente, el filtro digital del ejemplo 1.1 está constituido por una fórmula y por una máquina calculadora. Si se modifica la fórmula, cambia la respuesta del filtro, pero si se reemplaza la máquina calculadora, la respuesta se mantiene (siempre que la máquina no introduzca errores significativos, y que sea capaz de realizar los cálculos en el tiempo disponible).

Por lo tanto, el elemento más importante del filtro digital es la fórmula, no la máquina usada para resolverla, la cual puede ser un microprocesador de propósito general, un procesador DSP especializado, un computador personal, o incluso el cerebro humano, si el proceso es suficientemente lento.

En este libro se presentan los fundamentos del procesamiento digital de las señales, independientemente del dispositivo que se utilice para implementarlas. Para ensayar las técnicas descritas se usa MATLAB *, un lenguaje de programación de alto nivel que permite al usuario concentrarse en los algoritmos, aislándolo de los detalles relacionados con el *hardware* y con el sistema operativo.

MATLAB (abreviación de *matrix laboratory*) puede efectuar una gran variedad de operaciones matemáticas con vectores y matrices, dibujar gráficos sofisticados, y ejecutar un sinnúmero de algoritmos de DSP con un mínimo de instrucciones. El lenguaje puede ser ampliado mediante *toolboxes* (conjuntos de instrucciones) adicionales. Algunos ejemplos incluidos en este libro requieren funciones contenidas en el *Signal Processing Toolbox*.

En el Apéndice I se indica cómo obtener los archivos correspondientes a los ejemplos.

Comparación entre DSP Y ASP

El Procesamiento Análogo de Señales (ASP) es generalmente más simple que el procesamiento digital, el cual requiere típicamente de un filtro análogo *antialiasing*, un conversor A/D, un procesador DSP, un conversor D/A y un filtro análogo para suavizar la salida.

Sin embargo, el procesamiento análogo es incapaz de realizar muchas funciones que el procesamiento digital sí puede realizar (ver Sección 1.4).

Algunas de las ventajas del procesamiento digital con respecto al análogo son:

- El envejecimiento de los componentes y las derivas térmicas no afectan al resultado del proceso.
- Todos los dispositivos fabricados se comportan en forma idéntica, ya que la tolerancia de los componentes no influye en el procesamiento.
- Se puede reconfigurar un dispositivo modificando los valores de algunos coeficientes; no es necesario ajustar potenciómetros, o reemplazar componentes.
- El procesamiento análogo de señales de muy baja frecuencia se dificulta debido al requerimiento de capacitores de gran capacidad y muy baja corriente de fuga. En el caso del procesamiento digital no existen limitaciones; se pueden procesar señales con períodos de horas (tales como las mareas) e incluso de años (manchas solares).
- El procesamiento digital es capaz de realizar tareas muy complejas (ver Sección 1.4).

Algunas de las desventajas del procesamiento digital con respecto al análogo son:

- Mayor limitación en frecuencias altas, ya que normalmente se requieren conversores A/D capaces de tomar muestras a una tasa varias veces mayor que la de la frecuencia de la señal análoga, y procesadores capaces de efectuar muchas operaciones por cada muestra recibida. Por ejemplo, un filtro digital FIR con una respuesta impulso de 1000 coeficientes, operando a una tasa de $10 \cdot 10^6$ muestras por segundo, requeriría un procesador capaz de efectuar al menos $10 \cdot 10^9$ multiplicaciones y sumas por segundo.
- El diseño es generalmente más complejo, ya que incluye aspectos de *hardware* y de *software*.
- El rango dinámico en la amplitud (razón entre la señal más grande y la más pequeña que pueden ser procesadas) es más limitado, debido a la discretización en la amplitud. Sin embargo, la disponibilidad actual de conversores A/D de alta resolución (18 a 24 bits) y de procesadores capaces de efectuar cálculos en punto flotante con un gran número de decimales, puede eliminar esta desventaja en muchos casos.
- El rango dinámico en la frecuencia también es más limitado. Por ejemplo, un filtro análogo sencillo podría procesar simultáneamente componentes de 1 Hz y de 1 MHz, a pesar de que las 2 frecuencias están separadas por 6 órdenes de magnitud. Para realizar la misma tarea con un filtro digital, sería necesario procesar un gran número de muestras, ya que se debería discretizar la señal a una tasa mínima de $2 \cdot 10^6$ muestras por segundo, por lo que se necesitarían $2 \cdot 10^6$ muestras para representar sólo 1 ciclo de la componente de 1 Hz.

1.3. Historia de DSP

Dado que el procesamiento digital de una señal sólo requiere efectuar ciertos cálculos a partir de los datos disponibles, y que en muchas ocasiones dichos cálculos pueden ser efectuados en forma manual, se puede afirmar que DSP se practicó durante varios siglos, mucho antes de la aparición de los computadores, en situaciones tales como el análisis y la predicción del movimiento de cuerpos celestes, o en el análisis y la predicción de las mareas.

Uno de los primeros avances formales en DSP fue el artículo “*Certain topics in Telegraph Transmission Theory*”, publicado por Harry Nyquist en 1928, en el cual se presentó el efecto producido en el espectro de frecuencia de una señal análoga al ser discretizada en el tiempo, y se planteó que, para preservar la información original, la tasa de muestreo debía ser mayor que el doble de la máxima componente de frecuencia contenida en la señal análoga.

Posteriormente, en 1949, Claude Shannon publicó el artículo “*Communications in the Presence of Noise*”, donde demostró que es posible reconstruir perfectamente una señal análoga a partir de sus muestras, si se dispone de un filtro pasabajos análogo ideal. (Si bien no es posible fabricar un filtro de este tipo, es posible aproximarse bastante a él en muchas situaciones prácticas).

El procesamiento digital de una señal requiere (en muchos casos) de la realización de un gran número de cálculos, haciéndolo inviable si no se dispone de una máquina calculadora de gran velocidad o de un computador. Este problema dificultó el avance en el área de DSP hasta los años 60 y 70, época en la cual progresó rápidamente, gracias a la disponibilidad de grandes computadores (*mainframes*) en las instituciones. Algunos de los tópicos abordados fueron:

- Diseño e implementación de filtros digitales.
- Invención y optimización del algoritmo de la FFT.
- Compresión de voz.
- Procesamiento de imágenes (fotos tomadas por satélites y naves espaciales).

- Sismología (búsqueda de minerales y de petróleo).

En esa época las aplicaciones de DSP al procesamiento de señales en tiempo real (tales como radar, sonar, cancelación de ecos, *modems*) eran muy limitadas. Los procesadores DSP se construían con centenares de circuitos integrados TTL, tenían un costo prohibitivo (excepto para aplicaciones militares) y eran muy complejos. Por lo tanto, la mayoría de los trabajos consistía en desarrollar y ensayar algoritmos en los grandes computadores que poseían las universidades, empresas y otras instituciones.

La capacidad de efectuar multiplicaciones en forma rápida es el requerimiento más importante para poder realizar algoritmos de DSP en tiempo real. Las CPU de esa época no eran capaces de multiplicar en forma directa, sino que lo hacían en base a sumas y desplazamientos.

La multiplicación en *hardware* requería de una gran área en la pastilla de silicio. A principios de los años 80 se logró reducir el tamaño de los transistores lo suficiente como para poder fabricar un procesador DSP capaz de multiplicar 2 números en 1 ciclo de máquina (800 nseg). Con el progreso de la tecnología de integración, este tiempo ha disminuido actualmente a unos pocos nseg.

El desarrollo de conversores A/D y D/A cada vez más rápidos, de mayor resolución (N° de bits), menor tamaño y menor costo, también ha contribuido a reemplazar el procesamiento análogo por el procesamiento digital.

El progreso en la velocidad de cálculo de los microcomputadores personales (PC) ha permitido usarlos en tareas cada vez más exigentes, tales como grabación y reproducción de audio y video, procesos que deben efectuarse en tiempo real. Los primeros computadores personales, fabricados a finales de los años 70, sólo podían efectuar algunos centenares o miles de operaciones de punto flotante por segundo (*flops*). La velocidad de cálculo de los PC actuales ya ha superado los mil millones de *flops*. Muchos equipos electrónicos complejos se construyen actualmente usando como base un PC industrial, aprovechando el bajo costo del *hardware* y del *software* asociado.

Aplicaciones de DSP

En las últimas décadas se ha producido una migración cada vez mayor desde el procesamiento análogo hacia el procesamiento digital. Al mismo tiempo, han surgido muchas aplicaciones y técnicas nuevas, que nunca existieron en el mundo análogo. A continuación se mencionan algunas aplicaciones actuales de DSP.

- **Verificación de la calidad del suministro eléctrico:** detección de transientes, medición de valor efectivo, potencia, factor de potencia, contenido armónico y *flicker*.
- **Radar:** medición de la distancia y de la velocidad de los contactos. Compresión del pulso, lo que permite incrementar la longitud de los pulsos para aumentar el alcance, manteniendo la resolución en distancia.

- **Sonar:** formación de haces, para orientar electrónicamente el arreglo de transductores; en **modo activo**, medición de la distancia, la demarcación y la velocidad de los contactos; en **modo pasivo**, clasificación de los contactos en base al ruido emitido por ellos.
- **Medicina:** reducción de ruido y diagnóstico automático de electrocardiogramas y electroencefalogramas; formación de imágenes en tomografía axial computarizada (*scanner*), resonancia magnética nuclear y ecografía (ultrasonido).
- **Análisis de vibraciones** en máquinas, para detectar tempranamente el desgaste de rodamientos o engranajes, comparando el análisis espectral de las vibraciones con un espectro de referencia obtenido cuando la máquina no tiene defectos.
- **Oceanografía:** alerta temprana de maremotos o *tsunamis* cuando se propagan en el océano abierto, en base a las características de esas ondas que las diferencian de las olas y de las mareas; análisis armónico y predicción de mareas; medición de la energía de las olas con el objeto de dimensionar muelles y otras estructuras sumergidas.
- **Astronomía:** detección de planetas en estrellas lejanas, en base al movimiento oscilatorio que inducen en las estrellas alrededor de las cuales orbitan.
- **Radioastronomía:** búsqueda de patrones en las señales recibidas por los radiotelescopios, para detectar inteligencia extraterrestre (SETI).
- **Imágenes:** mejora del brillo, contraste, colorido y nitidez, restauración de imágenes borrosas debido al movimiento de la cámara o del elemento fotografiado, compresión de la información.
- **Telefonía:** conmutación (plantas telefónicas), decodificación de discado por tonos (DTMF), *modems*, canceladores de ecos, teléfonos celulares digitales (PCS) y teléfonos satelitales.
- **Audio:** ecualización, reverberación artificial, compresión de la información (MP3), cancelación activa de ruido ambiente (inyectando ruido en contrafase).
- **Voz:** compresión de la información, identificación de personas, y reconocimiento de voz (dictado por voz).
- **Televisión:** cancelación adaptiva de *multipath* para eliminar los “fantasmas”, filtros “peineta” para mejorar la separación de luminancia y color en la señal de video compuesto, TV digital de alta definición (HDTV), compresión de la información.
- **Industria automotriz:** control de la inyección y del encendido del motor para maximizar el rendimiento y minimizar las emisiones; control de la transmisión automática para maximizar la economía de combustible o la aceleración del vehículo; control del flujo de energía en los vehículos híbridos.
- **Sismología:** localización de hipocentros de sismos, búsqueda de minerales y de petróleo analizando los ecos subterráneos generados por pequeñas explosiones. Estas son sólo algunas

aplicaciones de DSP. Su número está en constante aumento, a medida que la tecnología de integración progresa, y se desarrollan nuevos algoritmos.

I.3.- Definiciones (sistemas lineales determinísticos, etc.).

Muchos sistemas se pueden describir por un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1.1)$$

Donde

$\mathbf{x}(t)$: vector de estado del sistema

$\mathbf{u}(t)$: vector de entrada o control

$\mathbf{f}(\cdot)$: función real y vector valuada

(1.1) se denomina ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ESTADO.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1.2)$$

$\mathbf{y}(t)$: vector de salida del sistema

(1.2) se denomina ECUACION DE SALIDA DEL SISTEMA

Si \mathbf{f} y \mathbf{g} son funciones lineales, entonces:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.3)$$

Donde

$\mathbf{x}(t)$: vector de estado del sistema

$\mathbf{u}(t)$: vector de entrada o control

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.4)$$

$\mathbf{y}(t)$: vector de salida del sistema

$\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ y $\mathbf{D}(t)$: matrices variantes en el tiempo

Si las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} son constantes, el sistema es invariante en el tiempo

Linealización

Supongamos:

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}_o(t), \mathbf{u}_o(t), t] \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1.5)$$

Donde $\mathbf{x}_o(t)$ es una trayectoria nominal
 $\mathbf{u}_o(t)$ es una entrada nominal

Suponiendo que el sistema está operando cercano a condiciones nominales. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_o(t) + \tilde{\mathbf{u}}(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_o(t_0) + \tilde{\mathbf{x}}(t_0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_o(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (1.7)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ son perturbaciones pequeñas.

Realizando una expansión en serie de Taylor, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(x_o(t) + \tilde{x}(t)) = f[x_o(t), u_o(t), t] + J_x[x_o(t), u_o(t), t]\tilde{x}(t) + J_u[x_o(t), u_o(t), t]\tilde{u}(t) + h(t) \quad t_o \leq t \leq t_1 \quad (1.8)$$

Donde : J_x y J_u son las matrices Jacobianas de f con respecto a x y u .

Despreciando $h(t)$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad t_o \leq t \leq t_1 \quad (1.10)$$

donde $A(t) = J_x[x_o(t), u_o(t), t]$
 $B(t) = J_u[x_o(t), u_o(t), t]$

La

ecuación (1.10) se denomina: ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ESTADO LINEALIZADA.

Transformación de estado

Consideremos el sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.11)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Se define:

$$x'(t) = Tx(t) \quad (1.12)$$

Donde T es una matriz de transformación no singular constante.

$$x(t) = T^{-1}x'(t) \quad (1.13)$$

$$T^{-1} \frac{d}{dt}x'(t) = AT^{-1}x'(t) + Bu(t) \quad (1.14)$$

$$y(t) = CT^{-1}x'(t)$$

$$\frac{d}{dt}x'(t) = TAT^{-1}x'(t) + TBu(t) \quad (1.15)$$

$$y(t) = CT^{-1}x'(t)$$

La transformación es equivalente al sistema original.

1.4.- Repaso de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (4.1)$$

Vamos a presuponer que $a_0(x) \neq 0$ para todo x , de modo que estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (4.2)$$

Definición 1 La ecuación diferencial lineal 4.2 se dice que es homogénea si $b(x) = 0$. En caso contrario se dice que es completa o no homogénea.

A menudo denotaremos por $L(y)$ o $L[y]$ al primer miembro de 4.2

$$L(y) = L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x) y$$

Donde en este último caso $D = \frac{d}{dx}$ se utiliza como un ente algebraico. Así se puede representar la ecuación diferencial lineal homogénea por $L[y] = 0$, donde $L[\]$ es un operador lineal, i.e.

$$L[c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)] = c_1L[\phi_1(x)] + c_2L[\phi_2(x)] \quad (4.3)$$

En este tema estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, i.e. $a_1(x), \dots, a_n(x)$ son constantes.

Comenzaremos estudiando el caso particular de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden ($n = 2$) y luego lo generalizaremos para n cualquiera.

Estudiaremos en primer lugar la ecuación homogénea, puesto que la resolución de la ecuación no homogénea se basa en el método de resolución de la ecuación homogénea.

Ecuación homogénea

Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden tiene la forma

$$L[y] = y'' + a_1y' + a_2y = 0 \quad (4.4)$$

Donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $b(x)$ es una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

La ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden $y' + ay = 0$ tiene solución, como ecuación diferencial ordinaria de variables separadas, $y = ce^{-ax}$. Sería bueno buscar soluciones exponenciales para 4.4.

Basándose en esa idea se trata de buscar soluciones del tipo $y = e^{rx}$, que substituyendo en 4.4 queda

$$L[e^{rx}] = r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} = e^{rx} (r^2 + a_1 r + a_2) = 0$$

Debido a que $e^{rx} \neq 0$, se tendrán soluciones para las raíces del polinomio característico $q(r) = r^2 + a_1 r + a_2$. Este polinomio tendrá dos soluciones r_1, r_2 . Consideramos las tres posibilidades:

Si r_1, r_2 son reales y $r_1 \neq r_2$ se tiene que las soluciones de 4.4 son $\phi_1(x) = e^{r_1 x}$ $\phi_2(x) = e^{r_2 x}$

Si $r_1 = r_2$ son reales, entonces las solución de 4.4 son $\phi_1(x) = e^{r_1 x}$ $\phi_2(x) = x \cdot e^{r_1 x}$

Si r_1, r_2 son complejas conjugadas, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces las soluciones de 4.4 son

$$\phi_1(x) = e^{ax} \cos bx$$

$$\phi_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

Nótese que las soluciones son linealmente independientes, según se entiende por la siguiente definición

Definición 2

Dadas $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se dice que son linealmente independientes si se verifica que para todo $x \in I$ $c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$ (4.5)

Donde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

Para resolver una ecuación diferencial lineal de orden n se necesitan n condiciones generales. En general, dada una $f(x, y, y_0) = 0$ si la desarrollamos en serie de potencias en un entorno de un punto x_0 ,

Dada la condición inicial $f(x_0, y_0, y_0'(x_0)) = 0$ se puede despejar y_0 . Una vez conocida y_0 , con otra condición inicial adicional se podría despejar y_0' , y con otra más se podría despejar y_0'' . Así, para una ecuación diferencial lineal de orden n se necesitan n condiciones iniciales.

Dado que toda solución de una ecuación diferencial lineal es combinación lineal de soluciones de la misma, la solución general sería una combinación lineal de soluciones linealmente independientes.

Proposición 1

Dado el Problema de Cauchy para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$

$$PC \equiv \begin{cases} y'' + a_1y' + a_2y = 0 \\ y(x_0) = y_0 = \alpha \\ y'(x_0) = y_0' = \beta \end{cases}$$

Siempre existe solución (única) cualesquiera que sean los parámetros α, β . Definición 3 Sean $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ funciones $(n - 1)$ -derivables, se define el Wronskiano como

También suele denotarse como $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x)$, $W[\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]$ ó $W(x)$.

Proposición 2 Sean $\phi_1(x), \phi_2(x)$ soluciones de la ecuación $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ con $x \in I$ un intervalo, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$\phi_1(x), \phi_2(x)$ son linealmente independientes si y solo si $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0 \forall x \in I$

Proposición 3 (Formula de Jacobi-Liouville) Sean $\phi_1(x), \phi_2(x)$ soluciones de la ecuación $y'' + a_1y' + a_2y = 0, x_0 \in I$, entonces

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) = W(\phi_1, \phi_2)(x_0)e^{-a_1(x-x_0)} \quad (4.8)$$

Nótese que si $\exists x_0 \in I$ tal que $W(\phi_1, \phi_2)(x_0) = 0$, entonces $W(\phi_1, \phi_2)(x) = 0 \forall x \in I$, esto es, o se anula $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ en todo I o no se anula en ningún $x \in I$.

En general,

$$\frac{d}{dx} (W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

Proposición 4 Sean $\phi_1(x), \phi_2(x)$ dos funciones. Si $\phi_1(x), \phi_2(x)$ son linealmente dependientes, entonces $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) = 0$.

Nótese que el recíproco no es necesariamente cierto; no se puede garantizar que si $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) = 0$ entonces $\phi_1(x), \phi_2(x)$ son linealmente dependientes. Lo que si es cierto es que si $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x_0) \neq 0$ en cierto x_0 , entonces $\phi_1(x), \phi_2(x)$ son linealmente independientes.

Proposición 5

Sean $\phi_1(x), \phi_2(x)$ funciones en el intervalo I . Si para todo $x \in I$ se verifica que $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) = 0$ y $\phi_2(x) \neq 0$, entonces $\phi_1(x), \phi_2(x)$ son linealmente dependientes

Proposición 6

El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden n es un espacio vectorial de dimensión n .

Proposición 7

Si la ecuación diferencial $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tiene una solución compleja $y = u(x) + iv(x)$, entonces $\text{Re}(y(x)) = u(x)$ y $\text{Im}(y(x)) = v(x)$ son también soluciones.

Proposición 8

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea real $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Si las condiciones iniciales son reales, entonces la solución general es real.

Proposición 9

Sea una ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dadas las soluciones $\phi_1(x)$ con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_01, y_0'(x_0) = y_0'01$ y $\phi_2(x)$ con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_02, y_0'(x_0) = y_0'02$ se verifica que, si las condiciones iniciales son linealmente independientes, entonces las soluciones $\phi_1(x), \phi_2(x)$ son linealmente independientes.

Ecuación completa

De forma similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, si se tiene una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación completa, se obtiene la solución general de la ecuación completa.

Siempre que se tenga y_h la solución general de la ecuación homogénea y y_c una solución particular de la ecuación completa, $y_h + y_c$ sería solución de la ecuación completa.

$$L[y_h(x) + y_c(x)] = L[y_h(x)] + L[y_c(x)] = 0 + b(x) = b(x)$$

Así mismo, la diferencia de dos soluciones particulares y_{c1}, y_{c2} de la ecuación completa, es solución de la ecuación homogénea. UNIVERSIDAD DEL SURESTE 30

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)] = b(x) - b(x) = 0$$

Proposición 10

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal completa es un espacio a fin con espacio vectorial el conjunto de las soluciones de su ecuación homogénea.

Métodos de resolución

Existen varios métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales completas (y homogéneas). A continuación estudiaremos el método de variación de las constantes y el método de los coeficientes indeterminados.

Método de variación de las constantes

Se trata de determinar $c_1(x)$, $c_2(x)$ tales que $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ sea una solución particular de la ecuación completa, donde $y_{gh} = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea. Exigiendo las condiciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= b(x) \end{aligned}$$

Se obtiene que la solución particular de la ecuación completa es

$$y_{pc} = y_2(x) \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)} dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x)b(x)}{W(x)} dx \quad (4.10)$$

Donde $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$. Si la ecuación fuera de la forma $a_0y'' + a_1y' + a_2y = b(x)$, entonces el coeficiente a_0 aparecería en la solución general

$$y_{pc} = y_2(x) \int \frac{y_1(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)} dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)} dx \quad (4.11)$$

Método de los coeficientes indeterminados

Este método solo puede aplicarse si $b(x)$ es una exponencial, un polinomio, seno, coseno o combinación de éstas (aditiva o multiplicativa).

$$b(x) = a \cdot e^{bx}$$

$$b(x) = P_m(x)$$

$$b(x) = a \cdot \cos(qx)$$

$$b(x) = b \cdot \operatorname{sen}(qx)$$

El Principio de Superposición dice que dada la ecuación diferencial lineal $y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ la solución general es $y = y_{gh} + y_{p1} + \dots + y_{pn}$, donde y_{gh} es la solución general de la ecuación homogénea e y_{pi} es una solución particular de:

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_i(x) \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Según la forma de $b(x) = f_i(x)$ se obtiene una solución particular para la ecuación completa, que debe multiplicarse por x^m donde m es la multiplicidad de la raíz excepcional (si ésta existiera). El cuadro 4.1 resume cómo tratar con las distintas formas de $b(x)$.

Todos estos resultados para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes de segundo grado, pueden generalizarse para un orden n cualquiera.

$b(x)$	y_p	raíz exc.
a	A (o $x^m A$ si la raíz es 0)	0
ax^m	$A_0x^n + \dots + A_n$	0
$P_n(x)$	$A_0x^n + \dots + A_n$	0
ae^{mx}	Ae^{mx}	m
$P_n(x)e^{mx}$	$(A_0x^n + \dots + A_n)e^{mx}$	m
$b \operatorname{sen}(qx)$	$A \cos(qx) + B \operatorname{sen}(qx)$	$\pm iq$
$a \cos(qx)$	$A \cos(qx) + B \operatorname{sen}(qx)$	$\pm iq$
$ae^{px} \operatorname{sen}(qx)$	$(A \cos(qx) + B \operatorname{sen}(qx))e^{px}$	$p \pm iq$
$ae^{px} \cos(qx)$	$(A \cos(qx) + B \operatorname{sen}(qx))e^{px}$	$p \pm iq$
$P_n(x)e^{px} \operatorname{sen}(qx)$	$[(A_0x^n + \dots + A_n) \cos(qx) + (B_0x^n + \dots + B_n) \operatorname{sen}(qx)]e^{px}$	$p \pm iq$
$P_n(x)e^{px} \cos(qx)$	$[(A_0x^n + \dots + A_n) \cos(qx) + (B_0x^n + \dots + B_n) \operatorname{sen}(qx)]e^{px}$	$p \pm iq$

Cuadro 4.1: Relación de soluciones particulares y_p y sus raíces excepcionales para distintos coeficientes independientes $b(x)$ de la ecuación diferencial lineal completa.

Proposición 11

Si r_1, r_2, \dots, r_s son las raíces reales del polinomio característico con orden de multiplicidad m_1, m_2, \dots, m_s respectivamente, entonces para cada $i = 1, \dots, s$ las funciones $x^j e^{r_i x} \forall j < m_i$ son soluciones de la ecuación $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ y la solución general será:

$$y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} x^j e^{r_i x} \tag{4.12}$$

Con $c_{ij} \in \mathbb{R}$ Constantes.

Definición 4

Un sistema fundamental de soluciones es un conjunto de soluciones linealmente independientes cuya combinación lineal es la solución general.

Ecuaciones de orden n

Proposición 12 Si $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, r_l = \alpha_l + i\beta_l$ son las $2l$ raíces complejas del polinomio característico con orden de multiplicidad m_1, \dots, m_l respectivamente $r_{2l+1}, r_{2l+2}, \dots, r_s$ son las raíces reales del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_{2l+1}, m_{2l+2}, \dots, m_s$,

$$\begin{matrix} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & \dots, & x^{m_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \\ e^{\alpha_1 x} \sen \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \sen \beta_1 x, & \dots, & x^{m_1-1} e^{\alpha_1 x} \sen \beta_1 x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\alpha_n x} \cos \beta_n x, & x e^{\alpha_n x} \cos \beta_n x, & \dots, & x^{m_n-1} e^{\alpha_n x} \cos \beta_n x \\ e^{\alpha_n x} \sen \beta_n x, & x e^{\alpha_n x} \sen \beta_n x, & \dots, & x^{m_n-1} e^{\alpha_n x} \sen \beta_n x \\ e^{r_{2l+1} x}, & x e^{r_{2l+1} x}, & \dots, & x^{m_{2l+1}-1} e^{r_{2l+1} x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{r_s x}, & x e^{r_s x}, & \dots, & x^{m_s-1} e^{r_s x} \end{matrix}$$

Son las $n = \sum_{j=1}^l 2m_j + \sum_{j=2l+1}^s m_j$ soluciones $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$, que serán linealmente independientes si y solo si $W(\phi_1, \dots, \phi_n) \neq 0$.

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n es un espacio vectorial de dimensión n . El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea (completa) de orden n es un espacio afín de dimensión n asociado al espacio vectorial del conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Método de variación de las constantes

Hemos estado hablando de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$, tenemos la solución general de la ecuación homogénea y_{gh} , necesitamos una solución particular de la completa y_p .

$$\begin{aligned} y_{gh}(x) &= c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \\ y_p(x) &= c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x) \end{aligned}$$

Necesitamos hallar las n funciones $c_1(x), \dots, c_n(x)$ y para ello necesitamos n condiciones iniciales. Imponemos las condiciones.

$$\begin{aligned} c_1'(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n(x) &= 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) &= b(x) \end{aligned}$$

Y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y_p &= c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x) \\ y_p' &= c_1(x)\varphi_1'(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n'(x) \\ &\vdots \\ y_p^{(n-1)} &= c_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Substituímos en la ecuación diferencial con las derivadas y obtenemos UNIVERSIDAD DEL SURESTE 34

$$c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = b(x) \quad (4.13)$$

Añadiendo esta condición a las $n - 1$ anteriormente impuestas, obtenemos un sistema de n ecuaciones (¿cuáles?) con n incógnitas $c_0(x), \dots, c_{n-1}(x)$ cuyo determinante es $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) \neq 0$. Así, las soluciones son

$$c'_k(x) = \frac{W_k(x) \cdot b(x)}{W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x)} \quad (4.14)$$

Donde W_k tiene $(0, \dots, 0, 1)$ en la columna k -ésima y el resto de columnas coinciden con $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x)$. Luego,

$$c_k(x) = \int \frac{W_k(x) \cdot b(x)}{W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x)} dx \quad (4.15)$$

Así que la solución particular de la ecuación completa será

$$y_p = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \int_{x_0}^x \frac{W_k(\xi) \cdot b(\xi)}{W(\phi_1, \dots, \phi_n)(\xi)} d\xi \quad (4.16)$$

Nótese que si la ecuación diferencial es de la forma $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x)$, entonces en la solución hay que dividir por a_0 , i.e.

$$y_p = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \int_{x_0}^x \frac{W_k(\xi) \cdot b(\xi)}{a_0 W(\phi_1, \dots, \phi_n)(\xi)} d\xi \quad (4.17)$$

Como siempre, el método de variación de las constantes es teóricamente bonito y se puede aplicar siempre, pero la dificultad estriba en resolver las integrales. Por otra parte, el método de los coeficientes indeterminados, solo es aplicable para ciertas formas de $b(x)$.

1.4.- Modelos para sistemas físicos.

Tipos de modelos:

1. Modelos mentales: son los propios de las personas. Son imprecisos, difíciles de comunicar y borrosos.

2. Modelos físicos: son costosos en tiempo y en dinero.

- Modelos estáticos: – Modelos a escala; modelos de imitación.
- Modelos dinámicos: – Analogías o modelos análogos; prototipos.

3. Modelos simbólicos:

• No matemáticos:

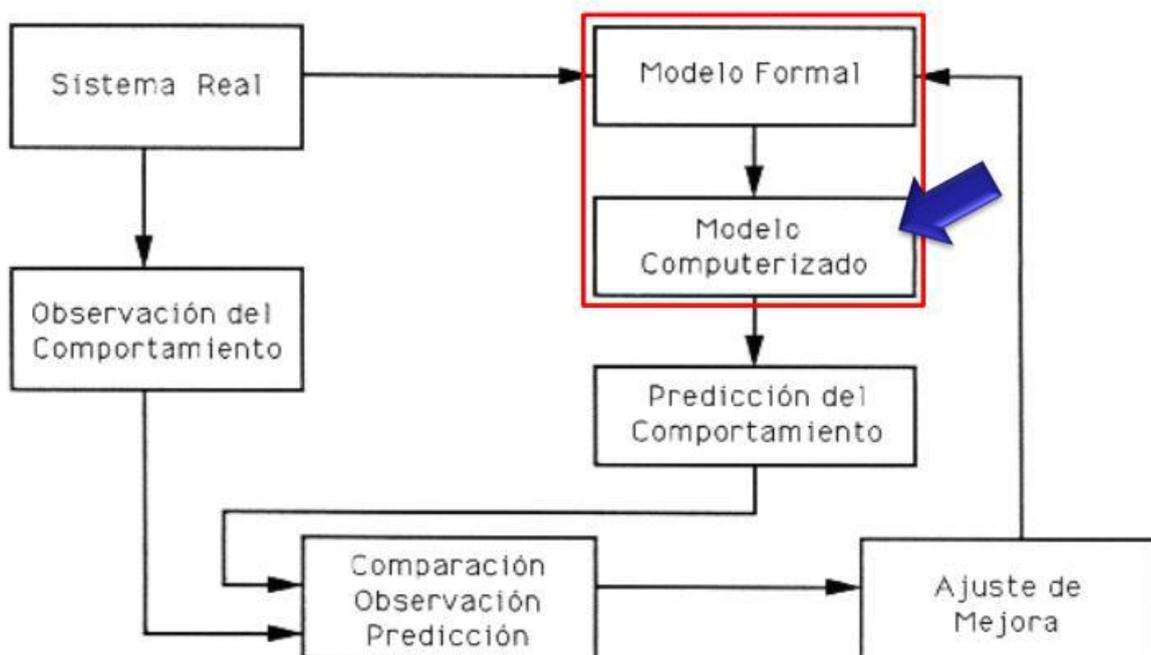
- Lingüísticos, ya sean verbales o escritos.
- Gráficos o esquemáticos: mapas, diagramas de flujos...

• Matemáticos:

- Relaciones entre las distintas variables del sistema a modelar en la correspondiente estructura matemática (ecuaciones).

Modelos matemáticos:

Construcción de un modelo matemático. Etapas.



Modelo computarizado:

Etapas a seguir para su elaboración:

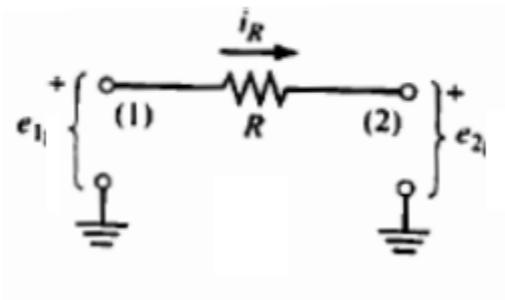
- 1.- Descomposición del sistema en subsistemas.
- 2.- Aplicación de leyes de conservación (masa, momento, energía,...) en cada subsistema □
obtención de las ecuaciones características de cada subsistema.
- 3.- Particularización de las expresiones obtenidas para los valores de los parámetros característicos de los elementos del subsistema.
- 4.- Programación de ecuaciones del modelo a través de software apropiado (Simulink, Modelica,...).

Conceptos básicos:

– Ley de Ohm:

La corriente eléctrica (I) en un conductor (o circuito), es igual a la diferencia de potencial (V) sobre el conductor (o circuito), dividido por la resistencia (R) que opone a su paso.

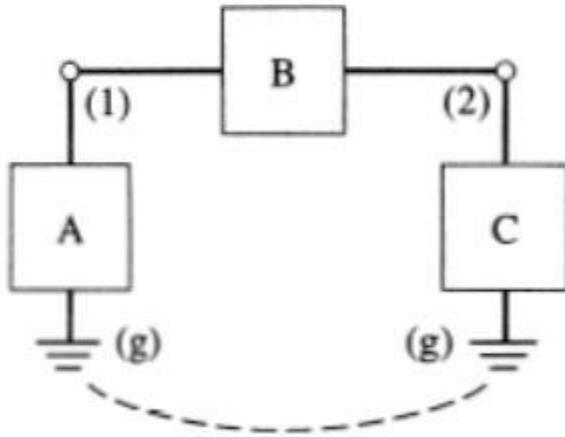
$$I = \frac{V}{R}$$



Leyes de Kirchoff: (ley de conservación)

- I. La suma de las tensiones en un lazo cerrado es igual a cero.

$$\sum V = 0$$

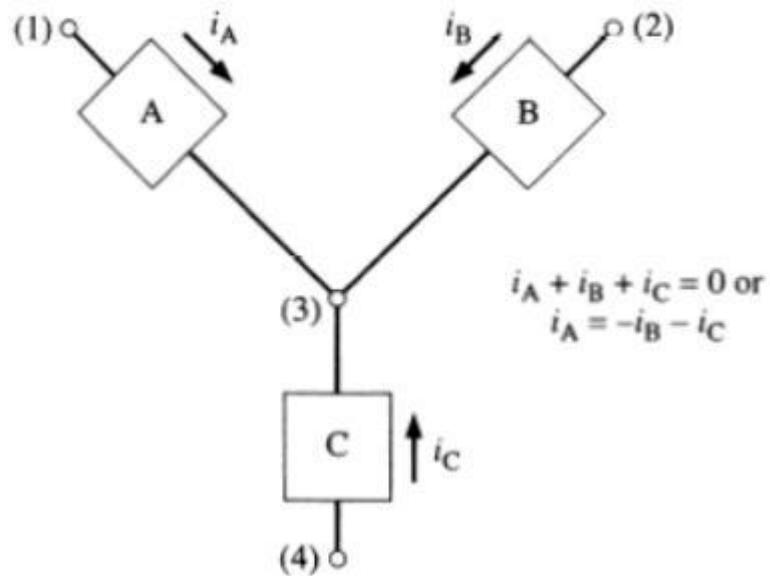


(a) $e_{g1} + e_{12} + e_{2g} = 0$ or
 $e_{1g} = e_{12} + e_{2g}$

Leyes de Kirchoff:

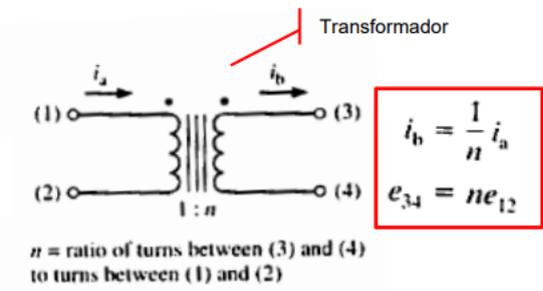
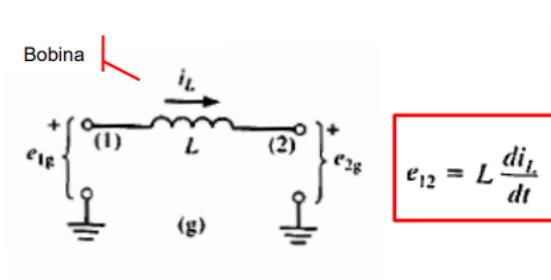
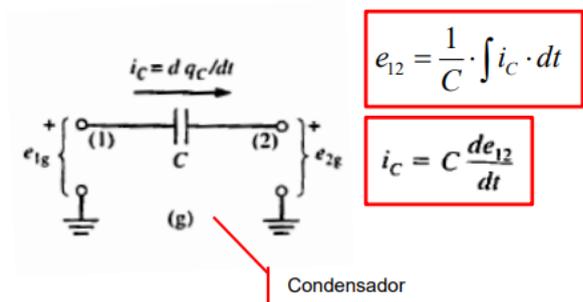
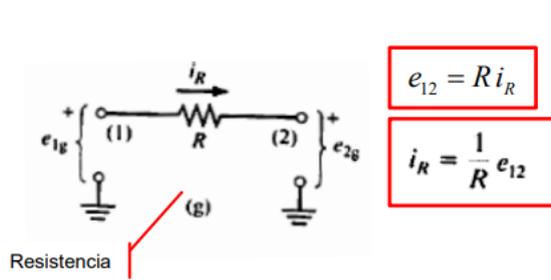
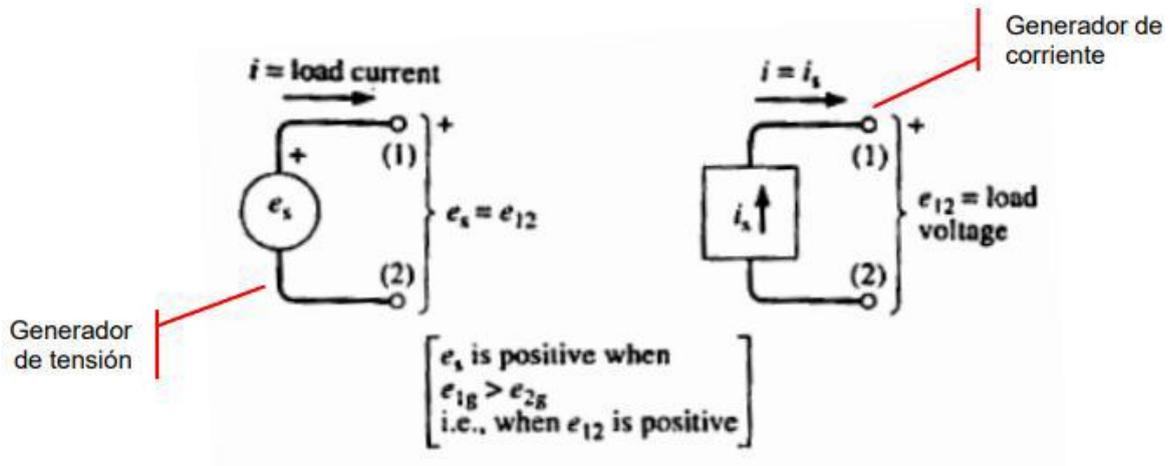
2. La suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen

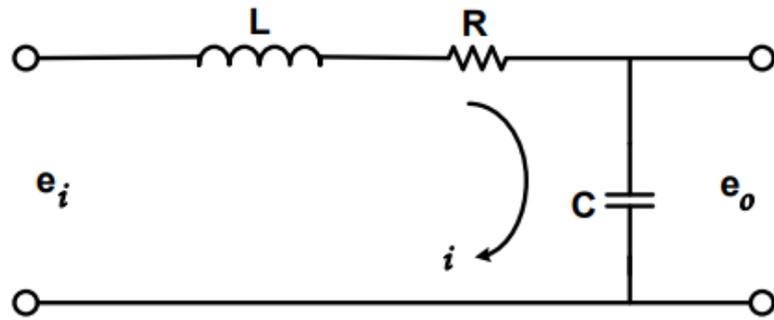
$$\sum I_e = \sum I_s \quad \Rightarrow \quad \sum I_e - \sum I_s = 0$$



del mismo.

Elementos constitutivos:





Circuito LRC

la ecuación de conservación:

Aplicamos

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = e_i(t)$$

$$e_o(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$$

Circuito LRC

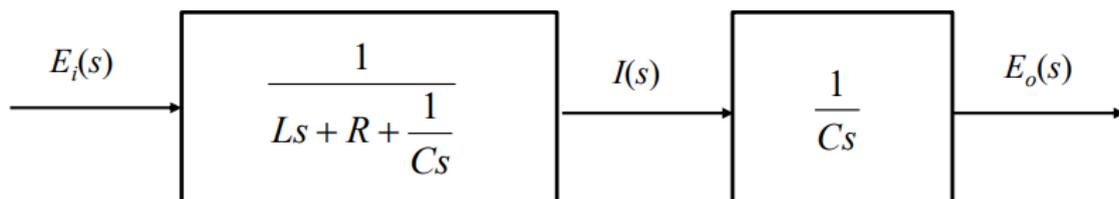
Aplicamos la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales:

$$L \cdot s \cdot I(s) + R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = E_i(s) \quad \rightarrow \quad I(s) = \frac{E_i(s)}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

Circuito LRC

Construimos el diagrama de bloques

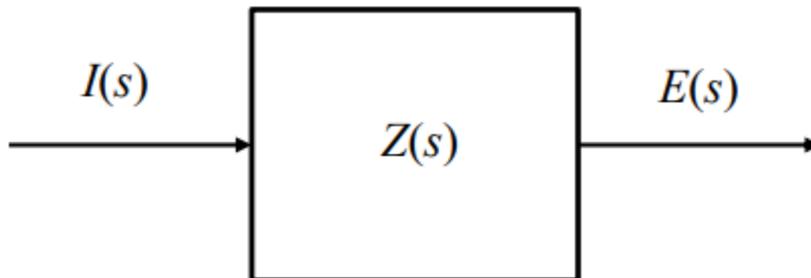


Y obtenemos la función de transferencia del circuito, reduciendo dicho diagrama.

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$

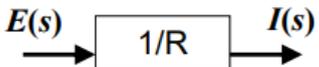
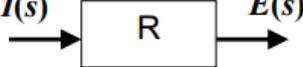
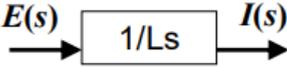
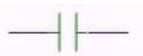
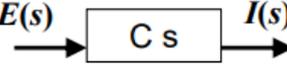
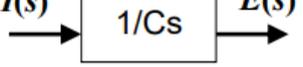
Impedancias complejas:

La impedancia compleja $Z(s)$ de un circuito de dos terminales es el cociente entre la transformada de Laplace de la tensión existente entre los terminales, $E(s)$, y la transformada de Laplace de la corriente a través del circuito, $I(s)$, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son cero.

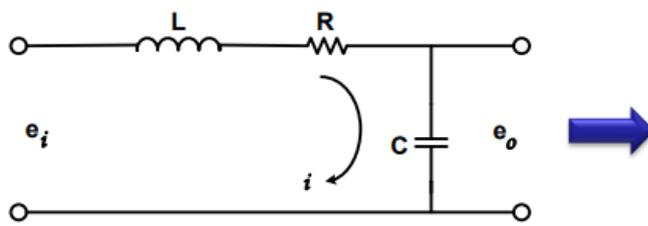


$$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)}$$

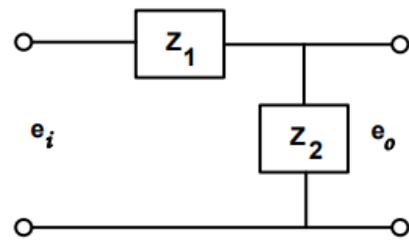
a se

ESQUEMA	ADMITANCIA COMPLEJA (FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA 1)	IMPEDANCIA COMPLEJA (FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA 2)
<p style="text-align: center;">R</p>  <p style="text-align: center;">$e(t) = R \cdot i(t)$</p>	$E(s) = R \cdot I(s) \rightarrow \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{R}$ 	$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = R$ 
<p style="text-align: center;">L</p>  <p style="text-align: center;">$e(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$</p>	$E(s) = L \cdot s \cdot I(s) \rightarrow \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{L \cdot s}$ 	$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = L \cdot s$ 
<p style="text-align: center;">C</p>  <p style="text-align: center;">$e(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$</p>	$E(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s) \rightarrow \frac{I(s)}{E(s)} = C \cdot s$ 	$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{C \cdot s}$ 

Impedancias



complejas:



$$Z_1 = L \cdot s + R$$

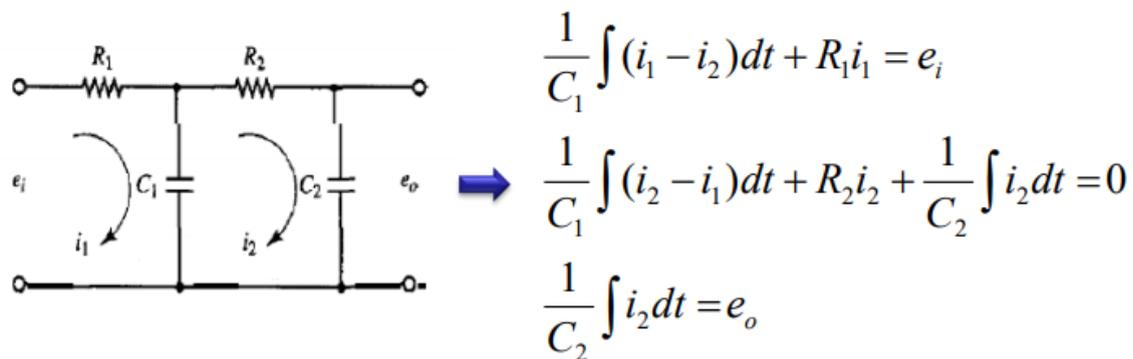
$$Z_2 = \frac{1}{C \cdot s}$$

Función de transferencia de circuito sería:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$

Funciones de transferencia de elementos en cascada:

Muchos sistemas realimentados tienen componentes que cargan a otros:

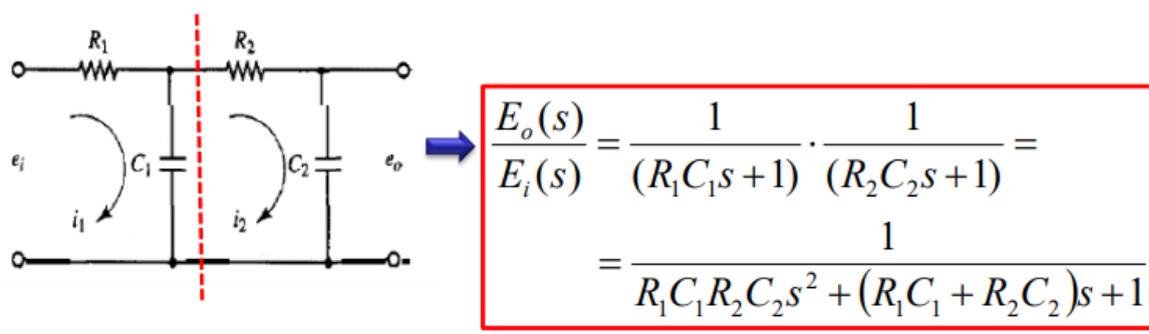


Aplicando la Transformada de Laplace (suponiendo condiciones iniciales nulas) la función de transferencia sería:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

Funciones de transferencia de elementos en cascada:

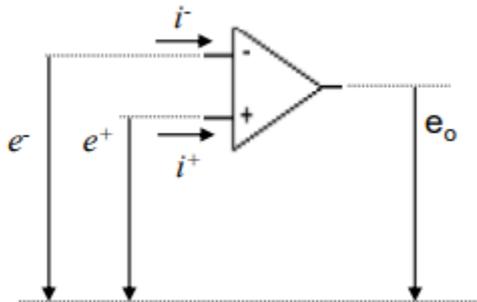
No obstante, considerando las dos mallas independientes, se obtendría el siguiente modelo alternativo.



La función de transferencia (errónea) obtenida así difiere de la obtenida anteriormente bajo suposición de carga entre componentes.

Amplificadores operacionales (AO)

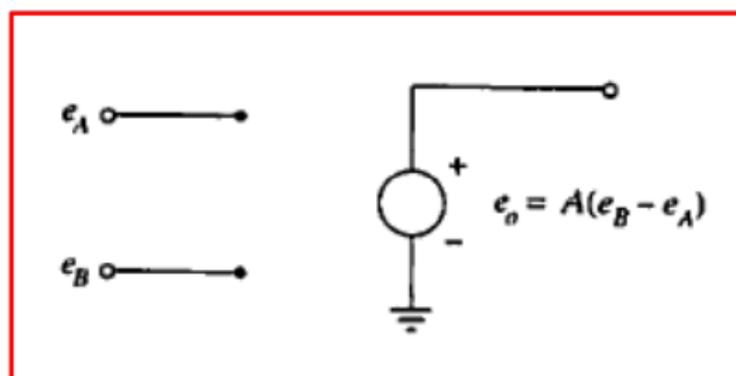
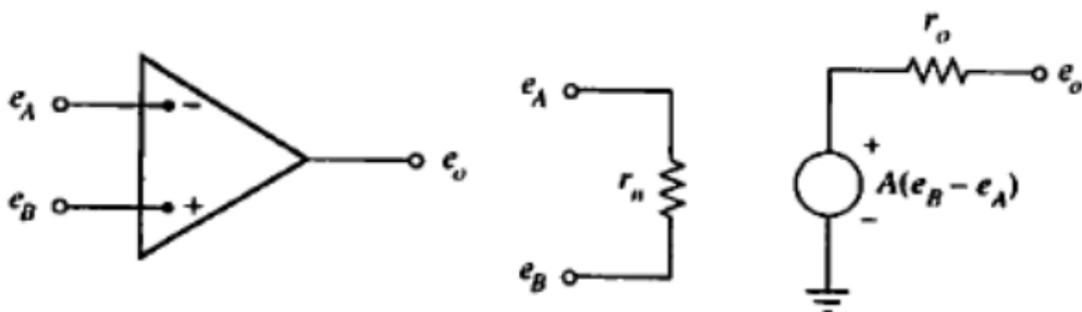
Son dispositivos electrónicos base de la electrónica analógica lineal y no lineal.



Propiedades del AO ideal:

1. Tierra virtual o corto virtual: $e^+ = e^-$ □ La tensión entre los terminales de entrada + y - es nula.
2. Impedancia de entrada infinita: $i^+ = i^- = 0$ □ La corriente entre los terminales de entrada + y - es nula.
3. Impedancia de salida nula: Salida como fuente de tensión ideal.
4. Ganancia infinita: $e_o = A(e^+ - e^-)$ □ A infinita.

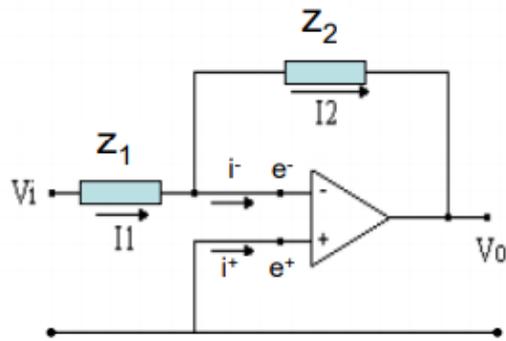
Amplificadores operacionales (AO)



AO ideal

Amplificador

inversor:



$$e^+ = e^- = 0; \quad i^+ = i^- = 0$$

$$I_1 = V_i / Z_1; \quad I_2 = -V_0 / Z_2$$

$$I_1 = I_2$$

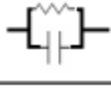


$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

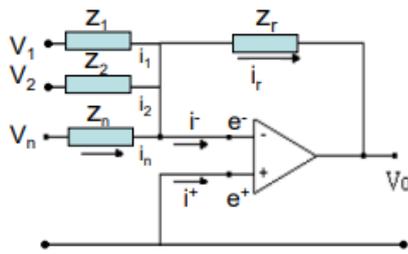
Amplificador inversor (cont.):

Configuraciones

frecuentes.

Z_1	Z_2	$G(s)$
R_1 	R_2 	$-\frac{R_2}{R_1}$
R_1 	$\frac{1}{sC_2}$ 	$-\frac{1}{R_1 C_2 s}$
$\frac{1}{sC_1}$ 	R_2 	$-R_2 C_1 s$
R_1 	$\frac{R_2}{1+sR_2C_2}$ 	$\frac{-R_2/R_1}{1+sR_2C_2}$
R_1 	$R_2 + \frac{1}{sC_2}$ 	$-\frac{R_2}{R_1} \frac{s+1/R_2C_2}{s}$
$\frac{R_2}{1+sR_1C_1}$ 	R_2 	$-R_2 C_1 (s + \frac{1}{R_1 C_1})$
$\frac{R_2}{1+sR_1C_1}$ 	$\frac{R_2}{1+sR_2C_2}$ 	$-\frac{C_1}{C_2} \left\{ (s + \frac{1}{R_1 C_1}) / (s + \frac{1}{R_2 C_2}) \right\}$

Amplificador



sumador

$$I_1 = V_1 / Z_1; \quad I_2 = V_2 / Z_2; \quad \dots; \quad I_n = V_n / Z_n;$$

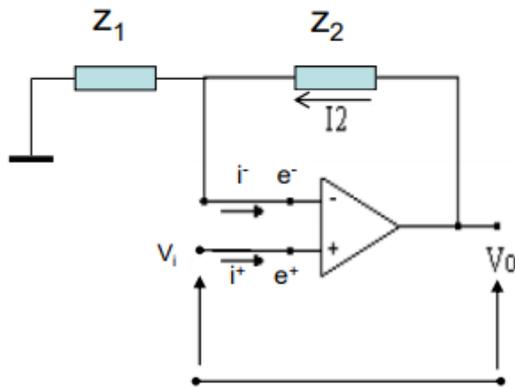
$$I_r = -V_o / Z_r;$$

$$I_r = \sum_{j=1}^n I_j;$$

$$V_o = -\sum_{j=1}^n V_j \frac{Z_r}{Z_j}$$

inversor:

Amplificador



NO

inversor:

$$i^- = 0; \quad e^- = V_i$$

$$I_1 = V_i / Z_1; \quad I_2 = (V_o - V_i) / Z_2$$

$$I_1 = I_2$$



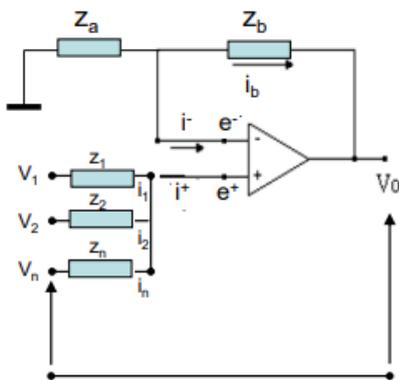
$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Amplificador

sumador

NO

inversor:



$$I_1 = (V_1 - e^+) / Z_1; I_2 = (V_2 - e^+) / Z_2; \dots; I_n = (V_n - e^+) / Z_n;$$

$$e^- = e^+;$$

$$(e^+ - V_o) / Z_b = -e^+ / Z_a;$$

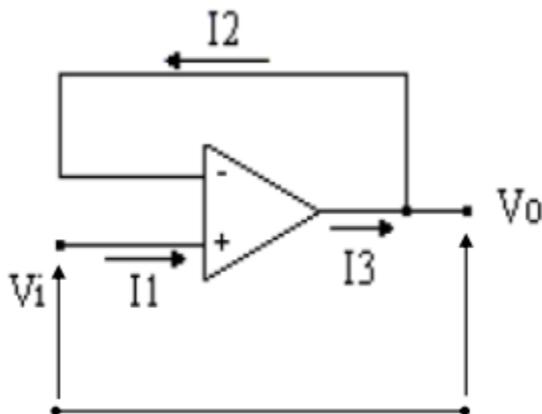
$$\sum_{j=1}^n I_j = 0; \sum_{j=1}^n (V_j - e^+) / Z_j = 0;$$

$$V_o = (1 + \frac{Z_b}{Z_a}) \frac{\sum_{j=1}^n \frac{V_j}{Z_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{Z_j}}$$

Seguidor

de

tensión:



$$V_o = V_i$$



$$G(s) = 1$$

1.5.- Solución de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio del tiempo.

Básicamente, las propiedades dinámicas de las plantas pueden ser aproximadas por las características temporales de sistemas más simples. Se entiende por modelos simples, aquellos que definen su dinámica por ecuaciones diferenciales lineales de primer o de segundo orden.

Como se verá en el siguiente capítulo, los modelos de los equipos pueden ser abordados por funciones de transferencias sencillas. Este paso se da en una doble vertiente. Desde el punto de vista del análisis, al reducir el modelo se podrá predecir sus características temporales, empleando expresiones matemáticas de los modelos sencillos.

Por otro lado, desde la visión del diseño, se suele emplear las medidas de las características temporales de los modelos simples para fijar los requisitos del comportamiento dinámico de los sistemas a compensar.

Por todas estas razones, este tema pretende analizar el comportamiento dinámico temporal de los sistemas simples, fijando su evolución temporal así como de tantos parámetros como exija, para su determinación matemática.

Sistemas de primer orden

Se denomina orden de un sistema al grado de su polinomio característico, esto es, al número de polos que tiene el sistema en su conjunto. La función de transferencia de un sistema de primer orden es:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s+a)} \quad (6.1)$$

Donde $N(s)$ es el polinomio del numerador de coeficientes constante al ser de tipo LTI. Por el principio de causalidad, el grado de $N(s)$ es uno o cero, bien es una constante o es un cero de primer orden. Considérese el caso más simple, el numerador corresponde a una ganancia. La relación entre la entrada y salida del sistema vendrá dada por una ecuación diferencia ordinaria de primer orden:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t) \quad (6.2)$$

Donde $x(t)$ representa la señal en la entrada e $y(t)$ es la salida. Aplicando a ambos lados de la igualdad la transformada de Laplace y considerando condiciones iniciales nulas, se conseguirá la FDT de los

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{1+Ts} = \frac{k/T}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.3)$$

sistemas de primer orden:

El valor de k será la ganancia estática del equipo y T será la constante de tiempo. En general, denominando a_i y b_i a los coeficientes de los polinomios del denominador y del numerador, respectivamente, de grado i , las dos FDT de primer orden de los sistemas causales serán:

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 x \rightarrow G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \quad (6.4)$$

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 x + b_1 \dot{x} \rightarrow G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad (6.5)$$

Sin embargo, para determinar la respuesta dinámica del sistema de primer orden se empleará el modelo de la ecuación (6.3). En el caso de que tuviera un cero de primer orden, desde luego, su dinámica cambiará. Pero desde el punto de vista metodológico, se planteará como la adición de un cero al sistema simple definido en la ec. (6.3). Estos aspectos serán tratados en el capítulo siguiente. Por tanto, se va a tratar de definir la respuesta dinámica de un sistema simple de primer orden y si poseyese un cero, su efecto se verá como una adición a la dinámica del sistema simple.

Respuesta temporal ante la entrada en escalón

Para analizar la dinámica del sistema de primer orden se requiere conocer qué tipo de entrada excitará al equipo. Como a priori no se conoce la naturaleza de esta señal, tal cual se comentó en el anterior capítulo, se emplearán las señales de pruebas. En el dominio temporal se definieron tres entradas normalizadas: escalón, rampa y parábola. Por dicha razón, la caracterización de los sistemas de primer y segundo orden en el dominio temporal se dará con estas excitaciones unitarias.

Suponiendo un sistema de primer orden simple caracterizado por su ganancia k y su constante de tiempo T , al ser estimulado por una señal de entrada en escalón unitario evolucionará a partir de la convolución entre la entrada y el sistema. Aplicando las transformadas de Laplace y haciendo descomposición en fracciones simples, la respuesta transformada valdrá:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{1+sT} = k \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+sT} \right) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.6)$$

Empleando el cálculo de los residuos será fácil de determinar la anti transformada y por ende la evolución temporal de la señal de salida, en función de sus dos parámetros característicos, k y T:

$$\left. \begin{aligned} k_1 = [sY(s)]_{s=0} = k \\ k_2 \left[\left(s + \frac{1}{T} \right) Y(s) \right]_{s=-\frac{1}{T}} = -k \end{aligned} \right\} y(t) = k(1 - e^{-t/T}) \quad (6.7)$$

Pero antes de representar la evolución temporal de un sistema de primer orden simple con una entrada en escalón, véase la correlación entre el dominio complejo y el temporal. Utilizando el teorema del valor final sobre la transformada de Laplace de la salida y haciendo el límite cuando el tiempo tiende a infinito en la ec.(6. 7), los resultados son idénticos. La salida alcanzará, en el régimen permanente, el nivel de la ganancia estática del sistema, k:

$$\text{Valor final: } \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = k \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k$$

Nótese que si el módulo de la ganancia, |k|, es mayor que uno el sistema amplifica, en caso contrario, atenúa, esto es, la amplitud de la salida es más pequeña que la entrada. Para resolver el valor inicial sólo basta con aplicar el teorema del valor inicial sobre la ec.(6. 6) o hacer tender el tiempo a cero en la ec. (6. 7):

$$\text{Valor inicial: } \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$$

La constante de tiempo del sistema, T, define la rapidez del equipo. De hecho, cuando el intervalo de tiempo recorrido desde el inicio de la estimulación hasta la constante de tiempo, la señal de salida ya ha alcanzado una buena parte de su recorrido:

$$\text{Valor } t = T: \qquad y(t = T) = k(1 - e^{-1}) = 0.632k \qquad (6.8)$$

Se define el tiempo de establecimiento, t_s , como el que necesita el sistema para alcanzar el régimen permanente. El valor de la señal del permanente no es exactamente el valor final. Atendiendo a la ec. (6. 7) y si se pusiera la condición de lograr el valor de nivel de k ante una entrada en escalón unitario, el tiempo sería infinito y no habría medida de comparación entre estos sistemas sobre su velocidad de respuesta. Por dicha razón, se suele emplear el error del 5% o el 2% del valor final. En este curso, se empleará el 5% de error del valor del régimen permanente. Para un valor de tres veces la constante de tiempo del sistema de primer orden, T, coincide con llegar al 5% de error del valor final:

Valor $t = 3T$: $y(t = 3T) = k(1 - e^{-3}) = 0.95k$ (6.9)

Por tanto, para sistemas de primer orden simples, el tiempo de establecimiento es de tres veces la constante de tiempo. Si la definición está dada con el 2%, entonces el tiempo de establecimiento es de cuatro veces la constante de tiempo.

Concluyendo, si el sistema es de primer orden simple, los valores característicos pueden ser determinados experimentalmente ante la respuesta de una entrada en escalón unitario. La ganancia estática, k , será el valor final de la señal de salida y la constante de tiempo, T , está dada por el tiempo en que alcanza 0.632 veces el valor de k o tres veces su valor coincidirá con el tiempo de establecimiento, t_s , esto es, el tiempo en alcanzar la señal $0.95k$.

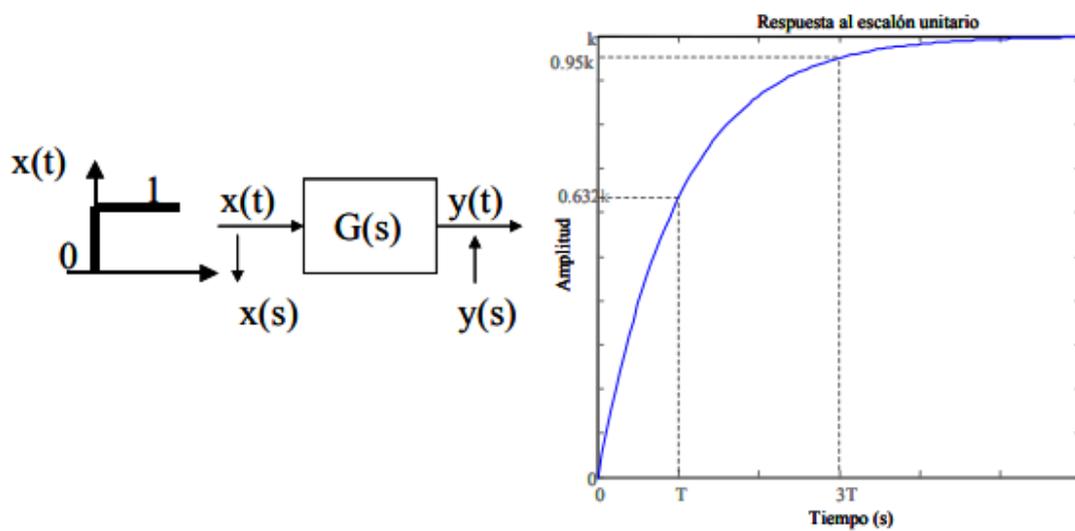


Figura 6. 1. Respuesta de un sistema de primer orden simple ante una entrada en escalón unitario

Respuesta impulsional

La respuesta impulsional de un sistema coincide con su propia función de ponderación, $g(t)$. De hecho, esta propiedad es empleada como técnica experimental para realizar la identificación de sistemas. La forma de demostrarlo consiste en determinar la transformada de Laplace de la excitación impulsional y luego aplicar el teorema de la convolución continua. Se define una entrada impulsional, aquella que en un tiempo infinitesimal, ε , da un pulso de energía que tiende a ser infinito, $1/\varepsilon$.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \text{ o } t > \varepsilon \end{cases} \quad (6.10)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

Su transformada de Laplace coincide con la unidad:

$$L[\delta(t)] = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon s} [1 - e^{-s\varepsilon}] \stackrel{H}{=} \frac{s\varepsilon e^{-s\varepsilon}}{s} = 1 \quad (6.11)$$

Concluyendo que al dar una entrada de este tipo, la señal de salida coincide con la propia naturaleza de la planta, $y(t)=g(t)$, por el teorema de la convolución. Para el caso que ocupa de sistemas simples de primer orden, resultará:

$$Y(s) = G(s) = \frac{k}{1+sT} \Rightarrow y(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} = g(t) \quad (6.12)$$

$$Y(s) = \frac{k}{1+sT} = \frac{k/T}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.13)$$

Además, para sistemas LTI, la respuesta al impulso es la derivada de la salida al escalón:

$$y_{escalón}(t) = k(1 - e^{-t/T}) \quad \dot{y}_{escalón}(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} = g(t) \quad (6.14)$$

La aplicación de los teoremas del valor final y del inicial debe de coincidir con la respuesta de la excitación impulsional de los sistemas de primer orden, definido por la ec.(6.12):

$$\text{Valor final: } y(t \rightarrow \infty) = 0 \qquad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot 1 \cdot \frac{k}{1 + sT} = 0 \qquad (6.15)$$

$$\text{Valor inicial: } y(t \rightarrow 0) = \frac{k}{T} \qquad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot 1 \cdot \frac{k}{1 + sT} = \frac{k}{T} \qquad (6.16)$$

Los valores característicos de la salida cuando el tiempo coincide con la constante de tiempo o cuando el tiempo es de tres veces la constante de tiempo del sistema están dados por la ec.(6.12), simplemente sustituyendo:

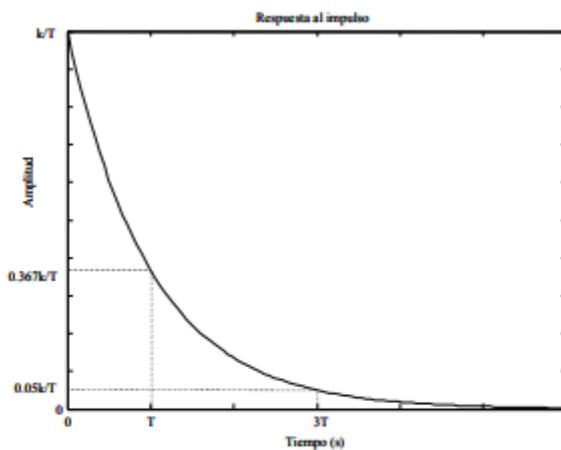


Figura 6. 2. Respuesta impulsional de un sistema simple de primer orden

$$y(t = T) = \frac{k}{T} e^{-1} = 0.367 \frac{k}{T}$$

$$y(t = 3T) = \frac{k}{T} e^{-3} = 0.05 \frac{k}{T}$$

1.6.- Solución de diferencia lineal.

En temas anteriores hemos estudiado técnicas para encontrar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales de variables separadas. Aunque muchos problemas interesantes conducen a ecuaciones de tipo diferencial, la mayor parte de ellas no pueden separarse. En este tema estudiaremos uno de los procedimientos usuales para resolver ecuaciones diferenciales lineales. De forma general, estas ecuaciones serán del tipo:

$$dy / dt = g(t) \cdot y + r(t)$$

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial de primer orden es lineal si puede escribirse en la forma,

$$dy / dt = g(t) \cdot y + r(t)$$

Donde $g(t)$ y $r(t)$ son funciones arbitrarias de t .

Un ejemplo puede ser,

$$dy / dt = t^2 \cdot y + \cos(t)$$

Donde $g(t) = t^2$ y $r(t) = \cos(t)$.

A veces es necesaria alguna operación previa para determinar si una ecuación es de tipo lineal. Por ejemplo, $ty + 2 = dy / dt - 3y$

Puede reescribirse como,

$$dy / dt = (t + 3)y + 2.$$

Algunas ecuaciones caen en varias categorías simultáneamente. Por ejemplo,

$$dy / dt = -2y + 8$$

es lineal con $g(t) = -2$, $r(t) = 8$.

La ecuación también es separable por ser una ecuación autónoma.

La palabra lineal en el nombre de la ecuación se refiere al hecho de que la variable dependiente y aparece en la ecuación elevada solo a la primera potencia. La ecuación

$$dy / dt = y^2$$

No es lineal ya que no puede ser reescrita en la forma

$$dy / dt = g(t) \cdot y + r(t).$$

Otros ejemplos de ecuaciones lineales son,

$$dP / dt = e^{2t}P - \sin(t)$$

$$dw/dt = \sin(t) \cdot w$$

Un ejemplo de ecuación no lineal es,

$$dz/dt = t \sin(z)$$

Para resolver una ecuación diferencial lineal, la reescribimos primero como

$$dy/dt + a(t) \cdot y = r(t)$$

Donde $a(t) = -g(t)$. Esto se parece a la derivada de un producto. Para tener la derivada de un producto, podemos multiplicar toda la ecuación por $\mu(t)$

$$\mu(t) dy/dt + \mu(t)a(t)y = \mu(t)r(t)$$

La regla del producto para la derivada dice que,

$$d(\mu(t) \cdot y(t))/dt = d\mu(t)/dt \cdot y(t) + \mu(t) dy(t)/dt$$

¿Cómo encontrar $\mu(t)$?

Para encontrarlo disponemos de dos condiciones:

$$d(\mu(t) \cdot y(t))/dt = d\mu(t)/dt \cdot y(t) + \mu(t) dy(t)/dt$$

$$\mu(t) dy/dt + \mu(t)y(t)a(t)$$

Puesto que queremos que $\mu(t)$ satisfaga ambas condiciones, hacemos

$$\mu(t) dy/dt + d\mu(t)/dt \cdot y(t) = \mu(t) dy/dt + \mu(t)y(t)a(t)$$

Cancelando el primer término, obtenemos:

$$d\mu(t)/dt \cdot y(t) = \mu(t)y(t)a(t),$$

Que es otra ecuación diferencial de variables separadas y cuya solución es,

$$\mu(t) = e^{\int R dt}$$

Donde hemos elegido como constante de integración 0.

Una vez que conocemos $\mu(t)$, podemos reescribir la ecuación inicial

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)r(t)$$

$$\text{Como, } d(\mu(t) \cdot y(t)) dt = \mu(t)r(t).$$

Integrando ahora ambos miembros de la ecuación, botemos que $\mu(t) \cdot y(t) = \int \mu(t)r(t)dt$

y, por tanto

$$y(t) = \int \frac{\mu(t) \int \mu(t)r(t)dt}{\mu(t)}$$

Siguiendo esta estrategia hemos encontrado una función $\mu(t)$, denominada factor de integración o factor integrante. El motivo es que si multiplicamos la ecuación original por este factor, podemos resolverla por integración.

Para calcular la solución explícita de una ecuación lineal del tipo,

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = r(t),$$

Procedemos según los siguientes pasos:

1.- Calculamos el factor de integración

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}.$$

2.- Multiplicamos ambos miembros de la ecuación diferencial lineal por dicho factor de integración.

3.- Procedemos a su integración.

$$\frac{dy}{dt} + 2t y = t - 1$$

Supongamos un estanque que inicialmente tiene un volumen inicial v_0 . En el instante inicial $t = 0$ el agua del estanque está limpia. El estanque tiene 2 corrientes de entrada que fluyen hacia él, la A y la B. Una tercera corriente C, fluye fuera del estanque.

Supongamos que de la corriente A fluye un volumen V_A por día hacia el estanque. De la corriente B fluye un volumen V_B por día hacia el estanque. A través de la corriente C se desaloja el agua que entra través de A y B, de forma que el volumen de agua que hay en el estanque es siempre constante. El agua aportada por la corriente A esta contaminada. El contaminante tiene una concentración en el agua de C_A . Asumimos que la concentración de contaminante en cada instante de tiempo es constante dentro del estanque (el agua está bien mezclada con el contaminante).

Aparte de esto, un día empieza a arrojarse al estanque un volumen V_t de tierra, que va reduciendo el volumen del estanque día a día.

Para que el estanque no se desborde, se ajusta el volumen que sale por C a V_C . ¿Cuál es la cantidad de contaminante que hay en el interior del estanque en un instante t ?

I.7.- Solución no homogénea de ecuaciones de diferencia no lineales.

Toda función y_P libre de parámetros arbitrarios que satisface la ecuación (7) se llama solución particular o integral particular de la ecuación; por ejemplo, se puede demostrar directamente que la función constante $y_P = 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y'' + 9y = 27.$$

Si y_1, y_2, \dots, y_k son soluciones de la ecuación (6) en un intervalo Z y y_P es cualquier solución particular de la ecuación (7) en Z , entonces, la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) + y_P \tag{10}$$

También es una solución de la ecuación (7) no homogénea. Si el lector lo medita tiene sentido, ya que la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$ se transforma en 0 mediante el operador $L = u, D^n + u, a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$, mientras que y_p se convierte en $g(x)$. Si usamos $R = n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación (6) de orden n , la expresión (10) viene a ser la solución general de (7).

Sea y_p , cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal, no homogénea, de orden n , ecuación (7), en un intervalo I , y sean y_1, y_2, \dots, y_n un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (6), en I . Entonces, la solución general de la ecuación en el intervalo es:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

en donde las $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACIÓN

Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si definimos $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, por la linealidad de L se debe cumplir:

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$; por consiguiente, según el teorema 4.5, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$, (y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

o sea
$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p(x).$$

Función complementaria En el teorema 4.6 vemos, que la solución general de una ecuación lineal no homogénea consiste en la suma de dos funciones:

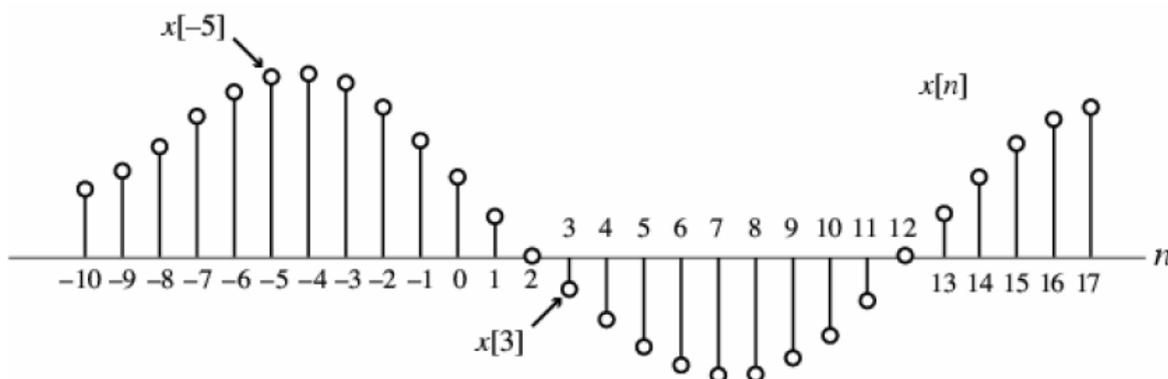
$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal $y_C = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$, que es la solución general de (6), se llama función complementaria para la ecuación (7). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se determina cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es, entonces,

1.8.- Superposición y convolucion en sistemas de tiempo discreto.

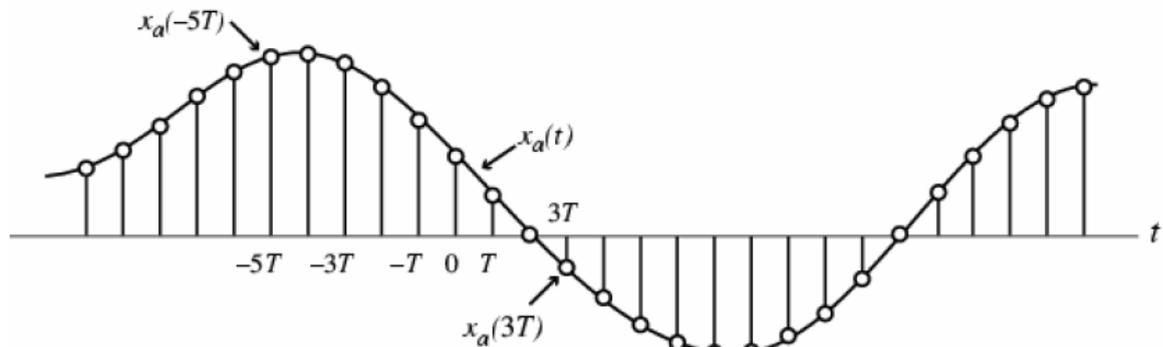
- Las señales discretas se representan con una secuencia de números denominados **muestras**.
- Una muestra de una señal o secuencia se denota por $x[n]$ siendo n entero en el intervalo $-\infty < n < \infty$ ($x[n]=x[nT]$)
- $x[n]$ está definida únicamente para valores enteros de n .
- Una señal en tiempo discreto se representa como $\{x[n]\}$
- Las señales discretas se pueden representar como una secuencia de números entre paréntesis $\{x[n]\} = \{-0.2, 2.2, 1.1, 0.2, -3.7, 2.9\}$; $x(n) = (1/4)^n \uparrow$
- La flecha \uparrow indica la muestra con índice $n=0$ La representación gráfica de una secuencia discreta es la siguiente:

La representación gráfica de una secuencia discreta es la siguiente:



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

En muchas aplicaciones la secuencia discreta se obtiene muestreando una señal continua $x_a(t)$ a intervalos de tiempo regulares:



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

T es el período de muestreo y su inversa se denomina frecuencia de muestreo. Si T está en segundos las unidades de la frecuencia de muestreo son ciclos por segundo o Hertzios.

Independientemente de que la secuencia $\{x[n]\}$ se haya obtenido por muestreo o no, se dice que $x[n]$ es la **n -ésima muestra** de la secuencia.

Si todos los valores de la secuencia $\{x[n]\}$ son reales se dice que la **secuencia es real**, en otro caso se dice que se trata de una **secuencia compleja**. UNIVERSIDAD DEL SURESTE 61

Una secuencia compleja $\{x[n]\}$ puede escribirse como:

$$\{x[n]\} = \{x[n] + j\{x[n]\}j\}$$

Siendo $x[n]$ *re* y $y[n]$ *im* las partes reales e imaginarias de la secuencia $\{x[n]\}$

El complejo conjugado de una secuencia se denota por

$$\{x^*[n]\} = \{x[n]\}^* = \{x[n] - j\{x[n]\}j\}$$

Ej. Secuencia Real:

$$\{x[n]\} = \{\cos 0.25n\}$$

Ej Secuencia Compleja:

$$\{y[n]\} = \{e^{j0.3n}\} = \{\cos 0.3n + j \sin 0.3n\} = \{\cos 0.3n\} + j\{\sin 0.3n\}$$

$$\{y_{re}[n]\} = \{\cos 0.3n\}; \{y_{im}[n]\} = \{\sin 0.3n\}$$

La secuencia $\{w[n]\} = \{\cos 0.3n\} - j\{\sin 0.3n\} = \{e^{-j0.3n}\}$ es la conjugada de $y[n]$,

es decir $\{w[n]\} = \{y^*[n]\}$

Una señal discreta se dice que es finita o de longitud finita si está definida

Únicamente en un intervalo finito $| 2 N \leq n \leq N$ con $-\infty < N, < \infty$ y $| 2 N \leq N$.

La longitud o duración de una secuencia es $| 2 | N = N - N + .$

Ej:

La secuencia: $x[n] = n^2, -3 \leq n \leq 4$ es finita de duración $4 - (-3) + 1 = 8$

La secuencia $y[n] = \cos(0.4n)$ es una secuencia infinita

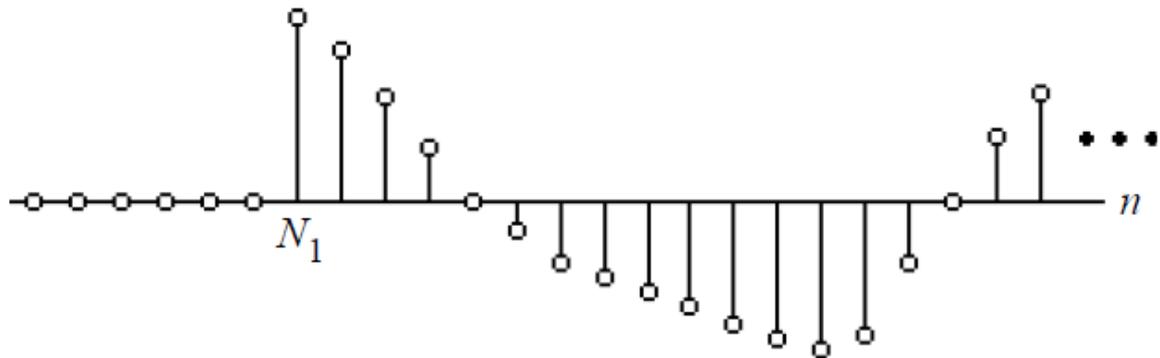
La longitud de una secuencia finita puede incrementarse añadiendo muestras de valor cero (zero padding).

Ej:

$$x_e[n] = \begin{cases} n^2, & -3 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 8 \end{cases}$$

Es una secuencia de longitud 12 obtenida añadiendo 4 ceros a la secuencia $x[n] = n^2, -3 \leq n \leq 4$

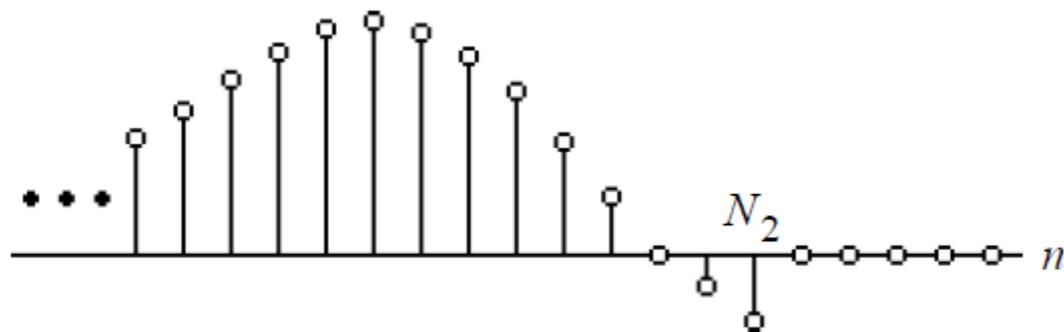
Se dice que una **secuencia es derecha** si para $n < N$ las muestras son cero.



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

Si $0 \leq n < N$ se dice que la secuencia es CAUSAL

Se dice que una secuencia es izquierda si para $n > N$ las muestras son cero.



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

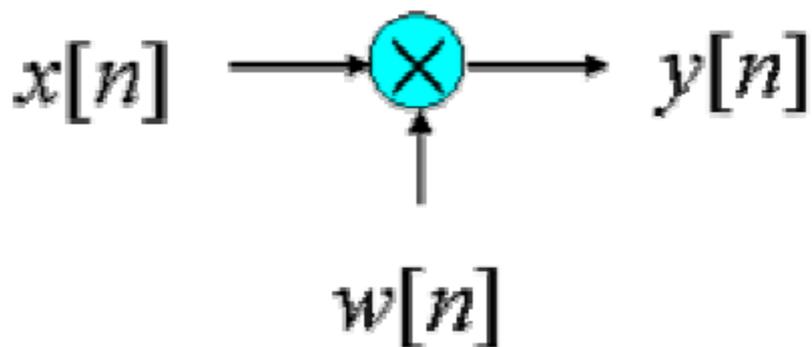
Si $0 \leq n < N$ se dice que la secuencia es ANTI-CAUSAL

1.9.- Operaciones con la convolucion.



Un sistema discreto realiza operaciones sobre una secuencia de entrada y proporciona una secuencia de salida que ha modificado sus propiedades de acuerdo con nuestras necesidades p. ejemplo eliminando ruido. Las operaciones básicas con secuencias son las siguientes:

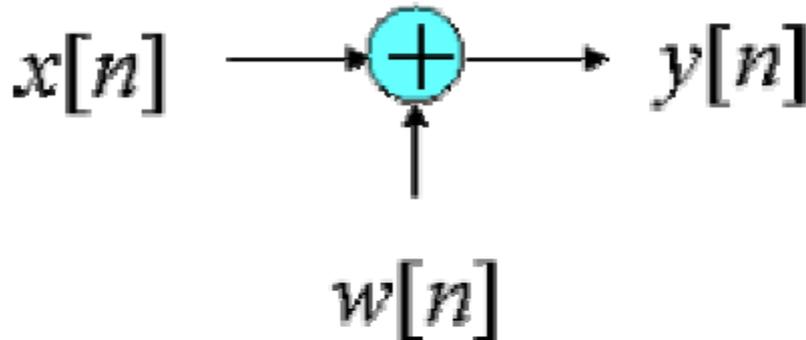
Producto o Modulación: $y[n] = x[n] \cdot w[n]$



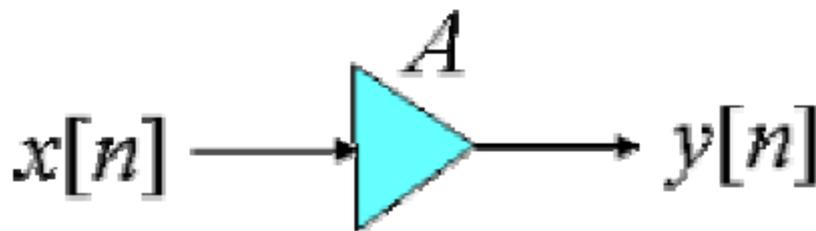
Una de las aplicaciones es obtener una secuencia de longitud finita a partir de una secuencia de infinitos términos. La secuencia finita por la que se multiplica se denomina VENTANA y al proceso

ENVENTANADO.

Sumador: $y[n] = x[n] + w[n]$

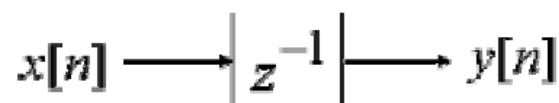


Producto por un escalar: $y[n] = A \cdot x[n]$

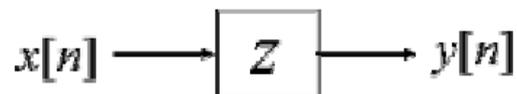


Desplazamiento temporal: $y[n] = x[n - N]$ ($N > 0$: Retardo, $N < 0$ Adelanto)

Retardo de 1 muestra:

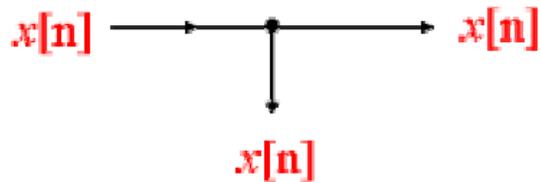


Adelanto de 1 muestra:



Inversión temporal: $y[n] = x[-n]$ (Se obtiene una secuencia reflejada respecto de $n=0$)

Bifurcación: Permite obtener copias de una secuencia



Ejemplos:

$$\{a[n]\} = \{3 \quad 4 \quad 6 \quad -9 \quad 0\} \quad \{b[n]\} = \{2 \quad -1 \quad 4 \quad 5 \quad -3\}$$

$$\{c[n]\} = \{a[n] \cdot b[n]\} = \{6 \quad -4 \quad 24 \quad -45 \quad 0\}$$

$$\{d[n]\} = \{a[n] + b[n]\} = \{5 \quad 3 \quad 10 \quad -4 \quad -3\}$$

$$\{e[n]\} = \frac{3}{2} \{a[n]\} = \{4.5 \quad 6 \quad 9 \quad -13.5 \quad 0\}$$

$$\{f[n]\} = \{a[-n]\} = \{0, -9, 6, 4, 3\}$$

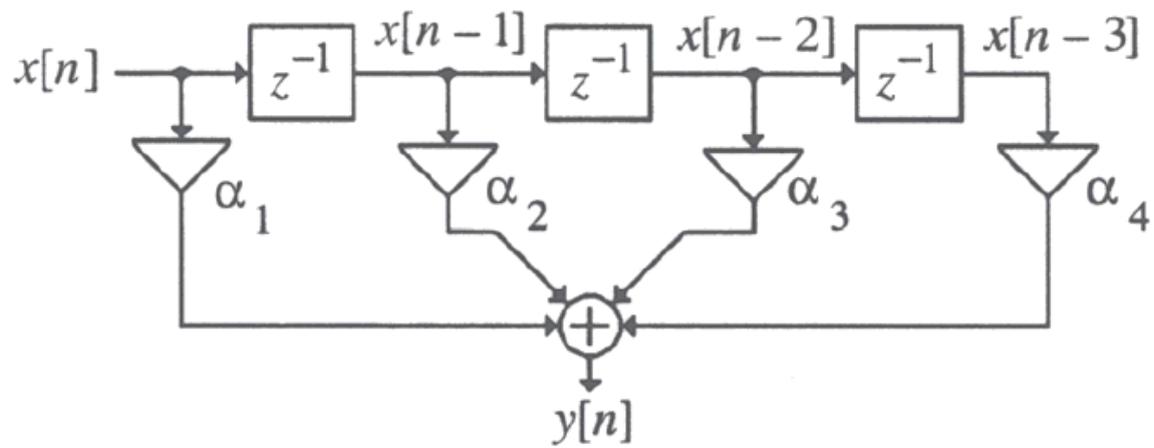
Para

hacer operaciones con secuencias es necesario que ambas tengan el mismo número de elementos. Si esto no se verifica siempre es posible igualar el número de elementos mediante la técnica de añadir ceros (*zeropadding*).

Combinación de operaciones básicas:

Podemos tener sistemas más complejos mediante la combinación de operaciones básicas. La representación gráfica se denomina DIAGRAMA

DE BLOQUES e indica las operaciones realizadas y el sentido de flujo de los datos.



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

$$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3]$$

Modificación de la frecuencia de muestreo:

Dada una secuencia $x[n]$ muestreada a una frecuencia F_T nos permite obtener una secuencia $y[n]$ muestreada a una frecuencia F_T'

La relación entre frecuencias es:

$$R = \frac{F_T'}{F_T} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Frec. Final} \\ \leftarrow \text{Frec. Original} \end{array} \right.$$

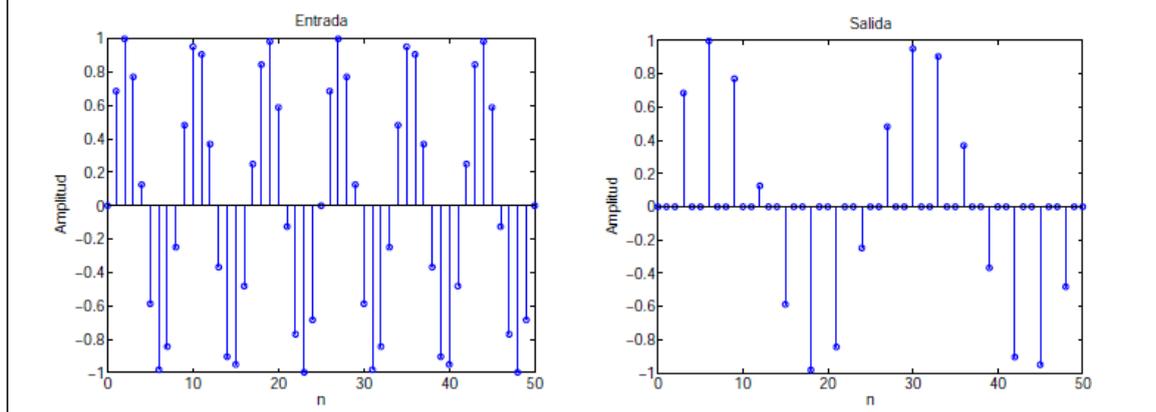
Si $R > 1$ se habla de INTERPOLACIÓN “Añadimos muestras”

Si $R < 1$ se habla de DIEZMADO. “Eliminamos muestras”

INTERPOLACIÓN

Si incrementamos la frecuencia de muestreo por un factor $L > 1$, siendo L un entero, insertamos $L-1$ ceros entre muestras consecutivas.

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow x_{uL}[n]$$

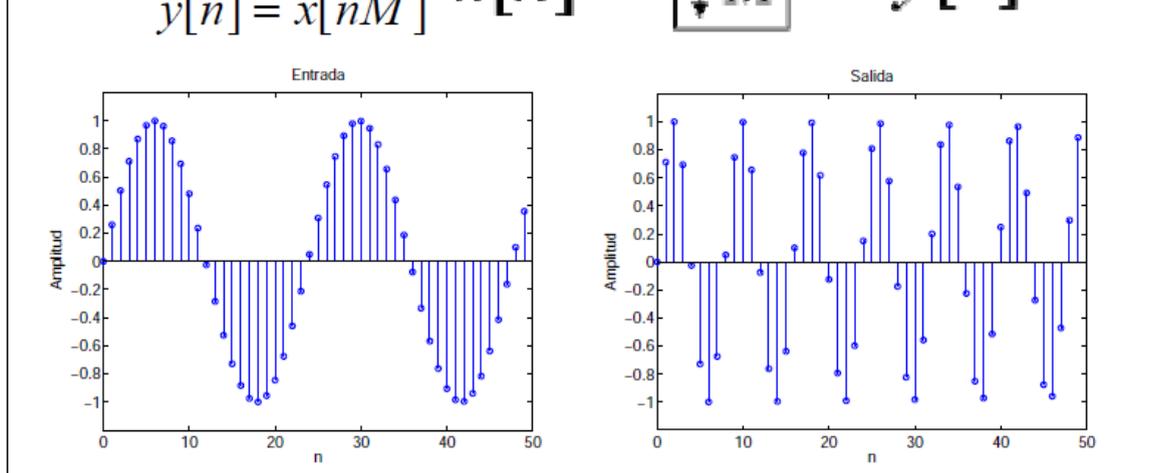


Posteriormente mediante un proceso de filtrado las muestras de valor cero se sustituirán por valores interpolados entre las muestras existentes.

DIEZMADO

Si decrementamos la frecuencia de muestreo por un factor $M > 1$, siendo M un entero, tomamos una de cada M muestras de la señal original y descartamos las $M-1$ intermedias.

$$y[n] = x[nM] \quad x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$



1.10.- Calculo de la secuencia respuesta al impulso.

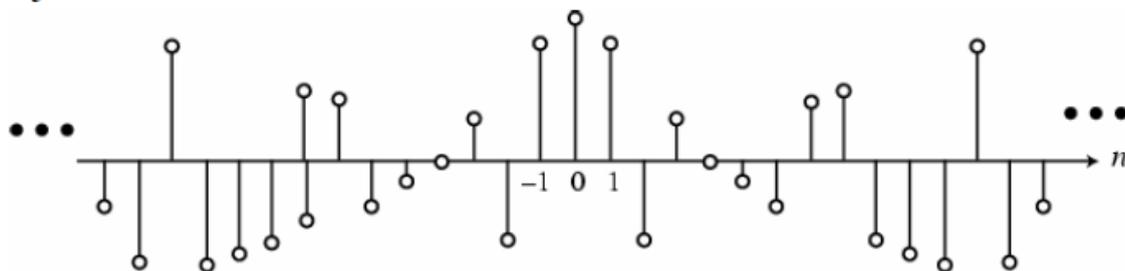
Las secuencias se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios

Simetría:

SECUENCIA CONJUGADA SIMÉTRICA: $x[n] = x^*[-n]$.

$x[0]$ es un número real. Si $x[n]$ es REAL se dice que se trata de una secuencia PAR.

Ej. Secuencia PAR



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

SECUENCIA CONJUGADA ANTISIMÉTRICA: $x[n] = -x^*[-n]$

$x[0]$ es un número IMAGINARIO PURO. Si $x[n]$ es real se dice que se trata de una secuencia IMPAR, en este caso $x[0]=0$.

Cualquier secuencia se puede poner como suma de dos secuencias una conjugada simétrica y otra conjugada antisimétrica.

$$x[n] = x_{cs}[n] + x_{ca}[n]$$

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

Si particularizamos para secuencias reales, la propiedad nos dice que cualquier secuencia real se puede poner como suma de una secuencia par y otra impar.

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n]$$

$$x_{par}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_{impar}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

Ejemplo:

Consideremos la secuencia $\{g[n]\} = \{0, 1+j4, -2+j3, 4-j2, -5-j6, -j2, 3\}$

$$\{g^*[n]\} = \{0, 1-j4, -2-j3, 4+j2, -5+j6, j2, 3\}$$

$$\{g^*[-n]\} = \{3, j2, -5+j6, 4+j2, -2-j3, 1-j4, 0\}$$

La secuencia conjugada simétrica es:

$$\{g_{cs}[n]\} = \frac{1}{2}\{g[n] + g^*[-n]\} = \{1.5, 0.5+j3, -3.5+j4.5, 4, -3.5-j4.5, 0.5-j3, 1.5\}$$

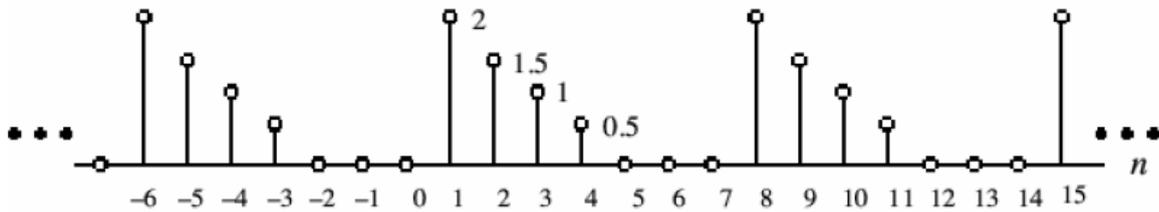
$$\{g_{ca}[n]\} = \frac{1}{2}\{g[n] - g^*[-n]\} = \{-1.5, 0.5+j, 1.5-j1.5, -j2, -1.5-j1.5, -0.5+j, 1.5\}$$

Se puede verificar fácilmente que $g_{cs}[n] = g_{cs}^*[-n]$ y $g_{ca}[n] = -g_{ca}^*[-n]$

Periodicidad

Una secuencia $x[n]$ se dice que es periódica si se verifica que $x[n] = x[n \pm N]$. El menor valor de N que verifica esta propiedad se denomina período fundamental.

Si no se verifica la propiedad anterior se dice que la secuencia es aperiódica.



Extraído de: Digital Signal Processing. A computer-based approach. S. K. Mitra

1.11.- Funciones singulares y respuesta de señales de tiempo continuo.

Energía de una secuencia:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Una secuencia infinita puede tener energía finita o no. Una secuencia finita siempre tiene energía finita.

Una señal de Energía Infinita y Potencia media finita se dice que es una **señal de Potencia**. Por ejemplo una señal periódica.

Una señal de Energía Finita y Potencia media cero se dice que es una **señal de Energía**. Ej.

Cualquier secuencia de duración finita.

$$x(n) = \{1, 3, 5\} \quad E = 36$$

Ejemplos: $x(n) = 0.5^n u(n) \quad E = 2$

$$x(n) = u(n) \quad E = \infty$$

Potencia media de una secuencia aperiódica: $P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K |x[n]|^2$

Si definimos la Energía de una secuencia en un intervalo finito $-K \leq n \leq K$,

$E_{x,K} = \sum_{n=-K}^K |x[n]|^2$ podemos expresar la potencia media como

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} E_{x,K}$$

Para una secuencia periódica de período N se define la Potencia media

como: $P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$

La potencia media de una secuencia infinita puede ser finita o infinita.

Ejemplo: Consideremos la secuencia causal

$$x[n] = \begin{cases} 3(-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |3(-1)^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |3|^2 = \infty$$

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \left(9 \sum_{n=0}^K 1 \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{9(K+1)}{2K+1} = 4.5$$

Una señal de Energía Infinita y Potencia media finita se dice que es una señal de Potencia. Por ejemplo una señal periódica.

Una señal de Energía Finita y Potencia media cero se dice que es una señal de Energía. Ej. Cualquier secuencia de duración finita.

NOTA:

Suma de términos de una **progresión aritmética**: $a_n = a_0 + n \cdot d$:

$$Suma = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n = \left(\frac{a_{N_1} + a_{N_2}}{2} \right) (N_2 - N_1 + 1)$$

$$\text{Ej: } Suma = \sum_{n=-2}^5 2n - 1 = \left(\frac{-5 + 9}{2} \right) (5 - (-2) + 1) = 16$$

Suma de términos de una **progresión geométrica**: $a_n = a_0 \cdot r^n \quad n \geq 0$

$$Suma = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n = \frac{a_{N_2} \cdot r - a_{N_1}}{r - 1} \quad \text{si alguno de los límites, } N_1, N_2 \text{ es infinito, para}$$

que se pueda realizar la suma es necesario que $|r| \leq 1$

Caso particulares:

$$Suma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{1 - r}$$

Ej:

$$Suma = \sum_{n=-2}^{\infty} 2(3^{-1})^{n-2} = 2 \cdot (3^{-1})^{-2} \sum_{n=-2}^{\infty} (3^{-1})^n \quad |r| = |3^{-1}| < 1 = 2 \cdot (3^{-1})^{-2} \frac{(3^{-1})^{\infty} - (3^{-1})^{-2}}{(3^{-1}) - 1} = \frac{-2 \cdot 3^4}{(3^{-1}) - 1} = 3^5$$

Otras

clasificaciones

Secuencia acotada: $|x[n]| \leq B_x < \infty$

$$\text{Ej. } |x[n]| = |\cos 0.3\pi n| \leq 1$$

Secuencia absolutamente sumable: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$

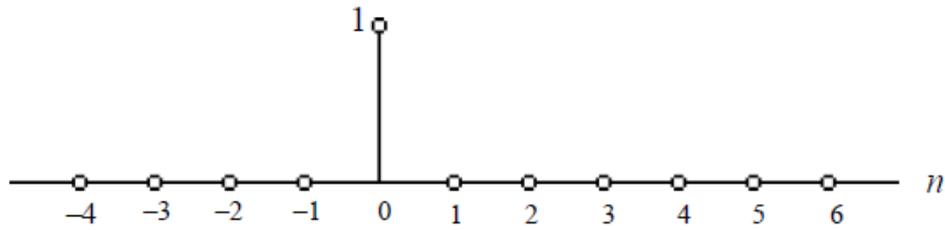
$$\text{Ej: } y[n] = \begin{cases} 0.3^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |0.3^n| = \frac{1}{1-0.3} = 1.42857 < \infty$$

Secuencia cuadrado sumable: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$

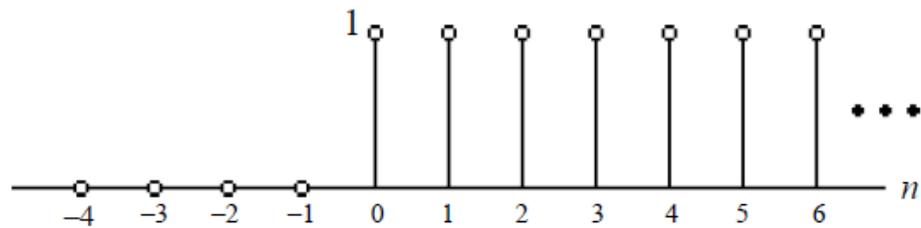
Ej: $h[n] = \frac{\sin(0.4\pi n)}{\pi n}$ Esta serie no es absolutamente sumable pero sí cuadrado sumable. (La suma es $\frac{\pi^2}{6}$)

Secuencias Discretas Básicas

Impulso unidad: $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$



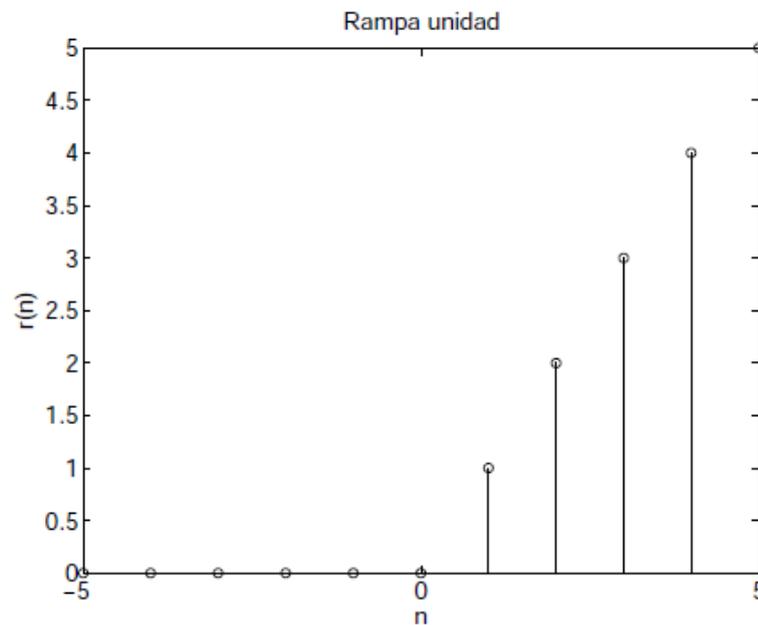
Escalón unidad: $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, (\text{causal})$



$u[-n-1] = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ 1, & n < 0 \end{cases} (\text{anticausal})$

Rampa unidad:

$$r[n] = n \cdot u(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



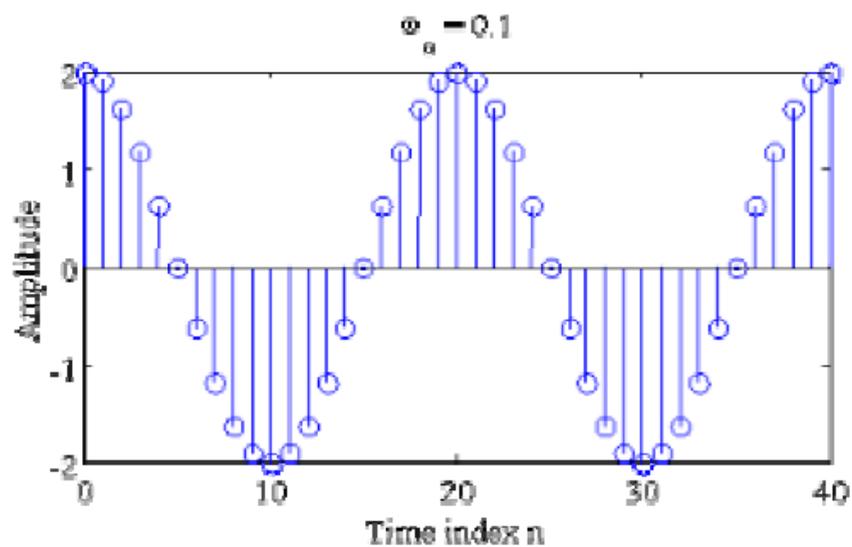
Secuencia sinusoidal:

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

ω_0 : frecuencia angular en radianes/muestra

A: Amplitud

ϕ : Fase



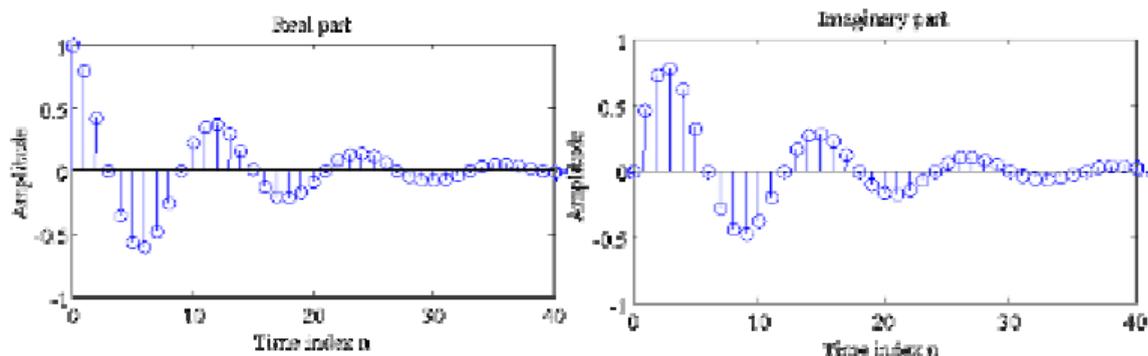
Secuencia exponencial: $x[n] = A \alpha^n, -\infty < n < \infty$

Si escribimos $\alpha = e^{(\sigma_o + j\omega_o)}$, $A = |A|e^{j\phi}$ y separamos en parte real e imaginaria $x[n] = |A|e^{j\phi}e^{(\sigma_o + j\omega_o)n} = x_{re}[n] + j x_{im}[n]$, obtenemos las secuencias:

$$x_{re}[n] = |A|e^{\sigma_o n} \cos(\omega_o n + \phi)$$

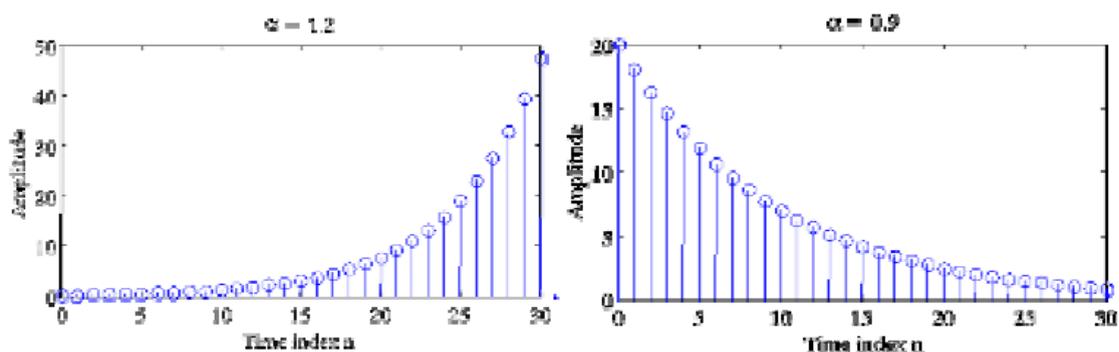
$$x_{im}[n] = |A|e^{\sigma_o n} \sin(\omega_o n + \phi)$$

Las partes reales e imaginarias son sinusoides puras para $\sigma_o=0$, crecientes para $\sigma_o>0$ y decrecientes para $\sigma_o<0$



$$x[n] = \exp\left(-\frac{1}{12} + j\frac{\pi}{6}\right)n$$

Exponenciales Reales: $x[n] = A \alpha^n, -\infty < n < \infty, A, \alpha \in \mathbb{R}$



Las secuencias sinusoidales, $A \cos(\omega_o n + \phi)$ y las secuencias exponenciales complejas $B \exp(j\omega_o n)$ son señales periódicas de período N si $\omega_o N = 2\pi r$, siendo N y r enteros; es decir, la frecuencia digital es un número racional

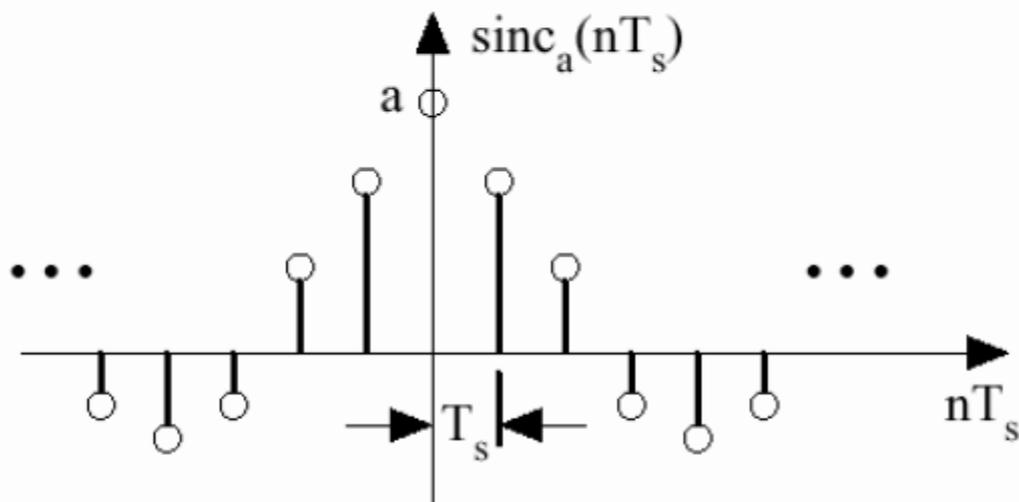
$$f = \frac{r}{N}$$

Si no se cumple la relación anterior la secuencia es no periódica. Ej: $x[n] = \sin(\sqrt{3}n + \phi)$.

Secuencia sin c:

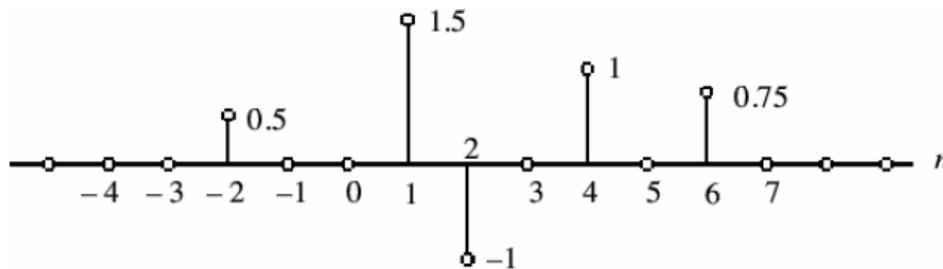
El secuencia es muy utilizada en procesamiento de señales. Se trata de una secuencia no causal de duración infinita.

$$\text{sinc}_a(nT_s) = \frac{\sin anT_s}{nT_s} \quad -\infty < n < \infty$$



Representación de secuencias arbitrarias mediante impulsos.

Cualquier secuencia discreta puede ser representada como una suma ponderada de secuencias impulso retardado.



$$x[n] = 0.5\delta[n + 2] + 1.5\delta[n - 1] - \delta[n - 2] + \delta[n - 4] + 0.75\delta[n - 6]$$

1.12.- Superposición y convolución en sistemas de tiempo continuo.

Un sistema discreto procesa una secuencia de entrada $x[n]$ para obtener una secuencia de salida $y[n]$ modificando su propiedades (salvo el sistema $y(n)=x(n)$).



El número de entradas y salidas puede ser uno, como en un multiplicador, o múltiple como ocurre en un bloque sumador o modulador, retardo, etc.

Ejemplos: $y(n) = 0.5(x(n) + x(n - 1))$

Sistema acumulador: La salida en un instante es la suma acumulada de las muestras anteriores.

$$y[n] = \sum_{\lambda=-\infty}^n x[\lambda] = \sum_{\lambda=-\infty}^{n-1} x[\lambda] + x[n] = y[n - 1] + x[n]$$

La relación entre la entrada y la salida también se puede escribir como:

$$y[n] = \sum_{\lambda=-\infty}^{-1} x[\lambda] + \sum_{\lambda=0}^n x[\lambda] = y[-1] + \sum_{\lambda=0}^n x[\lambda], \quad n > 0$$

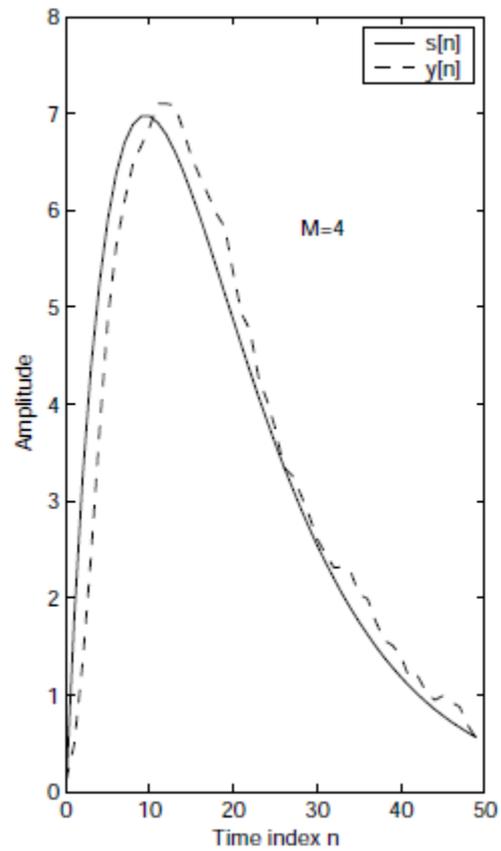
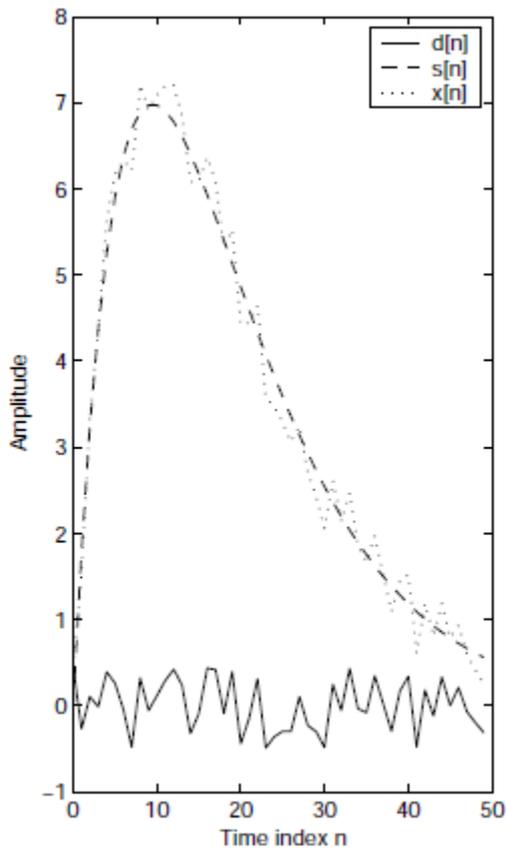
$y[-1]$ se denomina condición inicial. La última expresión en la que n está definida para valores positivos se denomina acumulador causal

Promediado de M muestras (prom. móvil): la salida en un determinado instante es el promedio de

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

la muestra actual y las M-1 muestras anteriores.

Este tipo de promediado se utiliza para eliminar ruido de una señal.



Unidad 2

INTRODUCCIÓN

2.1 Señales de variable discretas

Sea $x(n)$ una señal de variable discreta, es decir, una función definida para n entero. La figura 2.1 muestra una típica representación gráfica de una señal de este tipo. A n se le denomina número de muestra y a $x(n)$ la n -ésima muestra de la señal.

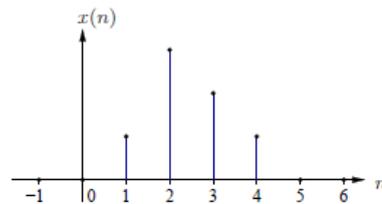


Figura 2.1: Representación gráfica de una función real de variable discreta $x(n)$.

Nótese que $x(n)$ no está definida para n no entero. Un error común es considerar que la señal es cero “entre” las muestras, cuando en realidad allí simplemente la función no está definida. La suposición de que la señal es cero entre muestras es válido solo para una señal de variable real $x(t)$, que es otro concepto diferente.

Además de la representación gráfica se utilizan aquí otras tres notaciones:

1. Funcional:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 5 - n & \text{para } 2 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases}$$

Esta representación es la forma más compacta de representar señales cuyo comportamiento puede ser expresado directamente por expresiones algebraicas cerradas.

2. Tabular

n	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$...	0	0	1	3	2	1	0	...

En programas computacionales como MatLab[12] u Octave[5] las señales se representan con esta notación, donde las dos filas de la tabla se interpretan como dos arreglos de datos independientes.

3. Como secuencia.

Una secuencia de duración infinita con el origen en $n = 0$ (indicado con “↑”) se representa como

$$x(n) = \{\dots, 0, 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \dots\}$$

Si la secuencia es 0 para $n < 0$ se suele representar como

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \dots\}$$

y si es finita

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1\}$$

Si la secuencia inicia en cero, entonces usualmente se omite la flecha:

$$x(n) = \{0, 1, 3, 2, 1\}$$

Por su brevedad y simpleza notacional, ésta será la representación de señales de preferencia en el presente texto.

2.1.1 Manipulaciones elementales de señales de variable discreta

Se describen a continuación algunas transformaciones elementales para señales de variable independiente discreta (o tiempo discreto). Estas transformaciones son la base de operaciones más complejas en el procesamiento digital de señales y se utilizarán a menudo en éste y los siguientes capítulos.

Desplazamiento

La señal $x(n)$ se desplaza k muestras sustituyendo la variable n por $n - k$. Si $k > 0$ la señal se retarda k muestras y si $k < 0$ la señal se adelanta k muestras.

En la manipulación fuera de línea (*off-line*) ambos tipos de desplazamiento son posibles; sin embargo, en sistemas de tiempo real o en línea (*on-line*), solo el retraso de la función es realizable.

Ejemplo 2.1 Utilizando desplazamientos exprese el escalón unitario $u(n)$ en términos de una suma de impulsos $\delta(n)$ desplazados.

Solución:

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(n-i)$$

2.1

Reflexión

Consiste en “plegar” la señal $x(n)$ en el instante $n = 0$, sustituyendo la variable n por su inverso aditivo $-n$.

Nótese que las operaciones de reflexión y desplazamiento no son conmutativas, es decir, no es lo mismo reflejar una señal y luego retardarla k unidades que retardar la señal y luego reflejarla, puesto que:

$$\underbrace{x((-n) - k)}_{\substack{\text{Reflexión,} \\ \text{Desplazamiento}}} = x(-n - k) \neq \underbrace{x(-(n - k))}_{\substack{\text{Desplazamiento,} \\ \text{Reflexión}}} = x(-n + k)$$

Escalado de variable o submuestreo

En el escalado de variable o *submuestreo* (en inglés *downsampling*) se sustituye la variable discreta n por κn con $\kappa \in \mathbb{N}^+$.

Si la señal analógica original $x_a(t)$ fue muestreada de forma homogénea con el intervalo de muestreo T entonces $x(n) = x_a(nT)$, de donde se deriva que $x(\kappa n) = x_a(n(\kappa T))$. Esto implica que el submuestreo equivale a utilizar un intervalo de muestreo de mayor duración, igual a κT .

Suma, multiplicación y escalado de secuencias

Todas estas operaciones afectan la amplitud de las muestras de una secuencia.

- Escalado de amplitud: $y(n) = Ax(n)$
- Suma de secuencias: $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$
- Producto: $y(n) = x_1(n)x_2(n)$

Ejemplo 2.2 Dadas las secuencias

$$\begin{aligned} x_1(n) &= u_r(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \\ x_2(n) &= (-1)^n u_r(n) = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\} \\ x_3(n) &= \{0, 0, 1\} \end{aligned}$$

Calcule la secuencia

$$x_4(n) = 2x_3(2 - n) - x_1(2n - 1) + x_2(4 - n)u(n)$$

Solución: El primer término $2x_3(2 - n)$ corresponde a una reflexión seguida por un atraso (de la reflexión), escalado por un factor 2. Esto resulta en

$$2x_3(2 - n) = \left\{ \underset{\uparrow}{2} \right\}$$

El segundo término representa un submuestreo retrasado:

$$x_1(2n - 1) = \left\{ \underset{\uparrow}{0, 1, 3, 5, 7 \dots} \right\}$$

El primer factor del tercer término contiene una inversión atrasada:

$$x_2(4 - n) = \left\{ \dots, 6, -5, \underset{\uparrow}{4}, -3, 2, -1, 0 \right\}$$

y al multiplicarlo por el escalón unitario $u(n)$ se eliminan todas las muestras anteriores a $n = 0$:

$$x_2(4 - n)u(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{4}, -3, 2, -1, 0 \right\}$$

Finalmente, se deben combinar estos tres resultados parciales aditivamente:

$$x_4(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{6}, -4, -1, -6, -7, -9, -11, -13 \dots \right\}$$

2.2

2.1.2 Clasificación de señales de variable discreta

La tabla 2.1 presenta cinco propiedades que caracterizan a las señales de variable discreta.

Tabla 2.1: Propiedades de señales de variable discreta.

Propiedad	Clasificación	
Energía	Señal de energía	Señal de potencia
Periodicidad	Señal periódica	Señal aperiódica
Simetría	Señal simétrica	Señal asimétrica
Acotación	Señal acotada	Señal no acotada
Longitud	Señal finita	Señal infinita

Señales de energía y potencia

La figura 2.2 muestra el cálculo de potencia instantánea $p(t)$ y de energía disipada $e(t)$ en un circuito eléctrico simple. El valor de resistencia R representa una constante que únicamente

Calcule la secuencia

$$x_4(n) = 2x_3(2 - n) - x_1(2n - 1) + x_2(4 - n)u(n)$$

Solución: El primer término $2x_3(2 - n)$ corresponde a una reflexión seguida por un atraso (de la reflexión), escalado por un factor 2. Esto resulta en

$$2x_3(2 - n) = \{2\}$$

El segundo término representa un submuestreo retrasado:

$$x_1(2n - 1) = \{0, 1, 3, 5, 7, \dots\}$$

El primer factor del tercer término contiene una inversión atrasada:

$$x_2(4 - n) = \{\dots, 6, -5, 4, -3, 2, -1, 0\}$$

y al multiplicarlo por el escalón unitario $u(n)$ se eliminan todas las muestras anteriores a $n = 0$:

$$x_2(4 - n)u(n) = \{4, -3, 2, -1, 0\}$$

Finalmente, se deben combinar estos tres resultados parciales aditivamente:

$$x_4(n) = \{6, -4, -1, -6, -7, -9, -11, -13, \dots\}$$

2.2

2.1.2 Clasificación de señales de variable discreta

La tabla 2.1 presenta cinco propiedades que caracterizan a las señales de variable discreta.

Tabla 2.1: Propiedades de señales de variable discreta.

Propiedad	Clasificación	
Energía	Señal de energía	Señal de potencia
Periodicidad	Señal periódica	Señal aperiódica
Simetría	Señal simétrica	Señal asimétrica
Acotación	Señal acotada	Señal no acotada
Longitud	Señal finita	Señal infinita

Señales de energía y potencia

La figura 2.2 muestra el cálculo de potencia instantánea $p(t)$ y de energía disipada $e(t)$ en un circuito eléctrico simple. El valor de resistencia R representa una constante que únicamente

Ejemplo 2.3 Especifique si el escalón unitario $u(n)$, la rampa $u_r(n)$ y la señal exponencial $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$ son señales de energía o potencia.

Solución:

1. Si $x(n) = u(n)$ entonces

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u(n)|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo que implica que $u(n)$ es una señal de potencia.

2. Para la señal rampa unitaria $u_r(n)$ se tiene que

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u(n)|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N n^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \infty \end{aligned}$$

por lo que no es ni señal de energía ni señal de potencia al ser tanto E como P infinitas.

3. La señal $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$, $A \in \mathbb{R}$, tiene una potencia media

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u(n)|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N |A|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} (N+1)|A|^2 = \frac{|A|^2}{2} \end{aligned}$$

y es por lo tanto una señal de potencia.

2.3

Señales acotadas y no acotadas

Una señal $x(n)$ se dice ser acotada (en inglés *bounded signal*) si existe un número real positivo finito M tal que $|x(n)| < M$ para todo n . Por el contrario, si la magnitud de cualquier muestra es infinita, entonces la señal no es acotada. Esta propiedad es fundamental para el concepto de estabilidad de sistemas, que se revisará con detalle posteriormente.

Señales periódicas y aperiódicas

Una señal es periódica con periodo N ($N > 0$) si y solo si

$$x(n + N) = x(n), \quad \text{para todo } n \quad (2.1)$$

El valor más pequeño de N para el que se cumple lo anterior se denomina *periodo fundamental*. Si no existe ningún N que satisfaga (2.1) la señal es entonces aperiódica.

Se demostrará en la siguiente sección como ejemplo particular que la señal $x(n) = \cos(2\pi f_0 n)$ es periódica si y solo si f_0 es un número racional $f_0 = \frac{k}{N}$, donde si k y N son primos relativos entonces el periodo es exactamente N .

Si una señal periódica no toma valores infinitos (es decir, es una señal acotada) entonces es a su vez una señal de potencia, por ser su potencia promedio finita e igual al promedio en un periodo:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Señales pares e impares

Una señal es simétrica o par si

$$x(n) = x(-n) \quad (2.2)$$

Se dice ser asimétrica o impar si

$$x(-n) = -x(n) \quad (2.3)$$

en cuyo caso siempre debe cumplirse que $x(0) = 0$.

Asúmase que toda señal $x(n)$ se puede expresar como la suma de una señal par $x_p(n)$ y otra señal impar $x_i(n)$, de forma que

$$x(n) = x_p(n) + x_i(n) \quad (2.4)$$

Considerando la naturaleza par e impar de las componentes se debe cumplir

$$\begin{aligned} x(-n) &= x_p(-n) + x_i(-n) \\ &= x_p(n) - x_i(n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sumando y restando (2.4) y (2.5) se despeja

$$x_p(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2} \quad x_i(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2} \quad (2.6)$$

Ejemplo 2.4 Dada una señal $x(n) = \{0, 1, 2\}$ encuentre sus componentes par e impar.

Solución:

Para calcular la componente par se realiza la suma de la señal con su reflexión, y luego se divide por dos:

$$\begin{aligned} x(n) &= \{ 0, 0, 0, 1, 2 \} \\ x(-n) &= \{ 2, 1, 0, 0, 0 \} \\ \hline x(n) + x(-n) &= \{ 2, 1, 0, 1, 2 \} \\ x_p(n) = \frac{x(n)+x(-n)}{2} &= \{ 1, 1/2, 0, 1/2, 1 \} \end{aligned}$$

Para calcular la componente impar se le subtrae la reflexión a la señal, y luego se divide por dos:

$$\begin{aligned} x(n) &= \{ 0, 0, 0, 1, 2 \} \\ x(-n) &= \{ 2, 1, 0, 0, 0 \} \\ \hline x(n) - x(-n) &= \{ -2, -1, 0, 1, 2 \} \\ x_i(n) = \frac{x(n)-x(-n)}{2} &= \{ -1, -1/2, 0, 1/2, 1 \} \end{aligned}$$

Se comprueba directamente que se cumple $x(n) = x_p(n) + x_i(n)$. □

Señales hermíticas y anti-hermíticas

Una señal de valor complejo se denomina hermítica (simétrica conjugada o par conjugada) si cumple

$$x(n) = x^*(-n) \tag{2.7}$$

de lo que se deduce que

$$\begin{aligned} |x(n)| &= |x(-n)| \\ \text{Re}\{x(n)\} &= \text{Re}\{x(-n)\} \end{aligned}$$

es decir, tanto la magnitud como la parte real de una señal hermítica tienen simetría par. Por otro lado

$$\begin{aligned} \arg x(n) &= -\arg x(-n) \\ \text{Im}\{x(n)\} &= -\text{Im}\{x(-n)\} \end{aligned}$$

lo que indica que el argumento (ángulo o fase) y la parte imaginaria de una señal hermítica son señales impares.

La señal es anti-hermítica (asimétrica conjugada o impar conjugada) si cumple

$$x(n) = -x^*(-n) \tag{2.8}$$

de lo que se deduce que

$$\begin{aligned} |x(n)| &= |x(-n)| \\ \text{Im}\{x(n)\} &= \text{Im}\{x(-n)\} \end{aligned}$$

es decir, tanto la magnitud como la parte imaginaria de una señal anti-hermítica tienen simetría par. Por otro lado

$$\arg x(n) = \pi - \arg x(-n)$$

que no tiene exhibe ninguna simetría, aunque si se multiplica ambos lados de la ecuación por dos se obtiene

$$2 \arg x(n) = 2\pi - 2 \arg x(-n)$$

$$2 \arg x(n) = -2 \arg x(-n)$$

es decir, el doble del ángulo tiene simetría impar.

Para la parte real de la función anti-hermítica se cumple

$$\operatorname{Re}\{x(n)\} = -\operatorname{Re}\{x(-n)\}$$

es decir, tiene simetría impar. Así mismo ahora que es posible realizar una descomposición lineal de cualquier función $x(n)$ de valor complejo en una componente hermítica $x_h(n)$ y otra anti-hermítica $x_{\bar{h}}(n)$, de forma que

$$x(n) = x_h(n) + x_{\bar{h}}(n) \tag{2.9}$$

Considerando la naturaleza hermítica y anti-hermítica de las componentes se debe cumplir

$$\begin{aligned} x^*(-n) &= x_h^*(-n) + x_{\bar{h}}^*(-n) \\ &= x_h(n) - x_{\bar{h}}(n) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sumando y restando (2.9) y (2.10) se despeja

$$x_h(n) = \frac{x(n) + x^*(-n)}{2} \quad x_{\bar{h}}(n) = \frac{x(n) - x^*(-n)}{2} \tag{2.11}$$

2.2.- Descripción con variables de estado de sistemas de tiempo discreto.

DEFINICIONES

Estado:

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables de modo que el conocimiento de estas variables en $t=t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado:

Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si se necesitan al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial $t=t_0$ el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estado:

Si se necesitan n variable de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, esta n variable de estado se consideran los n componentes de un vector x . Tal vector se denomina vector de estado. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema $x(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t=t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

Espacio de estados:

El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2, \dots , eje x_n se denominan espacio de estados. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO DE UN SISTEMA

En el análisis en el espacio de estados, nos concentramos en tres tipos de variables en el modelado de sistemas dinámicos:

- Variables de entrada
- Variables de salida
- Variables de estado

Suponemos que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores. También suponemos que existen r entradas y m salidas. Definimos n salidas de los integradores como variables de estado. El sistema se describe mediante:

$$\dot{X}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$\dot{X}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

⋮

$$\dot{X}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

Las salidas del sistema se obtienen mediante

$$Y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$Y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

⋮

$$Y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

Si definimos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones se convierten en

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

$$y(t) = g(x, u, t)$$

En donde la primera es la ecuación de estado y la segunda la ecuación de salida. Si las funciones vectoriales f y g involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones alrededor del estado de operación, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \\ y(t) &= C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t)\end{aligned}$$

$A(t)$ matriz de estado

$B(t)$ matriz de entrada

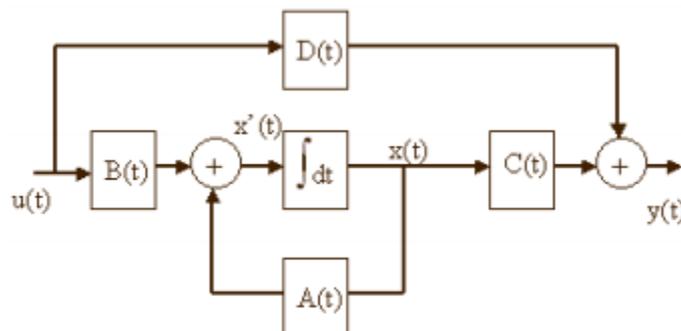
$C(t)$ matriz de salida

$D(t)$ matriz de transmisión directa

Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\end{aligned}$$

En la figura se representa el diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.



2.3.- Ecuaciones diferenciales en las cuales no contiene derivada de excitación

Representación en el espacio de estados de sistemas de n -ésima orden representados mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales no contiene derivadas de la función de excitación.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= \dot{y} \\&\vdots \\x_n &= y^{(n-1)}\end{aligned}$$

Definimos:

A continuación, la ecuación se escribe como

$$\begin{aligned}x_2 &= \dot{x}_1 \\x_3 &= \dot{x}_2 \\&\vdots \\x_{n-1} &= \dot{x}_n \\x_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u\end{aligned}$$

o bien

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

en donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La salida se obtiene mediante

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o bien

$$y = Cx$$

2.4.- Ecuaciones diferenciales en las cuales contiene derivada de excitación

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésima orden representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales contiene derivadas de la función de excitación.

$$y^n + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0^{(n)} u + b_1^{(n-1)} \dot{u} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

No se puede usar el método directo que utilizamos cuando no contenía derivadas de la función de excitación. Esto se debe a que n ecuaciones diferenciales de primer orden en donde $x_1 = y$, pueden no conducir a una solución única.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir la siguiente n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$\begin{aligned}x_1 &= y - \beta_0 u \\ \dot{x}_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ \dot{x}_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u\end{aligned}$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia de una única solución de la

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

o bien

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

En este caso $D = \beta_0 = b_0$
ecuación de estado.

2.5.- Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados

A continuación mostramos como obtener la función de transferencia de un sistema de una sola entrada y una sola salida a partir de las ecuaciones en el espacio de estado.

Consideramos el sistema cuya función de transferencia se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Este sistema se representa en el espacio de estado mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u\end{aligned}$$

En donde x es el vector de estado, u es la entrada y y es la salida. La transformación de Laplace de las ecuaciones anteriores se obtienen mediante:

$$\begin{aligned}t_0 &\neq 0 \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Dado que la función de transferencia se definió antes como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando las condiciones iniciales son 0, suponemos que $x(0)$ es cero. Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned}t_0 &= 0 \\ sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sX(s) - AX(s) &= BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s)\end{aligned}$$

Arreglando la ecuación obtenemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

Sustituyo la ecuación anterior en la de salida

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(s)$$

Comparando

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(s) \text{ y } \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

obtenemos

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Ésta es la expresión de la función de transferencia en términos A,B,C y D.

2.6.- Enfoque de la transformada de laplace para la solución de las ecuaciones de estado.

Partiendo de la ecuación diferencial escalar homogénea se extiende a la ecuación de estado homogénea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Tomando la Transformada de Laplace de ambos miembros, obtenemos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$\text{en donde } \mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}] \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Por tanto obtenemos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Pre multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

obtenemos

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

La transformada inversa de Laplace de $\mathbf{X}(s)$ produce la solución $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0)$$

observamos que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots$$

Por tanto la Transformada inversa de Laplace produce:

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = e^{\mathbf{A}t}$$

La solución de la ecuación se obtiene como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

2.7.- Señales sinusoidales y el concepto de frecuencia

El estudio clásico de señales se basa en su representación como combinación de una serie de señales elementales con un comportamiento conocido o predecible en los sistemas con que se trabaja. En cursos anteriores se han introducido conceptos del análisis de Fourier, transformada de Laplace, donde las señales elementales se caracterizan por su frecuencia y fase respecto a alguna referencia común. El concepto de frecuencia será revisado en las siguientes secciones, donde se apreciarán las diferencias que existen entre los dominios discreto y continuo. El punto de partida para el análisis serán las funciones sinusoidales, como representantes espectrales “puras”.

Señal sinusoidal continua

Una oscilación armónica simple se describe matemáticamente a través de la señal continua [15]:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.12)$$

donde el subíndice a indica que es una señal analógica. A representa la *amplitud* de la señal, Ω es la *frecuencia angular* en radianes por segundo (rad/s) y θ es la *fase* en radianes. Es también común utilizar la frecuencia F en ciclos por segundo o Hertz (Hz) con

$$\Omega = 2\pi F$$

con lo que (2.12) se puede expresar como

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F t + \theta), \quad -\infty < t < \infty .$$

Si F es constante, entonces x_a es periódica

$$x_a(t + T_p) = x_a(t)$$

con período fundamental $T_p = 1/F$ (figura 2.3).

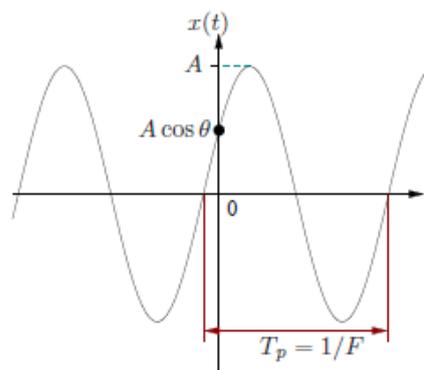


Figura 2.3: Ejemplo de una señal analógica sinusoidal.

Señal sinusoidal discreta

La señal sinusoidal en tiempo discreto se expresa como

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \quad (2.13)$$

con la variable entera $n \in \mathbb{Z}$ (también denominada *número de muestra*), A la magnitud, ω es la frecuencia en radianes por muestra y θ la fase en radianes. De forma similar al caso continuo, puede utilizarse $\omega = 2\pi f$ para reescribir (2.13) como

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.14)$$

En este caso las dimensiones de la frecuencia son ciclos por muestra, y tal como estas unidades lo indican, usualmente tiene valores menores que la unidad. La figura 2.4 muestra un ejemplo con $f = 1/12$ y $\theta = \pi/3$.

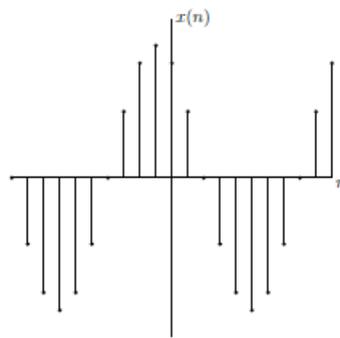


Figura 2.4: Ejemplo de una señal sinusoidal discreta ($\omega = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$) [15].

Periodicidad de un senoide discreto

Por definición una señal de variable discreta $x(n)$ es periódica con periodo N ($N > 0$) si y solo si

$$x(n + N) = x(n) \quad \text{para todo } n \quad (2.15)$$

El menor valor de N para el que se cumple (2.15) se denomina *periodo fundamental*. Una señal sinusoidal de frecuencia f_0 es periódica si

$$\cos(2\pi f_0(N + n) + \theta) = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

lo que se cumple solo si existe un entero k tal que

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

o, en otros términos

$$f_0 = \frac{k}{N} \quad (2.16)$$

que es siempre un número racional. Esto quiere decir, que una señal sinusoidal discreta con un valor irracional de frecuencia no es periódica.

Para determinar el periodo fundamental de una señal sinusoidal se expresa su frecuencia como en (2.16) y se simplifican los factores comunes de tal forma que k y N formen números primos relativos. Por ejemplo si $f_1 = 5/32 = 0,15625$ el periodo fundamental es $N = 32$, pero si la frecuencia es $f_2 = 4/32 = 0,125$ el periodo fundamental es $N = 8$ (figura 2.5). Esto quiere decir que aún cuando los valores de frecuencia se encuentren relativamente cerca, sus periodos pueden cambiar radicalmente.

Equivalencia de frecuencias en senoideos discretos

Considérese de nuevo la señal sinusoidal $\cos(\omega_0 n + \theta)$. Es fácil de obtener que:

$$\cos((\omega_0 + 2\pi)n + \theta) = \cos(\omega_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

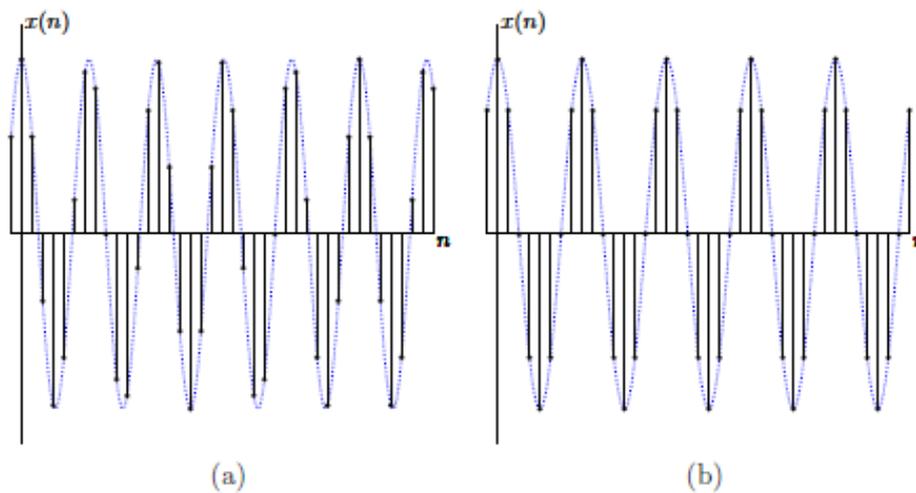


Figura 2.5: Comparación de dos frecuencias cercanas en señales de variable discreta. (a) Frecuencia $f = 5/32$, periodo $N = 32$. (b) Frecuencia $f = 4/32$, periodo $N = 8$. La línea punteada denota una señal continua con frecuencia equivalente para simplificar la comparación.

por lo que todas las secuencias sinusoidales

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

con

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi$$

son idénticas. Por otro lado, las secuencias de cualesquiera dos señales sinusoidales discretas con frecuencias en el rango $-\pi \leq \omega \leq \pi$ (ó $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$) son diferentes. Combinando los resultados anteriores se obtiene que cualquier secuencia sinusoidal de frecuencia $|\omega| > \pi$ (ó $|f| > \frac{1}{2}$) tiene una señal equivalente con $|\omega| \leq \pi$ (ó $|f| \leq \frac{1}{2}$). A las frecuencias $|\omega| \leq \pi$ (ó $|f| \leq \frac{1}{2}$) se les considera *frecuencias fundamentales* y a las frecuencias $|\omega| > \pi$ (ó $|f| > \frac{1}{2}$) se les denomina *alias*.

Equivalencia de frecuencias entre sinusoides continuos y discretos

Para analizar la relación entre frecuencias continuas y discretas asúmase que una señal analógica $x_a(t) = \cos(2\pi Ft)$ se muestrea cada T_s unidades de tiempo para dar origen a la señal en tiempo discreto $x(n) = x_a(nT_s) = \cos(2\pi fn)$. La igualdad es posible solo si los argumentos de las señales cosenoidales son iguales, por lo que

$$2\pi fn \stackrel{!}{=} 2\pi FnT_s$$

y definiendo la frecuencia de muestreo $F_s = 1/T_s$ entonces

$$f = \frac{F}{F_s}$$

de donde se deriva el nombre de *frecuencia normalizada* para f .

De modo similar se deriva para las frecuencias angulares con $\Omega_s = 2\pi F_s$ que

$$\omega = 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_s}$$

Tasa máxima de oscilación

Considérese ahora la secuencia sinusoidal $x_0(n) = \cos(\omega_0 n)$ para el rango de frecuencias $\omega_0 \in [0, \pi]$. La figura 2.6 muestra algunos casos particulares como ejemplo. Se puede apreciar que la tasa de oscilación aumenta conforme la frecuencia aumenta.

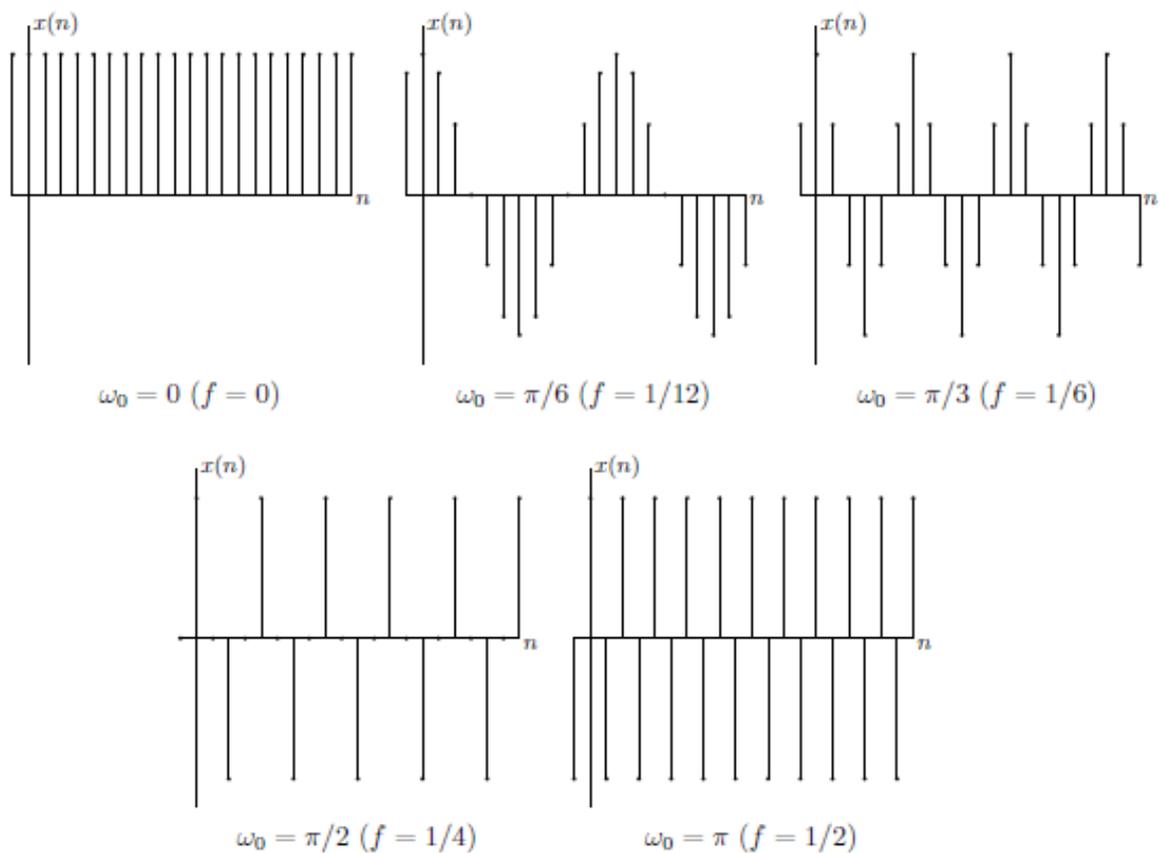


Figura 2.6: Secuencia sinusoidal con diferentes frecuencias.

Ahora, para analizar el caso de frecuencias angulares mayores que π considérese el caso especial de $\omega_1 = 2\pi - \omega_0$. Si $\omega_0 \in [0, \pi]$ entonces $\omega_1 \in [\pi, 2\pi]$ de tal forma que si ω_0 aumenta ω_1 disminuye.

Debido a que

$$x_1(n) = A \cos(\omega_1 n) = A \cos((2\pi - \omega_0)n) = A \cos(-\omega_0 n) = x_0(n)$$

la frecuencia angular ω_1 es un alias de ω_0 . De aquí se concluye que si la frecuencia angular aumenta de π hacia 2π la tasa de oscilación se reduce, al representar estos alias frecuencias que bajan de π a 0.

De forma similar al caso de senoides de variable continua puede utilizarse la identidad de Euler en el caso discreto para introducir el concepto de frecuencia negativa:

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega n + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega n + \theta)}$$

Debido a que las señales sinusoidales de variable discreta con frecuencias separadas por un entero múltiplo de 2π son idénticas, entonces todas las frecuencias en un intervalo $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi]$ representan todas las frecuencias existentes para estas señales. En otras palabras, el rango de frecuencias distinguibles para sinusoides de variable discreta es finito con un ancho de banda de 2π . Usualmente se utilizan los rangos de frecuencias angulares $\omega \in [-\pi, \pi]$ ($f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) o $\omega \in [0, 2\pi]$ ($f \in [0, 1]$) y reciben el nombre de *rango fundamental*.

2.2.3 Exponenciales complejos relacionados armónicamente

Las señales de variable continua

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2\pi k F_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

se denominan señales exponenciales relacionadas armónicamente. El periodo fundamental de la señal $s_k(t)$ es $1/(kF_0) = T_p/k$, lo que equivale a una frecuencia fundamental de kF_0 . Puesto que una señal periódica con periodo T_p/k es también periódica con periodo $k(T_p/k) = T_p$ con $k \in \mathbb{Z}$ entonces todas las señales $s_k(t)$ tienen como periodo común T_p . El nombre proviene de la relación de estas funciones con las oscilaciones de una cuerda, que tienen relaciones “armónicas” (mantienen los nodos externos fijos) cuando las frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental.

En este caso de variable continua, para $k_1 \neq k_2$ se cumple siempre que $s_{k_1}(t) \neq s_{k_2}(t)$, o en otros términos, existe un número infinito de señales complejas relacionadas armónicamente con $e^{j2\pi F_0 t}$.

Para el caso de señales exponenciales complejas de variable discreta, puesto que son señales periódicas solo si su frecuencia es racional, se escoge $f_0 = 1/N$ y se define el conjunto de señales relacionadas armónicamente como

$$s_k(n) = e^{jk\omega_0 n} = e^{j2\pi k f_0 n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

A diferencia del caso continuo se tiene para $k_1 = k + N$

$$s_{k+N}(n) = e^{j2\pi \frac{(k+N)}{N} n} = e^{j2\pi \frac{kn}{N}} e^{j2\pi n} = e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = s_k(n)$$

Esto significa que en el caso discreto solo existen N señales complejas relacionadas armónicamente, donde todos los miembros del conjunto descrito en (2.17) tienen como periodo común N muestras.

2.8.- Sistemas en tiempo discreto

A los dispositivos que operan sobre señales de variable discreta (o tiempo discreto) se les denomina *sistemas discretos*. En general, reciben una señal de entrada $x(n)$ para producir una señal de salida $y(n)$. Se dice que el sistema transforma $x(n)$ en $y(n)$, lo que se expresa como

$$y(n) = T[x(n)]$$

donde $T[\cdot]$ representa al operador de transformación o procesamiento realizado por el sistema sobre $x(n)$ para producir $y(n)$.

2.3.1 Descripción entrada-salida de sistemas

La descripción de entrada-salida define la relación entre $x(n)$ y $y(n)$. La estructura interna del sistema es desconocida o ignorada, es decir, el sistema se considera como una *caja negra* cuyo funcionamiento interno no interesa, sino el comportamiento específico ante cierta entrada (figura 2.7).

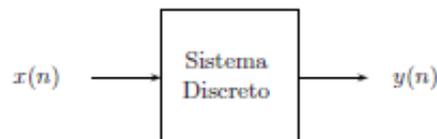


Figura 2.7: Entrada-salida de un sistema discreto

Ejemplo 2.5 Determine la salida de los siguientes sistemas para la entrada

$$x(n) = \begin{cases} 3 - |n| & \text{para } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

1. $y(n) = x(n)$
2. $y(n) = x(n - 2)$
3. $y(n) = x(n + 1)$
4. $y(n) = \frac{1}{3} [x(n + 1) + x(n) + x(n - 1)]$
5. $y(n) = \max \{x(n + 1), x(n), x(n - 1)\}$
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$

Solución:

1. Al sistema $y(n) = x(n)$ se le denomina *identidad*, pues su salida es idéntica a la entrada: $y(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$
2. El sistema $y(n) = x(n - 2)$ retarda la entrada dos muestras: $y(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$.
3. El sistema $y(n) = x(n + 1)$ adelanta la señal una unidad y solo puede ser realizado fuera de línea, por ser imposible en un sistema de tiempo real determinar el valor de una muestra en el futuro: $y(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$.

4. El filtro de media móvil $y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ calcula el promedio de tres muestras: $y(n) = \{1/3, 1, 2, 7/3, 2, 1, 1/3\}$.
5. El filtro de rango $y(n) = \max\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$ entrega el valor máximo de la muestra actual, la anterior y la futura: $y(n) = \{1, 2, 3, 3, 3, 2, 1\}$. Este filtro puede considerarse como filtro paso bajos.
6. El acumulador $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ realiza la “integración” discreta de la entrada: $y(n) = \{1, 3, 6, 8, 9, 9, \dots\}$. Nóte que el acumulador puede reescribirse como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)}_{y(n-1)} + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

2.5

En general, la salida $y(n)$ en el instante n puede depender no solo de la muestra actual $x(n)$, sino también de la señal en instantes anteriores y posteriores a n . Además, la salida de un sistema puede depender de un estado interno. Por ejemplo, en el acumulador $y(n) = y(n-1) + x(n)$ si una secuencia de entrada se aplica en dos instantes de tiempo distintos, las dos reacciones del sistema difieren, dependiendo de la historia anterior del sistema “ $y(n-1)$ ”. Para determinar la salida del acumulador en un instante n_0 es necesario conocer $y(n_0 - 1)$. El cálculo de la secuencia de salida $y(n)$ para todo instante $n > n_0$ tiene como *condición inicial* al valor $y(n_0 - 1)$, que en cierta forma resume todo el pasado del sistema.

Si todas las condiciones iniciales son cero se dice que el sistema estaba en *reposo*. Siempre se asume que en $n = -\infty$ todo sistema estuvo en reposo. La salida de un sistema en reposo puede expresarse entonces utilizando únicamente la señal de entrada, puesto que por definición todas las salidas anteriores son cero.

En la literatura se encuentra el término *condiciones de reposo iniciales* (IRC, *Initial Rest Conditions*) para indicar que se asume $y(n) = 0$ para $n < n_0$ donde la entrada deja de ser cero justo en n_0 y $x(n) = 0$ para $n < n_0$. Además, se utiliza el concepto de condiciones de reposo *finales* (FRC, *Final Rest Conditions*) para indicar el caso contrario, es decir, se asume que $y(n) = 0$ para $n > n_0$, y la entrada se hace cero justo después de n_0 , es decir, $x(n) = 0$ para $n > n_0$.

Ejemplo 2.6 Determine la salida del sistema acumulador para la entrada $x(n) = nu(n)$ con condición inicial $y(-1) = \alpha$.

Solución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)}_{y(-1)=\alpha} + \underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha + \frac{n(n+1)}{2}$$

Recuerde que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ \sum_{k=0}^n k &= n + n-1 + n-2 + \dots + 1 \\ \hline 2\sum_{k=0}^n k &= n+1 + n+1 + n+1 + \dots + n+1 \\ 2\sum_{k=0}^n k &= n(n+1) \\ \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

2.8

2.3.2 Diagramas de bloques

En el capítulo anterior se indicó que un sistema está conformado por subsistemas, es decir, bloques de procesamiento de señal con tareas específicas dentro del sistema total. Este concepto se aplica recursivamente, de tal modo que un subsistema se descompone a su vez en otros subsistemas más sencillos, que a su vez pueden estar constituidos por otros subsistemas, y así sucesivamente, hasta llegar a ciertos componentes elementales descritos a continuación.

Sumador

El sumador es un bloque sin memoria, que se representa como lo indica la figura 2.8. Tal y

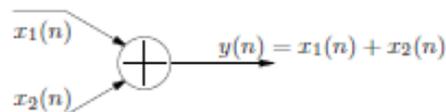


Figura 2.8: Diagrama de un sumador.

como lo indica su nombre, su tarea es sumar dos señales o más señales muestra por muestra.

Multiplicador por constante

El multiplicador por constante es un bloque sin memoria, que se representa como lo indica la figura 2.9. Se utiliza para escalar toda una secuencia por un mismo factor.



Figura 2.9: Diagrama de un multiplicador por constante.

Multiplicador de señal

El multiplicador de señal es un bloque sin memoria, que se representa como lo indica la figura 2.10, y que genera una nueva secuencia a partir de los productos entre muestras de

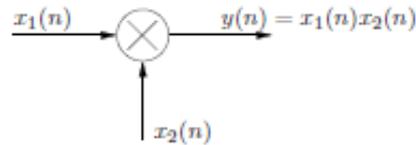


Figura 2.10: Diagrama de un multiplicador de señales.

las señales de entrada correspondientes a un mismo instante n .

Retardador de un elemento

El retardador es un bloque con memoria de longitud 1, representado como lo indica la figura 2.11. Es uno de los elementos de procesamiento digital más utilizados. Su símbolo está

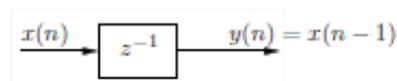


Figura 2.11: Diagrama de elemento retardador.

muy relacionado con las propiedades de la transformada z que se analizarán posteriormente.

Adelantador de un elemento

El adelantador no es realizable físicamente y solo existe en sistemas de tratamiento de señales fuera de línea. Se representa como lo indica la figura 2.12.



Figura 2.12: Diagrama de elemento adelantador.

Ejemplo 2.7 Realice el diagrama de bloques para

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

Solución:

Nótese primero que esta expresión puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1)) \quad (2.18)$$

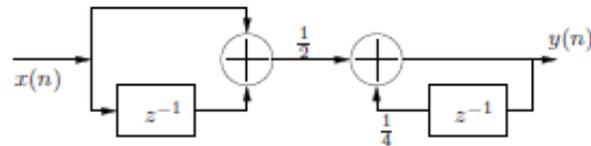


Figura 2.13: Diagrama de bloques de la ecuación 2.18.

con lo que se deriva fácilmente el diagrama mostrado en la figura 2.13.

2.7

2.3.3 Clasificación de los sistemas discretos

Un sistema se dice tener una determinada propiedad, si dicha propiedad se cumple para *todas* las señales de entrada posibles. Un contraejemplo basta para descartar que un sistema posea una determinada propiedad. La tabla 2.2 resume las propiedades de sistemas discretos, que se detallan a continuación.

Tabla 2.2: Propiedades de sistemas discretos.

Propiedad	Clasificación	
Memoria	Sistema estático	Sistema dinámico
Varianza	Sistema variante en el tiempo	Sistema invariante en el tiempo
Linealidad	Sistema lineal	Sistema no lineal
Causalidad	Sistema causal	Sistema no causal
Estabilidad	Sistema estable	Sistema inestable

Sistemas estáticos y dinámicos

En un sistema estático, o sin memoria, la salida $y(n)$ depende solo de la entrada $x(n)$ en el mismo instante n , y no de las entradas pasadas o futuras. Todos los otros casos son sistemas dinámicos.

Si la salida $y(n)$ depende de las entradas de $x(n - N)$ a $x(n)$ se dice que el sistema tiene *memoria* de duración N , donde N puede ser finita o infinita.

Por ejemplo, $y(n) = ax(n) + nx^2(n) + bx^3(n)$ representa un sistema estático, mientras que $y(n) = \sum_{k=0}^n a_k x(n - k)$ es un sistema dinámico.

Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema \mathcal{T} en reposo es invariante en el tiempo o invariante al desplazamiento si y solo si

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) \quad \Rightarrow \quad x(n - k) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n - k)$$

En el diagrama de bloques de la figura 2.14 el sistema \mathcal{T} es invariante en el tiempo si y solo si la salida $d(n)$ es cero para todas las entradas $x(n)$ y para todos los valores de retardo k .

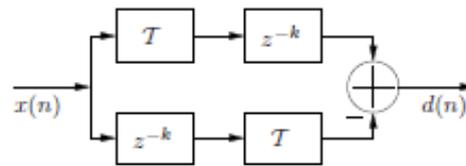


Figura 2.14: Verificación de la invarianza en el tiempo.

Ejemplo 2.8 Determine si los siguientes sistemas son o no invariantes en el tiempo:

1. $y(n) = x(n) - x(n - 1)$
2. $y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n)$

Solución:

El sistema $y(n) = x(n) - x(n - 1)$ es invariante en el tiempo. Para demostrarlo se calcula la respuesta del sistema en reposo a la entrada desplazada $x(n - k)$, que resulta en $y_k(n) = x(n - k) - x(n - k - 1)$. La respuesta a $x(n)$, retrasada k muestras es $y(n - k) = x(n - k) - x(n - k - 1)$. Como $y(n - k) = y_k(n)$ el sistema es invariante en el tiempo.

El sistema modulador $y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n)$ es variante en el tiempo, puesto que su respuesta $y_k(n)$ a $x(n - k)$ es $y_k(n) = x(n - k) \cos(\omega_0 n)$, y la respuesta a $x(n)$, retardada k muestras es $y(n - k) = x(n - k) \cos(\omega_0(n - k))$ que es diferente a $y_k(n)$. 2.8

Sistemas lineales y no lineales

Un sistema es lineal si satisface el teorema de superposición, es decir, para cualesquiera dos constantes a_1, a_2 y para toda señal $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se cumple

$$\mathcal{T} [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 \mathcal{T} [x_1(n)] + a_2 \mathcal{T} [x_2(n)]. \quad (2.19)$$

La figura 2.15 ilustra un esquema de verificación de linealidad, donde el sistema es lineal si y solo si para todo par de entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ y para cualesquiera dos constantes a_1, a_2 siempre la salida $d(n)$ es cero.

Como consecuencia de (2.19) todo sistema lineal cumple la propiedad multiplicativa o de escalado

$$\mathcal{T} [a_1 x_1(n)] = a_1 \mathcal{T} [x_1(n)] \quad (2.20)$$

y la propiedad aditiva

$$\mathcal{T} [x_1(n) + x_2(n)] = \mathcal{T} [x_1(n)] + \mathcal{T} [x_2(n)].$$

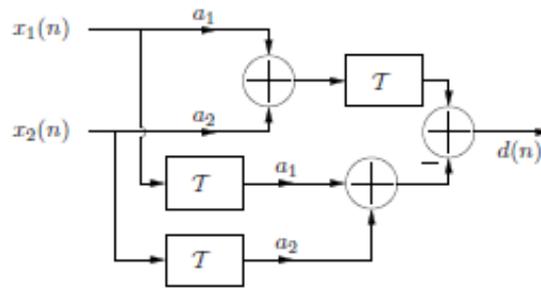


Figura 2.15: Verificación de linealidad.

El principio de superposición puede generalizarse para M señales como

$$x(n) = \sum_{k=1}^M a_k x_k(n) \xrightarrow{T} y(n) = \sum_{k=1}^M a_k T[x_k(n)]$$

De la propiedad de escalado se deduce además que un sistema lineal en reposo con entrada cero ($x(n) = 0, n \in \mathbb{Z}$) debe tener como salida una señal nula $y(n) = 0$.

Si para un sistema la propiedad de superposición no se cumple, entonces el sistema se dice ser *no lineal*.

Ejemplo 2.9 Compruebe si los siguientes sistemas son lineales.

1. $y(n) = nx(n)$
2. $y(n) = x(n^2)$
3. $y(n) = x^2(n)$
4. $y(n) = Ax(n) + B$
5. $y(n) = e^{x(n)}$

Solución:

1. Para el sistema 1 se obtiene primero la respuesta del sistema a una entrada igual a la suma ponderada de dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$, es decir, para una entrada *total* $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ y se obtiene $y_T(n) = n(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$. Ahora, la suma ponderada de las salidas del sistema para $x_1(n)$ y $x_2(n)$ por separado es $y_S(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$, con $y_1(n) = nx_1(n)$ y $y_2(n) = nx_2(n)$, lo que es igual a $y_S(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$. Como $y_T(n) = y_S(n)$ se puede afirmar que el sistema $y(n) = nx(n)$ es lineal.
2. Para $y(n) = x(n^2)$ las salidas $y_T(n) = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$ y $y_S = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$ son idénticas y por tanto el sistema es lineal.
3. Para $y(n) = x^2(n)$ la salida $y_T(n) = (a_1x_1(n) + a_2x_2(n))^2 = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n)$ y la salida $y_S(n) = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n)$ evidentemente son diferentes y por tanto el sistema no es lineal.
4. Para $y(n) = Ax(n) + B$ la salida $y_T(n) = A(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) + B$ y la salida $y_S(n) = Aa_1x_1(n) + B + Ax_2(n) + B = Aa_1x_1(n) + Ax_2(n) + 2B$ difieren para todo

- $B \neq 0$ y por tanto el sistema, a pesar de su apariencia, no es lineal.
5. Para $y(n) = e^{x(n)}$ la salida $y_T = e^{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)} = e^{a_1 x_1(n)} e^{a_2 x_2(n)}$ y la salida $y_S = e^{a_1 x_1(n)} + e^{a_2 x_2(n)}$ son diferentes y por tanto el sistema tampoco es lineal.

2.9

Sistemas causales y no causales

Un sistema es causal si $y(n)$ depende únicamente de las entradas presentes y pasadas ($x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$), y salidas pasadas ($y(n-1), y(n-2), \dots$), pero no de las entradas o salidas futuras ($x(n+1), x(n+2), \dots; y(n+1), y(n+2), \dots$). En caso contrario, el sistema es no causal.

Sistemas que funcionan “en línea” deben ser causales por la imposibilidad de determinar el valor de la entrada o la salida en el futuro.

A una señal $x(n)$ que es cero para $n \geq 0$ y diferente de cero para $n < 0$ se le denomina señal *anticausal*. Las implicaciones de la causalidad junto con la linealidad e invarianza en el tiempo no son triviales, y se profundizará en ellas en los próximos capítulos.

Sistemas estables e inestables

Un sistema arbitrario en reposo se denomina estable de entrada acotada - salida acotada (BIBO: *bounded input - bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \xrightarrow{\mathcal{T}} |y(n)| \leq M_y < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Basta con que alguna entrada acotada produzca una salida no acotada (es infinita), para que el sistema sea *inestable*.

2.3.4 Interconexión de sistemas discretos

Hay dos maneras fundamentales de interconectar sistemas discretos: interconexión en cascada (o serie) e interconexión paralela (figura 2.16). La interconexión en cascada se describe con sistemas de la forma:

$$y(n) = \mathcal{T}_2[\mathcal{T}_1[x(n)]] = \mathcal{T}_c[x(n)]$$

En general, el orden de los bloques para la conexión en cascada es relevante. Sin embargo, si los sistemas son lineales e invariantes en el tiempo entonces \mathcal{T}_c es a su vez lineal e invariante en el tiempo, y $\mathcal{T}_1[\mathcal{T}_2[\cdot]] = \mathcal{T}_2[\mathcal{T}_1[\cdot]]$. La interconexión en paralelo se describe por

$$y(n) = \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] = \mathcal{T}_p[x(n)].$$

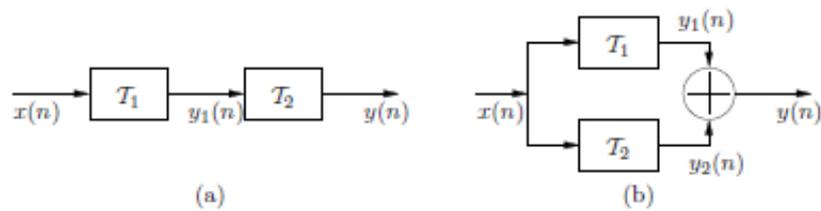


Figura 2.16: Interconexión de sistemas discretos. (a) Cascada. (b) Paralelo

2.9 Análisis de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo

2.4.1 Técnicas de análisis

Existen dos métodos básicos para el análisis del comportamiento de un sistema:

1. Descomposición de la señal de entrada en señales elementales, cuya respuesta es conocida.
2. Solución de la *ecuación de diferencias*.

La solución de la ecuación de diferencias se revisará en la sección 2.5.

El concepto fundamental del análisis de sistemas lineales por descomposición es el siguiente: supóngase que la entrada $x(n)$ puede expresarse como una suma ponderada de funciones elementales $\{x_k(n)\}$

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

donde c_k son los coeficientes de ponderación o *pesos* de la descomposición de la señal $x(n)$. Si la respuesta del sistema en reposo a $x_k(n)$ es $y_k(n)$, es decir

$$y_k(n) = T[x_k(n)]$$

entonces con la propiedad de linealidad se obtiene

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] = \sum_k c_k T[x_k(n)] = \sum_k c_k y_k(n)$$

En otras palabras, si el sistema es lineal, la respuesta $y(n)$ del sistema a una entrada $x(n)$ es igual a la suma ponderada de las repuestas $y_k(n)$ a cada una de las componentes $x_k(n)$ en que se puede descomponer $x(n)$, donde además los coeficientes c_k de ponderación de las salidas corresponden a los coeficientes de ponderación de la entrada.

En esta descomposición, la elección de las funciones elementales dependerá de las características de las señales a evaluar. Dos clases de funciones son usuales: impulsos ($\delta(n - k)$) y funciones exponenciales complejas $e^{j\omega_k n}$, esta última utilizándose frecuentemente en el llamado análisis frecuencial (ver capítulo 4). En los últimos años ha cobrado fuerza el uso de otras familias de funciones elementales caracterizadas a partir de la teoría de *wavelets*, tema que sin embargo excede el marco de este curso.

2.4.2 Descomposición de una señal en impulsos

Utilizando impulsos desplazados como funciones elementales puede expresarse cualquier señal $x(n)$ como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)$$

Ejemplo 2.10 Descomponga la señal

$$x(n) = \{0, 1, 2, -1, -1/2, 1\}$$

en sus impulsos.

Solución:

Esta señal puede expresarse como

$$x(n) = 1 \cdot \delta(n - 1) + 2 \cdot \delta(n - 2) - 1 \cdot \delta(n - 3) - \frac{1}{2} \cdot \delta(n - 4) + 1 \cdot \delta(n - 5)$$

2.10

2.4.3 Convolución

Si se denota con $h'(n, k)$ la respuesta del sistema a un impulso desplazado k unidades $\delta(n - k)$

$$h'(n, k) = \mathcal{T}[\delta(n - k)]$$

entonces la salida de un sistema lineal puede calcularse con las repuestas elementales a dichos impulsos desplazados:

$$y(n) = \sum_k c_k y_k(n) = \sum_k x(k)h'(n, k)$$

donde se han utilizado $x_k(n) = \delta(n - k)$ como entradas elementales y por lo tanto los coeficientes $c_k = x(k)$.

Si el sistema es además invariante en el tiempo, entonces con $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$ se tiene que $h'(n, k) = h(n - k)$ y por lo tanto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) = x(n) * h(n)$$

que se denomina sumatoria de *convolución*. Se dice entonces que la respuesta del sistema LTI $y(n)$ a una entrada $x(n)$ es igual a la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$.

Esto quiere decir que en un sistema LTI en reposo su respuesta a cualquier entrada puede determinarse con solo conocer dicha entrada y la respuesta al impulso $h(n)$.

El cálculo de la convolución involucra cuatro pasos:

1. *Reflexión* de $h(k)$ con respecto a $k = 0$ para producir $h(-k)$.
2. *Desplazamiento* del origen de $h(-k)$ hacia el punto n que se desea calcular.
3. *Multiplicación* de $x(k)$ y $h(n-k)$ para obtener la secuencia producto $v_n(k) = x(k)h(n-k)$.
4. *Suma* de todos los valores de $v_n(k)$ para obtener $y(n)$.

Los pasos del 2 al 4 deben realizarse para todo instante n que se desee calcular.

Ejemplo 2.11 Determine la respuesta a la señal de entrada

$$x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

de un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$$

Solución:

Siguiendo el procedimiento indicado, primero se calcula la reflexión de la respuesta al impulso

$$h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}.$$

Los pasos siguientes se resumen en la tabla 2.3.

Con lo que resulta la señal de salida en

$$y(n) = \{1, 4, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

2.11

Ejemplo 2.12 Para el caso en que la entrada $x(n)$ y la respuesta impulsional $h(n)$ sean de longitud finita, calcule la longitud de la salida en términos de las longitudes de $x(n)$ y $h(n)$.

Solución:

Una señal finita tiene longitud N si el intervalo más pequeño con muestras diferentes de cero tiene N muestras.

Asuma que los índices menor y mayor de la entrada $x(n)$ son k_i y k_f respectivamente, y los de la respuesta impulsional $h(n)$ son l_i y l_f (figura 2.17).

Tabla 2.3: Ejemplo de convolución de dos secuencias finitas.

2. Desplazamiento	3. Multiplicación por $x(k) = \{1, 2, 3, 1\}$	4. Suma
$h(-1-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$	$v_{-1} = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}$	$y_{-1} = 1$
$h(0-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$	$v_0 = \{0, 0, 2, 2, 0, 0\}$	$y_0 = 4$
$h(1-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$	$v_1 = \{0, 1, 4, 3, 0\}$	$y_1 = 8$
$h(2-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$	$v_2 = \{-1, 2, 6, 1\}$	$y_2 = 8$
$h(3-k) = \{0, -1, 1, 2, 1\}$	$v_3 = \{0, -2, 3, 2\}$	$y_3 = 3$
$h(4-k) = \{0, 0, -1, 1, 2, 1\}$	$v_4 = \{0, 0, -3, 1\}$	$y_4 = -2$
$h(5-k) = \{0, 0, 0, -1, 1, 2, 1\}$	$v_5 = \{0, 0, 0, -1\}$	$y_5 = -1$

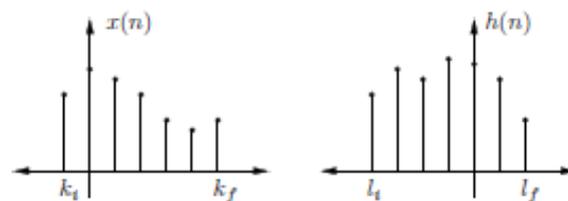


Figura 2.17: Índices de las señales de entrada y respuesta impulsional.

La longitud de $x(n)$ es entonces $N_x = k_f - k_i + 1$, y la longitud de la respuesta impulsional es $N_h = l_f - l_i + 1$.

El desplazamiento menor n_{min} para el que puede haber salida es (figura 2.18):

$$n_{min} = k_i + l_i$$

El desplazamiento mayor n_{max} para el que puede haber salida es (figura 2.19):

$$n_{max} = k_f + l_f$$

La longitud de la señal de salida es entonces

$$\begin{aligned}
 N_y &= n_{max} - n_{min} + 1 \\
 &= (k_f + l_f) - (k_i + l_i) + 1 + (1 - 1) \\
 &= (k_f - k_i + 1) + (l_f - l_i + 1) - 1 \\
 &= N_x + N_h - 1
 \end{aligned}$$

es decir, el resultado de la convolución tiene una longitud que es tan solo una muestra menor que la suma de las longitudes de las dos señales sobre las que ella opera. 2.12

En el ejemplo anterior se observa que para los valores n_{min} y n_{max} , es decir, los límites del intervalo de muestras donde existe salida no nula, es irrelevante qué función representa la

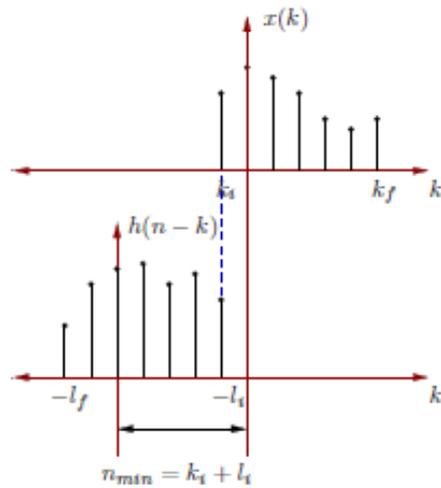


Figura 2.18: Menor desplazamiento para el que puede haber salida.

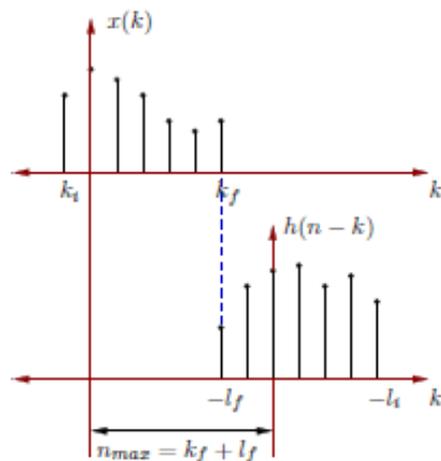


Figura 2.19: Mayor desplazamiento para el que puede haber salida.

entrada y qué función representa la respuesta al impulso del sistema. Esto indica cierta simetría en la convolución. Con un simple cambio de variables es posible demostrar que la convolución es de hecho totalmente conmutativa, y no solo el valor de sus índices:

$$\begin{aligned}
 y(n) = x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{\substack{m=n-k \\ m=-\infty}}^{\infty} x(n-m)h(m) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\
 &= h(n) * x(n)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13 Encuentre a través de la convolución la respuesta de un sistema con respuesta exponencial al impulso:

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1.$$

ante el escalón unitario $u(n)$.

Solución:

Obsérvese que $a^n = e^{n \ln a}$, con lo que se establece la relación con los sistemas analógicos de respuesta exponencial $h_a(t) = e^{-t/\tau}$ (figura 2.20). Para encontrar más detalles de esta relación asúmase que la señal $h_a(t)$ se discretiza en el tiempo con un intervalo de muestreo T :

$$h_a(nT) = e^{-nT/\tau} \stackrel{!}{=} e^{n \ln a} \Rightarrow \ln a = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow a = e^{-T/\tau}$$

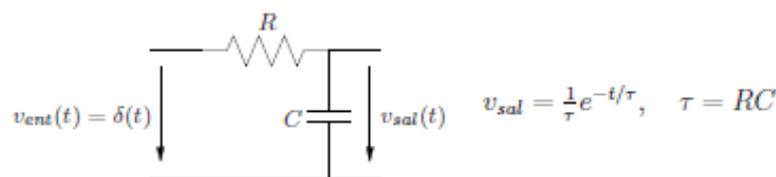


Figura 2.20: Circuito analógico con respuesta exponencial al impulso.

Puede observarse que este tipo de sistemas analógicos solo permiten $a \geq 0$, mientras que los sistemas discretos permiten además $a < 0$ sin ninguna complejidad computacional adicional.

Para determinar la salida $y(n)$ del sistema con la entrada escalón unitario $u(n)$ se utiliza la sumatoria de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)h(k) \quad (2.21)$$

Puesto que las secuencias producto son 0 para $n < 0$ entonces $y(n) = 0$ para $n < 0$. Evaluando entonces (2.21) para varios n se obtiene:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) = 1 \\ y(1) &= h(0) + h(1) = 1 + a \\ y(2) &= h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2 \\ &\vdots \\ y(n) &= \sum_{k=0}^n h(k) = \sum_{k=0}^n a^k \end{aligned}$$

Recordando

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^n a^k & = & 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\ a \sum_{k=0}^n a^k & = & a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1} \\ \hline (1-a) \sum_{k=0}^n a^k & = & 1 - a^{n+1} \end{array}$$

con lo que se deriva

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Si $|a| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ lo que implica que $y(\infty) = \frac{1}{1-a}$. La figura 2.21 muestra un ejemplo de la respuesta para $a = 0,9$.

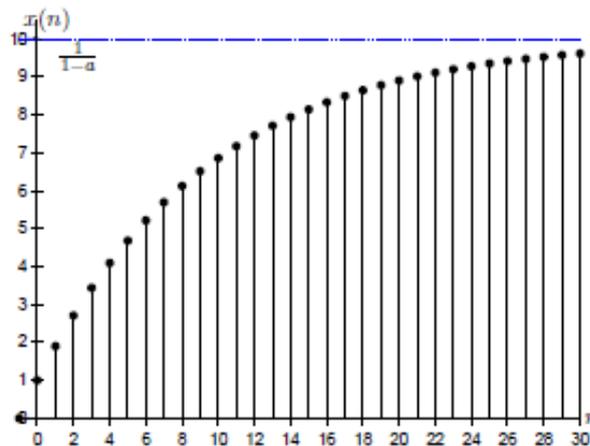


Figura 2.21: Respuesta al sistema exponencial con $a = 0,9$.

Nótese la similitud con la respuesta del sistema analógico al escalón continuo de la forma $k(1 - e^{-t/\tau})$. Más tarde en el curso se retomarán estas similitudes. 2.13

2.4.4 Propiedades de la convolución

Conmutatividad

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$



Figura 2.22: Representación de la propiedad de la convolución de conmutatividad.

Asociatividad

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

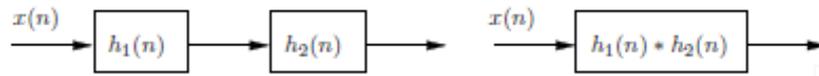


Figura 2.23: Representación de la propiedad de la convolución de asociatividad.

Distributividad

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

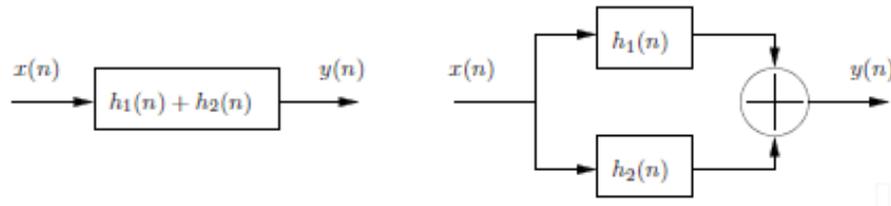


Figura 2.24: Representación de la propiedad de la convolución de distributividad.

Las tres propiedades pueden generalizarse para más de dos subsistemas.

2.4.5 Sistemas LTI causales

En un sistema causal la salida en $n = n_0$ depende solo de valores de entrada $x(n)$ para $n \leq n_0$, es decir, de valores pasados. Como

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)}_{\text{Muestras pasadas y actual}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k)}_{\text{Muestras futuras}}$$

se deriva que $h(k) = 0$ para todo $k \leq -1$, pues solo así la salida podrá ser independiente de entradas futuras. Dado que $h(n)$ es la respuesta impulsional de un sistema LTI en reposo, $h(n) = 0$ para $n < 0$ es condición necesaria y suficiente para la causalidad. Un sistema es causal entonces si y solo si $h(n) = 0, \forall n < 0$.

Si un sistema es causal entonces la convolución puede simplificarse en

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n - k)$$

Generalizando, a una secuencia $x(n)$ con $x(n) \neq 0$ para algún $n < 0$ se le denomina secuencia no causal, y de lo contrario, secuencia causal. A secuencias con $x(n) = 0$ para $n \geq 0$ y con $x(n) \neq 0$ para alguna muestra con $n < 0$ se les denomina secuencias *anticausales*.

Si tanto la entrada $x(n)$ como la respuesta impulsional son causales, entonces la convolución se simplifica en:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k)$$

Nótese que esta respuesta es a su vez causal, es decir, $y(n) = 0$ para todo $n < 0$.

2.4.6 Estabilidad de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Un sistema se dice estable si para toda entrada acotada su salida es también acotada:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad \rightarrow \quad |y(n)| \leq M_y < \infty \quad \forall n$$

Dada la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

y su valor absoluto

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|M_x$$

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

lo que implica que $|y(n)|$ es acotada solo si

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty$$

En consecuencia un sistema LTI es estable si su respuesta impulsional es absolutamente sumable. Esta condición es necesaria y suficiente.

Si $h(n)$ no es absolutamente sumable entonces, derivado de lo anterior, debería existir al menos una entrada que produce una salida no acotada y por tanto el sistema es inestable.

Si para un sistema con respuesta al impulso $h(n)$ se elige como entrada la señal

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|} & \text{para } h(-n) \neq 0 \\ 0 & \text{para } h(-n) = 0 \end{cases}$$

basta entonces con demostrar que existe algún valor de n para el que $y(n)$ no está acotada para concluir inestabilidad. Por ejemplo, calcúlese $y(0)$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = S_h$$

Quiere decir que si $h(n)$ no es absolutamente sumable ($S_h \rightarrow \infty$) entonces la salida no es acotada y el sistema es inestable.

La condición $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ implica que $h(n)$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, lo que a su vez implica que si la entrada $x(n)$ es cero para todo $n > n_0$ entonces la salida tiende a cero para $n \rightarrow \infty$:

$$y(n_0 + N) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{N-1} h(k)x(n_0 + N - k)}_{=0 \quad (x(n)=0, n > n_0)} + \sum_{k=N}^{\infty} h(k)x(n_0 + N - k)$$

$$\Rightarrow |y(n_0 + N)| = \left| \sum_{k=N}^{\infty} h(k)x(n_0 + N - k) \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)| \underbrace{|x(n_0 + N - k)|}_{\leq M_x} \leq M_x \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)|$$

Si $N \rightarrow \infty$ entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)| = 0$ y de ahí que $\lim_{N \rightarrow \infty} y(n_0 + N) = 0$.

Esto implica que en un sistema estable cualquier excitación de duración finita a la entrada produce una respuesta transitoria, es decir, una respuesta cuya amplitud decrece y se anula con el tiempo.

Ejemplo 2.14 Determine el rango del parámetro a para el que el sistema LTI de respuesta al impulso $h(n) = a^n u(n)$ es estable.

Solución:

El sistema es estable si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \dots$$

converge. Esto ocurre si y solo si $|a| < 1$ y esta suma converge a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \frac{1}{1 - |a|}$$

2.14

Ejemplo 2.15 Determine el rango de valores de a y b para los cuales el sistema LTI de respuesta

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

es estable.

Solución:

La condición de estabilidad es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n + \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{b} \right|^n}_{\text{Converge si } |b| > 1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n}_{\text{Converge si } |a| < 1} = \frac{|b|}{|b| - 1} + \frac{1}{1 - |a|}$$

El sistema es estable si $|a| < 1$ y si $|b| > 1$.

2.18

2.4.7 Sistemas de respuesta finita e infinita

Es útil distinguir los sistemas entre aquellos con una respuesta finita al impulso (FIR: *Finite Impulse Response*) y aquellos con respuesta infinita al impulso (IIR: *Infinite Impulse Response*) por las consideraciones prácticas que los distintos conceptos conllevan: la implementación de los primeros se puede realizar directamente, mientras que algunos de los segundos pueden realizarse por medio de ecuaciones de diferencias.

Para los sistemas causales FIR la convolución se reduce a

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k), \quad h(k) = 0, \quad k < 0 \wedge k \geq M \quad (2.22)$$

El sistema se comporta como una “ventana” que solo permite ver M muestras para calcular la salida. Se dice que el sistema FIR tiene memoria finita de M muestras.

2.10 Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones de diferencias

El cálculo de la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

sólo es posible para sistemas FIR, puesto que en el caso de sistemas IIR se requeriría de una memoria infinita para almacenar $h(n)$, y un número infinito de multiplicaciones y adiciones para calcular una sola muestra de la salida.

Las llamadas *ecuaciones de diferencias* permiten trabajar con sistemas IIR.

2.5.1 Sistemas discretos recursivos y no recursivos

Un sistema es *recursivo* si su salida en el instante n depende de valores anteriores de la salida, $y(n-1), y(n-2), \dots$:

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

donde $F[\cdot]$ denota una función cualquiera, y sus argumentos son las entradas y salidas presentes y pasadas.

El sistema es *no recursivo* si solo depende de las entradas presentes y pasadas, mas no de salidas pasadas:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

Nótese que los sistemas LTI FIR causales, cuya salida se expresa como la suma finita de convolución (2.22) no son recursivos.

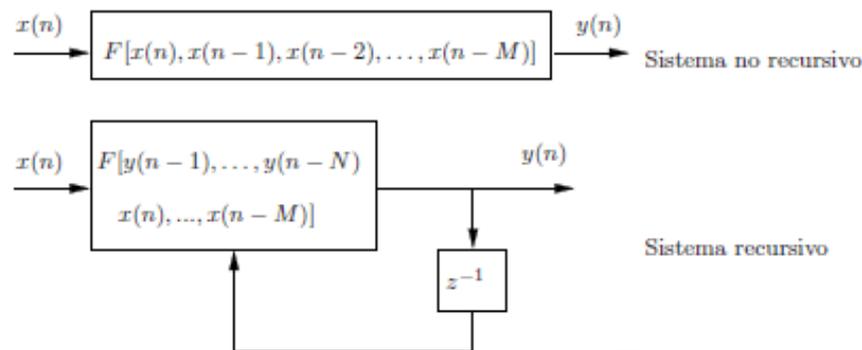


Figura 2.25: Diagrama de bloques de sistemas recursivos y no recursivos.

El lazo de realimentación da origen a una diferencia fundamental en el cálculo de la salida: La salida recursiva debe determinarse en orden, pues para calcular $y(n_0)$ se necesitan todos los N valores anteriores, mientras que en un sistema no recursivo las salidas anteriores no son necesarias y se puede calcular un valor directamente para cualquier n .

Ejemplo 2.16 Determine una expresión recursiva para el sistema de media acumulativa.

Solución:

El sistema de media acumulativa

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k)$$

es recursivo pues

$$\begin{aligned} (n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^n x(k) \\ \Rightarrow ny(n-1) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) \\ \Rightarrow (n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n) \\ y(n) &= \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} (ny(n-1) + x(n)) \quad (2.23)$$

Nótese los coeficientes *no* constantes para la salida anterior $y(n-1)$ y la entrada actual $x(n)$, que son $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{1}{n+1}$ respectivamente; estos implican que el sistema es variante en el tiempo. La figura 2.26 muestra el diagrama de bloques correspondiente.

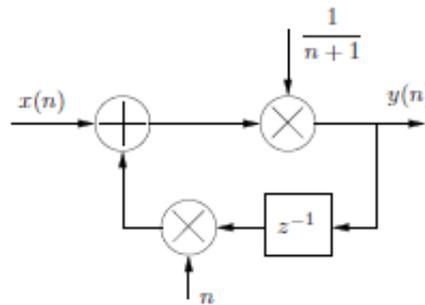


Figura 2.26: Diagrama de bloques del sistema de media acumulativa.

2.16

2.5.2 Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes

Los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes son una subclase de los sistemas recursivos y no recursivos.

Considérese un sistema causal representado por (ver además la figura 2.27)

$$y(n] = ay(n-1) + x(n)$$

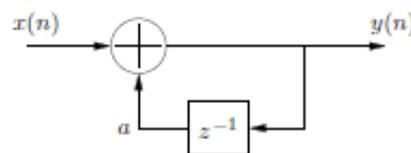


Figura 2.27: Diagrama de bloques de un sistema LTI.

que a pesar de su similitud con (2.23), difiere por la naturaleza de los coeficientes, lo que tiene implicaciones sobre la invarianza en el tiempo. En este último caso, el coeficiente a es constante y el sistema es invariante en el tiempo. Para la media acumulativa, el coeficiente es dependiente del tiempo y el sistema es entonces variante en el tiempo.

Evalúese ahora la respuesta de este sistema ante una entrada $x(n)$ con $x(n) = 0, n < 0$, y

con una condición inicial $y(-1)$:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= ay(-1) + x(0) \\
 y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1) \\
 y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2) \\
 &\vdots \\
 y(n) &= a^{n+1}y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1}x(1) + \dots + a^0x(n) \\
 &= \underbrace{a^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^n a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, n \geq 0
 \end{aligned}$$

El término $y_{zi}(n)$ depende de las condiciones iniciales y se obtendría si la entrada fuese cero (*zero input*), como producto del estado inicial del sistema y de sus características propias. A $y_{zi}(n)$ se le denomina respuesta natural o libre del sistema, o también, respuesta a entrada nula.

El término $y_{zs}(n)$ se obtiene cuando el estado del sistema es cero (*zero state*), es decir, con una entrada $x(n)$ cuando el sistema está en reposo, y se le denomina respuesta en estado nulo o respuesta forzada. Nótese que en el ejemplo $y_{zs}(n)$ puede interpretarse como la convolución de $x(n)$ con la respuesta impulsional:

$$h(n) = a^n u(n)$$

donde los índices son finitos por la causalidad de ambas señales $x(n)$ y $h(n)$.

Este ejemplo corresponde a una ecuación de diferencias de primer orden, y es un caso particular de la ecuación de diferencias:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

o con $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

donde el entero N recibe el nombre de orden de la ecuación de diferencias u orden del sistema.

Las condiciones iniciales $y(-1), \dots, y(-N)$ resumen toda la historia pasada del sistema, y son necesarias para efectuar el cálculo de las salidas presentes y futuras.

Nótese que la ecuación de diferencias por sí sola no describe un *sistema*, en el sentido de que una entrada $x(n)$ no produce *una* única salida: para cada conjunto de condiciones iniciales se obtiene una salida particular. De este modo, un sistema es caracterizado tanto por la ecuación de diferencias como por las condiciones iniciales.

Anteriormente se introdujo la propiedad de escalado (2.20) de un sistema lineal, de la que se deduce que un sistema lineal con entrada cero debe tener una entrada nula, puesto que

de otro modo aparece una inconsistencia de escalado: multiplicando cualquier entrada con cero, debe producir una salida multiplicada también por cero, que debe ser nula. Con el esquema anterior compuesto de respuestas forzada y natural se nota que la respuesta natural de un sistema descrito con una ecuación de diferencias produce una salida a pesar de que la entrada es nula, y por tanto viola la propiedad de escalado lo que indica que la ecuación en el caso general representa a un sistema no lineal.

El concepto de linealidad debe entonces replantearse como la satisfacción de tres requisitos:

1. La respuesta total es igual a la suma de las respuestas de entrada nula y en estado nulo ($y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$).
2. El principio de superposición se aplica a la respuesta en estado nulo (lineal en estado nulo).
3. El principio de superposición se aplica a la respuesta a la entrada nula (lineal a entrada nula).

La redefinición del concepto para cada una de las componentes de la respuesta permite resolver las inconsistencias introducidas por las condiciones iniciales.

2.11.- Correlación

La *correlación* es una operación similar a la convolución que se utiliza para medir la similitud entre dos secuencias. Se aplica en diversas áreas de la ingeniería como radar, sonar, comunicaciones digitales, geología, etc.

2.6.1 Autocorrelación y correlación cruzada

La *correlación cruzada* de las secuencias $x(n)$ e $y(n)$, ambas reales y de energía finita, se define como:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o lo que es equivalente:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k+n)y(k), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

El índice n es el parámetro de desplazamiento o retardo en el tiempo, y los subíndices xy indican cuáles señales han sido correlacionadas. De esta forma se tiene entonces que:

$$r_{yx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k+n)x(k) = r_{xy}(-n)$$

Por lo tanto, $r_{yx}(n)$ es la correlación $r_{xy}(n)$ reflejada con respecto a $n = 0$.

Nótese que exceptuando el paso de reflexión de una de las señales, la correlación es idéntica con la convolución: se desplaza la segunda señal, se calcula la secuencia producto, y se determina su suma. El lector puede demostrar que:

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$$

Si $y(n) = x(n)$, entonces se obtiene la *autocorrelación* de $x(n)$, que se define como la secuencia:

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k+n)x(k)$$

Si $x(n)$ e $y(n)$ son señales causales finitas de longitud N (esto es, $x(n) = y(n) = 0, \forall n < 0, n \geq N$) la correlación puede expresarse como:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=\max\{n,0\}}^{N+\min\{0,n\}-1} x(k)y(k-n)$$

2.6.2 Propiedades de la correlación

Sean $x(n)$ y $y(n)$ dos señales de energía finita. La energía de la señal:

$$w(k) = ax(k) + by(k - n)$$

es:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [ax(k) + by(k - n)]^2 &= a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) + b^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} y^2(k - n) + 2ab \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k - n) \\ &= a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2abr_{xy}(n) \end{aligned}$$

Nótese que $r_{xx}(0) = E_x$ es la energía de la señal $x(n)$ y $r_{yy}(0) = E_y$ la energía de $y(n)$. Puesto que la energía es una suma de valores positivos debe cumplirse que:

$$a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2abr_{xy}(n) \geq 0$$

y suponiendo que $b \neq 0$, se obtiene dividiendo por b^2 :

$$r_{xx}(0) \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2r_{xy}(n) \left(\frac{a}{b}\right) + r_{yy}(0) \geq 0$$

que se puede considerar como ecuación cuadrática de variable (a/b) con coeficientes $r_{xx}(0)$, $2r_{xy}(n)$ y $r_{yy}(0)$, que para ser no negativa requiere que el discriminante sea no positivo:

$$4[r_{xy}^2 - r_{xx}(0)r_{yy}(0)] \leq 0 \Rightarrow |r_{xy}(n)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

y para $y(n) = x(n)$:

$$|r_{xx}(n)| \leq r_{xx}(0) = E_x$$

es decir, la autocorrelación alcanza su valor máximo para el retardo cero, cuando por decirlo así la señal es idéntica a sí misma.

Un escalado de la señal por un escalar, escala la correlación de la misma manera, y por tanto carece en el análisis de importancia por ser más relevante la forma de la correlación. Por ello en la práctica se *normaliza* la correlación para producir así valores entre -1 y 1. La autocorrelación normalizada se define como:

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}$$

y la correlación cruzada como:

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}}$$

Como $r_{xy}(n) = r_{yx}(-n)$, se cumple para la autocorrelación $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$, es decir, es una función par.

Ejemplo 2.24 Calcule la autocorrelación de la señal:

$$x(n) = a^n u(n), \quad 0 < a < 1$$

Solución:

Para $n \geq 0$:

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k)x(k-n) = \sum_{k=n}^{\infty} a^k a^{k-n} = a^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (a^2)^k$$

y puesto que $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{N+1} = 0$ si $\alpha < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha} = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \\ r_{xx}(n) &= a^{-n} \left(\frac{a^{2n}}{1 - a^2} \right) = \frac{a^n}{1 - a^2} \end{aligned}$$

para $n < 0$:

$$\begin{aligned} r_{xx}(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)x(k-n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k a^{k-n} = a^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (a^2)^k \\ &= \frac{a^{-n}}{1 - a^2} = \frac{a^{|n|}}{1 - a^2} \end{aligned}$$

y combinando ambas partes se obtiene:

$$r_{xx}(n) = \frac{a^{|n|}}{1 - a^2}$$

que es, como se predijo, una función par $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$. Con $r_{xx}(0) = \frac{1}{1-a^2}$ se obtiene la autocorrelación normalizada:

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)} = a^{|n|}$$

2.24

2.6.3 Correlación de secuencias periódicas

La correlación anterior fue definida para señales de energía. Si las señales $x(n)$ e $y(n)$ son señales de potencia, su correlación cruzada se define como:

$$r_{xy}(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(k)y(k-n)$$

y la autocorrelación de una señal de potencia como:

$$r_{xx}(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(k)x(k-n)$$

Si las señales son periódicas con periodo N , entonces este promedio puede calcularse en un solo periodo:

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k-n)$$

En la práctica se utiliza la correlación para encontrar periodicidades en señales físicas alteradas por interferencias aleatorias.

Si por ejemplo $y(n) = x(n) + \omega(n)$, donde $x(n)$ es periódica y $\omega(n)$ es una señal aleatoria, entonces la correlación es:

$$\begin{aligned} r_{yy}(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} y(k)y(k-n) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} [x(k) + \omega(k)][x(k-n) + \omega(k-n)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} [x(k)x(k-n)] + [x(k)\omega(k-n)] + [\omega(k)x(k-n)] + [\omega(k)\omega(k-n)] \\ &= r_{xx}(n) + r_{x\omega}(n) + r_{\omega x}(n) + r_{\omega\omega}(n) \end{aligned}$$

considerando sólo M muestras y asumiendo $y(n) = 0$ para $n < 0, n \geq M$.

La periodicidad de $x(n)$ permite asumir que $r_{xx}(n)$ también es periódica y presenta picos en $n = 0, N, 2N, \text{etc.}$. Por la consideración de tan solo M muestras, conforme N tiende a M la magnitud de estos picos tiende a cero, por lo que debe escogerse $M \gg N$ y n no debe evaluarse, como regla empírica, para $n > M/2$.

Si $\omega(n)$ es aleatoria puede asumirse que $r_{x\omega}(n)$ y $r_{\omega x}(n)$ son muy pequeñas, por no estar relacionada con $x(n)$. Por la naturaleza aleatoria de $\omega(n)$ puede asumirse además que $r_{\omega\omega}(n)$ tiende rápidamente a cero, por lo que en $r_{\omega\omega}(n)$ dominará $r_{xx}(n)$, lo que permite detectar el periodo.

La figura 2.28 muestra un segmento de 701 muestras de una señal acústica representando la vocal "a". La señal original tiene una longitud de 57000 muestras. La figura 2.29 muestra el resultado de la autocorrelación, donde se aprecia claramente un periodo de aproximadamente 100 muestras, lo que se puede corroborar con la señal original en la figura 2.28.

2.6.4 Secuencias de correlación de entrada-salida

Si se aplica la señal $x(n)$ con autocorrelación $r_{xx}(n)$ a un sistema con respuesta al impulso $h(n)$, entonces:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

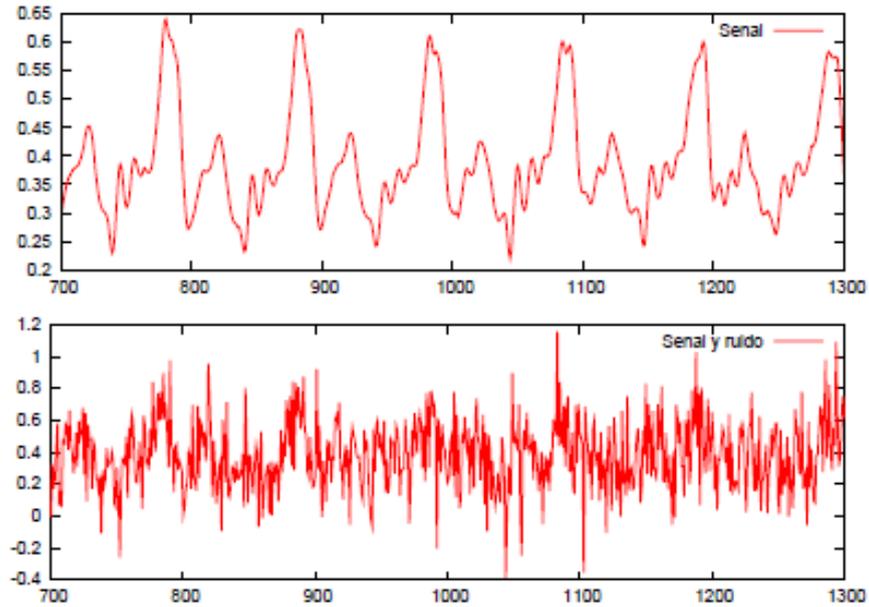


Figura 2.28: Señal acústica representando la vocal “a”, en la parte superior pura, y en la parte inferior con ruido.

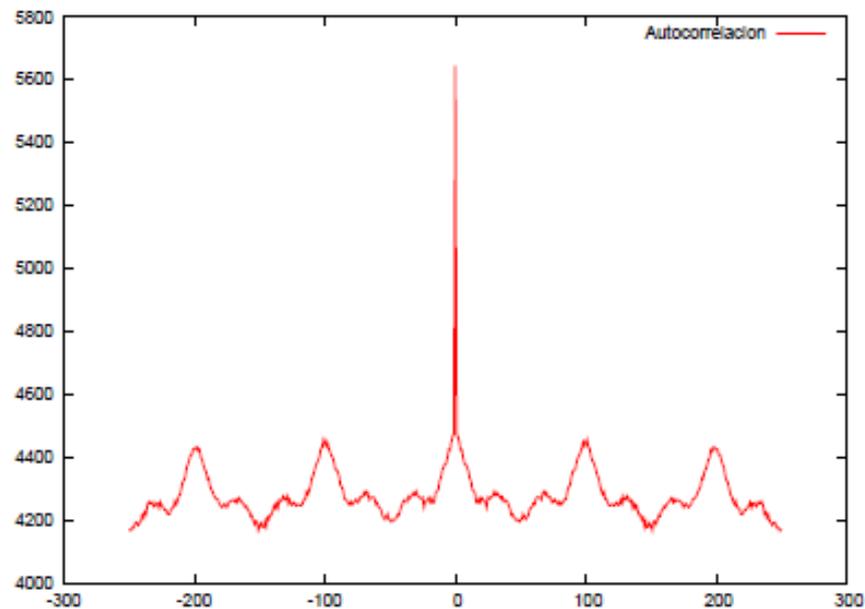


Figura 2.29: Autocorrelación de la señal con ruido en la figura 2.28.

La correlación entre la salida y la entrada es

$$\begin{aligned}
 r_{yx}(n) &= y(n) * x(-n) \\
 &= [h(n) * x(n)] * x(-n) \\
 &= h(n) * r_{xx}(n)
 \end{aligned}$$

que depende solo de la respuesta impulsional $h(n)$ y la autocorrelación de la entrada $r_{xx}(n)$.

La autocorrelación de la salida es

$$\begin{aligned}r_{yy}(n) &= y(n) * y(-n) \\ &= [h(n) * x(n)] * [h(-n) * x(-n)] \\ &= [h(n) * h(-n)] * [x(n) * x(-n)] \\ &= r_{hh}(n) * r_{xx}(n)\end{aligned}$$

que equivale a la convolución de la autocorrelación de la respuesta impulsional $r_{hh}(n)$ con la autocorrelación de la entrada $r_{xx}(n)$.

Unidad 3

3.1.- Convergencia de la transformada z.

Generalidades

La transformada Z para sistemas discretos desempeña un papel análogo a la transformada de Laplace para sistemas continuos. Nos va a permitir representar la relación entrada salida de un sistema LTI mediante un cociente de polinomios en lugar de mediante una ecuación en diferencias. Esto facilitará el cálculo de operaciones como la convolución o el cálculo de la salida de un sistema ante una determinada entrada.

Veremos su definición y el concepto de región de convergencia, los procedimientos más sencillos para el cálculo de la transformada directa e inversa y finalmente analizaremos sistemas discretos utilizando dicha transformada.

Definición: Región de convergencia

Dada una secuencia $g[n]$ se define su transformada Z (TZ) directa $G(z)$, como

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n}$$

Donde z es una variable compleja.

Habitualmente se representa $G(z) = Z\{g[n]\}$ o $G(z) = TZ\{g[n]\}$

La relación entre la secuencia y su transformada se denota por: $g[n] \xleftrightarrow{Z} G(z)$

Región de Convergencia.(ROC)

Dado que la transformada Z es una serie de potencias infinita, sólo existe para aquellos valores de z para los que la serie converge. El conjunto de valores de Z para los que la suma es finita se denomina región de convergencia.

La TZ de una secuencia $g[n]$ se especifica como $G(z)$ y su ROC

Ejemplos:

a) $x[n] = \{1, 2, 3, 5\}$ $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3}$ $ROC = \text{plano } Z - \{z = 0\}$

b) $x[n] = \{1, 2, 3, 5\}$ $X(z) = z^2 + 2z + 3 + 5z^{-1}$ $ROC = \text{plano } Z - \{z = 0, z = \infty\}$

c) $x[n] = \delta(n)$ $X(z) = 1$ $ROC = \text{plano } Z$

d) $x[n] = \delta(n-1)$ $X(z) = z^{-1}$ $ROC = \text{plano } Z - \{z = 0\}$

A ser z una variable compleja podemos hacer el cambio $j\omega \rightarrow z = r e^{j\omega}$ e luego la transformada se puede expresar como:

$$G(z) \Big|_{z=r e^{j\omega}} = G(r e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] r^{-n} e^{-j\omega n}$$

Para que esta serie converja $G(z) < \infty$, es necesario que se verifique

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n] r^{-n}| < \infty$$

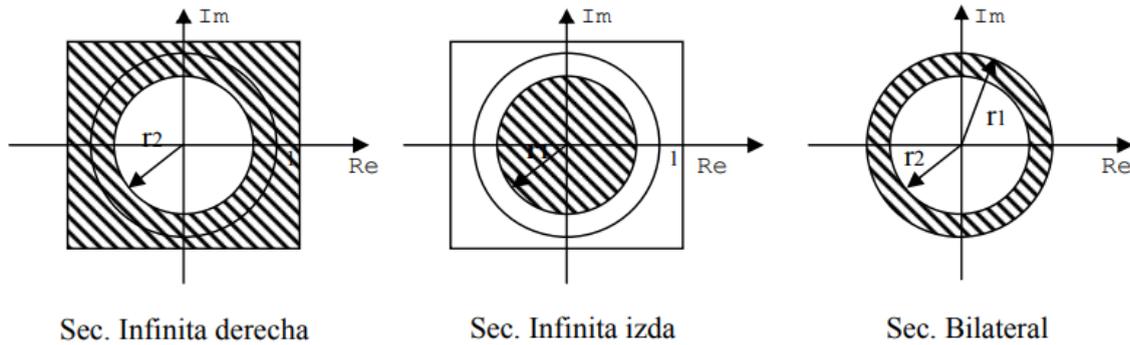
Es decir que la secuencia $\{g[n]\}_n$ sea absolutamente sumable. El cálculo de la ROC consiste en determinar para qué valores de r la suma converge. En general, para una secuencia bilateral podemos expresar como 2 sumatorios uno para la parte causal y otro para la anticausal

$$|G(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |g[n]r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |g[n]r^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |g[-n]r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|g[n]\frac{1}{r^n}\right|$$

Para que ambas secuencias converjan, se debe cumplir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g[-n]r^n| < \infty \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \left|g[n]\frac{1}{r^n}\right| < \infty$$

Para que el primer sumatorio converja r debe ser lo suficientemente pequeño como para que la secuencia producto sea sumable, y en el segundo caso debe ocurrir lo contrario; es decir r debe ser lo suficientemente grande. En general para una secuencia bilateral la ROC debe estar comprendida en un anillo del plano complejo de radios r_1 y r_2 $r_1 < |z| < r_2$ siendo r_2 el límite de la región de convergencia para la parte causal y r_1 para la parte anticausal.



Ejemplo 1:

Determina la TZ de la secuencia: $x[n] = \alpha^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

para que se pueda realizar la suma es necesario que $|\alpha z^{-1}| < 1$

Luego:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| > |\alpha|$$

Ejemplo 2:

Determina la TZ de la secuencia: $y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m = -\frac{\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{para } |\alpha^{-1} z| < 1$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| < \alpha$$

Conclusión:

La transformada Z de una secuencia $x[n]$ viene determinada por:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad \text{y} \quad \text{ROC}$$

Es IMPRESCINCIBLE especificar la región de convergencia, ya que de lo contrario la obtención de $x[n]$ a partir de $X(z)$ no está completamente especificada (la solución no es única)

3.2.- Propiedades de la transformada z.

- La ROC está siempre limitada por un círculo, ya que viene determinada por el módulo de z.
- La ROC de una secuencia derecha de infinitos términos (términos no nulos para $n > n_0$), es el exterior de una circunferencia de radio r2.
- La ROC de una secuencia izquierda de infinitos términos (términos no nulos para n
- La ROC de una secuencia infinita bilateral es un anillo . $2 \leq r < z < r$, o bien no existe.
- La ROC no puede contener polos, ya que en ellos la transformada diverge.
- Al menos hay un polo en los límites de la ROC de una transformada, X(z), racional.

TABLA 3.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Propiedad	Domínio del tiempo	Domínio z	ROC
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	ROC: $r_2 < z < r_1$ ROC ₁ ROC ₂
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	Como mínimo la intersección de ROC ₁ y ROC ₂
Desplazamiento en el tiempo	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	La de X(z), excepto $z=0$ si $k > 0$ y $z=\infty$ si $k < 0$
Escala en el dominio z	$\alpha^n x(n)$	$X(\alpha^{-1}z)$	$ k r_2 < z < k r_1$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < z < \frac{1}{r_2}$
C conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte real	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye a la ROC
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye a la ROC
Diferenciación en el dominio z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < z < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Como mínimo, la intersección de ROC ₁ y ROC ₂
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	Como mínimo, la intersección de las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z^{-1})$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ causal	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	Como mínimo, $r_{12}r_{21} < z < r_{12}r_{21}$
Relación de Parseval	$\sum_{-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$		

Ejemplos:

Aplicando las propiedades anteriores determina la transformada Z y la ROC de las siguientes secuencias.

1. $x(n) = [2 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n] u(n)$

2. $x(n) = \cos(\omega_0 n) u(n)$

3. $x(n) = a^n$

4. $x(n) = 2^n \cos(\omega_0 n) u(n)$

5. $x(n) = u(-n-1)$

6. $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$

7. $h(n) = \{1, 2, 3\}$, $x(n) = u(n) - u(n-4)$. $y(n) = h(n) * x(n)$, Calcule $Y(z)$

8. $x(n) = n 2^n u(n-1)$

9. $x(n) = a^{|n|} = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1)$

10. $x(n) = 2^{n-2} u(n-2)$

Pares de transformadas básicas

	Señal, $x(n)$	Transformada z , $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
5	$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
6	$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
7	$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
8	$(\text{sen } \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1} \text{sen } \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$(a^n \cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
10	$(a^n \text{sen } \omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1} \text{sen } \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

3.3.- Inversión de la transformada z.

La transformada Z inversa de una función de variable compleja $X(z)$ se define como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Donde la integral se calcula sobre una curva cerrada simple C positivamente orientada que encierra el origen y que cae en la región de convergencia (ROC) de $X(z)$. A pesar de la definición, es más conveniente calcular la transformada Z inversa buscando la señales que tienen como transformada Z a la expresión $X(z)$. Veremos tales métodos.

Método de Fracciones Parciales

En la mayoría de las aplicaciones el problema consiste en determinar la transformada Z inversa de una función racional $X(z)$. Es decir, de la división entre dos polinomios. El Método de Fracciones Parciales la expresión se convierte en una combinación lineal de transformadas de funciones básicas como $\delta(n)$, $a^n u(n)$ y $n a^n u(n)$. De ser posible tal descomposición, entonces es sencillo encontrar la transformada inversa mediante la aplicación de una tabla. En muchos casos, sería más conveniente primero desarrollar $X(z)/z$ en fracciones parciales, y después despejar $X(z)$ multiplicando por z . Ello porque el caballito de batalla es $Z \{a^n u(n)\} = z/(z - a)$ y cuando multipliquemos por z los factores lineales quedaran a modo.

Método Rápido de Fracciones Parciales I

Es practico que recuerde el método rápido para el cálculo de fracciones parciales en el caso de términos lineales NO REPETIDOS: En el desarrollo de fracciones parciales cuando $z = a$ NO es un cero de $Q(z)$

$$\frac{P(z)}{(z - a) Q(z)} = \frac{A}{z - a} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

El valor de A puede calcularse en forma independiente de $R(z)$ mediante la formula

$$A = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Método Rápido de Fracciones Parciales II

Es también práctico que recuerde el método rápido para el cálculo de fracciones parciales en el caso de términos lineales REPETIDOS: En el desarrollo de fracciones parciales cuando $z = a$ NO es un cero de $Q(z)$

$$\frac{P(z)}{(z-a)^2 Q(z)} = \frac{A}{(z-a)^2} + \frac{B}{(z-a)} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

El valor de A puede calcularse en forma independiente de $R(z)$ mediante la fórmula

$$A = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Mientras que el valor de B se calcula como

$$B = \frac{P'(a) - A \cdot Q'(a)}{Q(a)}$$

Método rápido de Fracciones Parciales III

Cuando en el denominador se tiene un cero de orden tres:

$$\frac{P(z)}{(z-a)^3 Q(z)} = \frac{A}{(z-a)^3} + \frac{B}{(z-a)^2} + \frac{C}{(z-a)} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

(Se supone que $Q(a) \neq 0$). Entonces los coeficientes pueden calcularse por las fórmulas:

$$A = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

$$B = \frac{P'(a) - A \cdot Q'(a)}{Q(a)}$$

$$C = \frac{P''(a) - A \cdot Q''(a) - 2B Q'(a)}{2! Q(a)}$$

3.4.- Aplicaciones de la transformada z.

La Transformada de Zeta es un modelo matemático similar a la transformada de Fourier para el caso del tiempo discreto o las transformadas de Fourier y Laplace para el caso de tiempo continuo, que se emplea entre otras aplicaciones en el estudio del procesamiento de señales digitales, como son el análisis y proyecto de circuitos digitales, los sistemas de radar o telecomunicaciones y especialmente los sistemas de control de procesos por computadoras.

DESARROLLO

Supongamos que la sucesión de observaciones $\{x_k\}$ está siendo grabada y recibimos la observación x_k en el paso (tiempo) o índice k . Podríamos intentar procesar (por ejemplo suavizar o filtrar) esta sucesión de observaciones $\{x_k\}$ utilizando el sistema de retroalimentación de tiempo discreto ilustrado en la Figura 1.

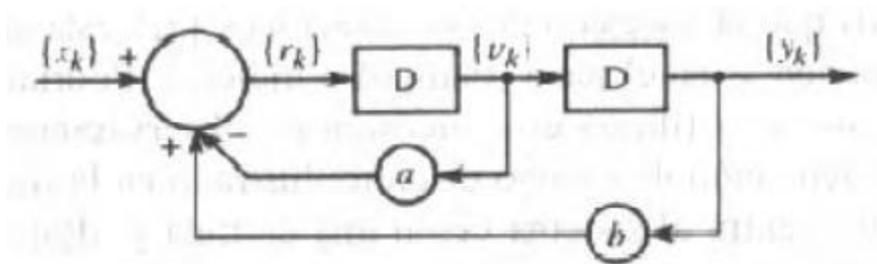


Figura 1. Diagrama en bloque de un sistema de control.

En el tiempo k la observación x_k entra al sistema como una entrada y después de mezclarse con la señal de retroalimentación en la unión de sumas continúa hacia el bloque D transformada en la señal r_k .

Este bloque representa un retardo unitario y su función es mantener su señal de entrada hasta que el reloj avance un paso, al paso $k+1$.

En este momento la señal de entrada sale sin alteraciones convirtiéndose en la señal retardada un segundo v_k . Al mismo tiempo parte de esta señal es regresada hacia atrás a través del bloque de ganancia constante a a la unión de suma.

Este proceso es instantáneo y en la unión de sumas la señal de retroalimentación es retrasada de la siguiente observación de entrada x_{k+1} para proveer la siguiente entrada al bloque de retardo D . Mientras que parte de la señal v_k es enviada hacia el bloque de sumas por medio del bloque a , otra parte es dirigida hacia un segundo bloque de retardo D , el cual cumple la misma función retardando la señal v_k para convertirla en la señal y_k .

Matemáticamente las salidas de los bloques de retardo son:

$$y_{k+1} = v_k \quad (1)$$

$$v_{k+1} = r_k \quad (2)$$

Y en la unión de sumas:

$$r_k = x_k - av_k + by_k \quad (3)$$

De la ecuación (1) obtengo

$$y_{k+2} = v_{k+1} \quad (4)$$

Que al utilizar la ecuación (2) puedo expresar

$$y_{k+2} = r_k \quad (5)$$

Al sustituir r_k de (3) se obtiene

$$y_{k+2} = x_k - av_k + by_k \quad (6)$$

Que usando (1) se convierte en

$$y_{k+2} = x_k - ay_{k+1} + by_k \quad (7)$$

Reorganizando esto da

$$y_{k+2} + ay_{k+1} - by_k = x_k \quad (8)$$

Observamos que la ecuación (8) es una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de segundo orden porque el término involucrado en el mayor corrimiento de la sucesión $\{y_k\}$ es el término y_{k+2} , lo que implica un corrimiento de dos pasos. Por último sabemos que la ecuación (8) representa el sistema de la Figura 1. Si al sistema de la figura 1, ahora le asignamos valores como por ejemplo $a=1$, $b=2$ y la sucesión de entrada $\{x_k\}$ es la sucesión escalón unitario $\{1\}$ entonces podremos resolver la ecuación en diferencias (8) utilizando la transformada Z.

Sustituyendo los valores de a y b en la ecuación (8) obtenemos

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1 \quad (k \geq 0) \quad (9)$$

Aplicando la transformada Z en (9) da

$$Z\{y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k\} = Z\{1, 1, 1, \dots\} \quad (10)$$

Que utilizando la propiedad de linealidad y el resultado $Z\{1\} = z/(z-1)$, puede escribirse como

$$Z\{y_{k+2}\} + Z\{y_{k+1}\} - Z\{2y_k\} = \frac{z}{z-1} \quad (11)$$

Recordemos las transformadas

$$Z\{x_{k+1}\} = zX(z) - zx_0 \quad (12)$$

$$Z\{x_{k+2}\} = z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1 \quad (13)$$

Utilizando (12) y (13) en la ecuación (11) se obtiene

$$[z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1] + [zY(z) - zy_0] - 2Y(z) = \frac{z}{z-1} \quad (14)$$

Que al reorganizar es

$$(z^2 + z - 2)Y(z) = \frac{z}{z-1} + z^2y_0 + z(y_1 + y_0) \quad (16)$$

Para continuar resolviendo la ecuación necesitaremos conocer el primer y segundo término y_0 e y_1 de la sucesión solución $\{y_k\}$. Sin esta información adicional no podemos obtener una solución única. Supongamos que estos valores los conocemos (o son datos)

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

Entonces al aplicar los valores y_0 e y_1 en la ecuación (15) se convierte en

$$(z^2 + z - 2)Y(z) = z + \frac{z}{z-1} \quad (17)$$

Que al descomponer obtenemos

$$(z + 2)(z - 1)Y(z) = z + \frac{z}{z-1} \quad (18)$$

Despejando $Y(z)$ obtenemos

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)} + \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2} \quad (19)$$

Luego dividimos por z ambos miembros y entonces

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} \quad (20)$$

Recordamos las siguientes transformadas

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{(z-a)} \quad (21)$$

$$\mathcal{Z}\{ka^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2} \quad (22)$$

Acomodamos la ecuación (18) y obtenemos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{z}{(z-1)} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2} \quad (23)$$

Finalmente anti transformamos usando (20) y (21)

$$\{y_k\} = \left\{ \frac{1}{3}k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}(-2)^k \right\} \quad (k \geq 0) \quad (24)$$

La ecuación (23) representa la sucesión solución para la ecuación en diferencias que satisface las condiciones $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$.

El método desarrollado en este ejemplo se llama método de la transformada z para resolver ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, y es análogo al método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

3.5 Transformadas z racionales

Una clase de transformadas z encontradas con frecuencia en sistemas digitales presentan una forma racional, es decir, un cociente de polinomios en $z-1$ ó z . La tabla 3.1 resume la transformada z de algunas funciones comunes con transformadas de este tipo.

3.6 Polos y ceros

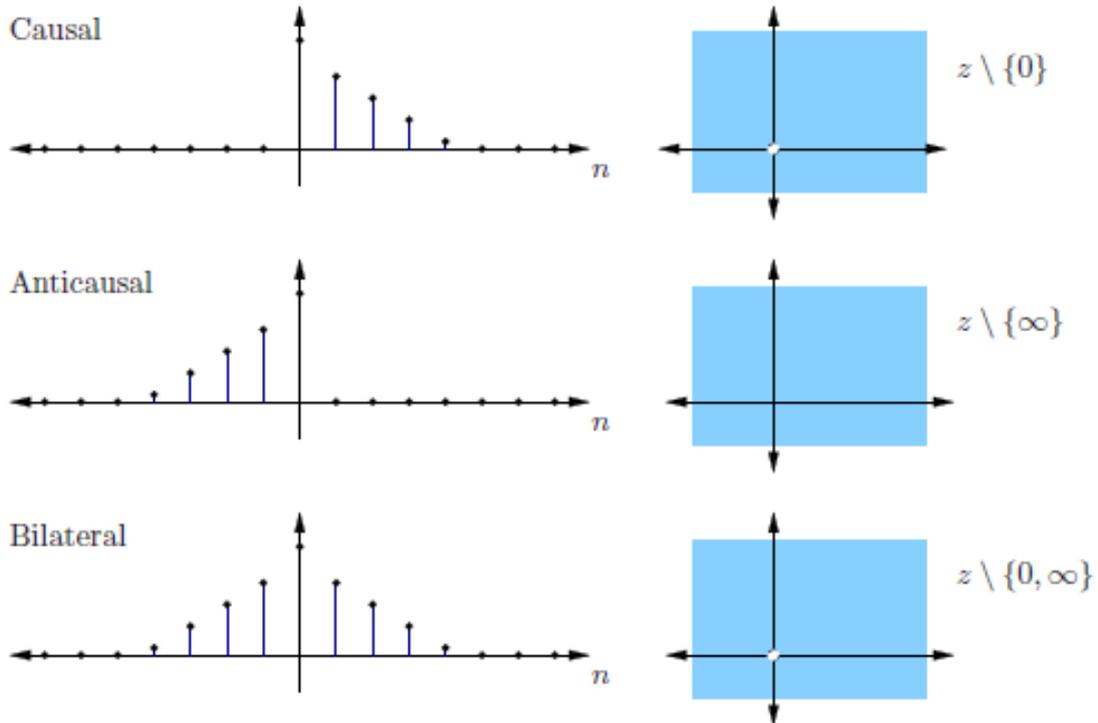
Los *ceros* de la transformada z racional $X(z)$ son aquellos valores de z para los que $X(z) = 0$, y los *polos*, aquellos z para los que $X(z) = \infty$ y la serie de Laurent centrada en z contiene un número finito de términos en su parte principal. Como $X(z)$ es racional, entonces:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_kz^{-k}}$$

Asumiendo $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ y factorizando b_0z^{-M} y a_0z^{-N} para eliminar las potencias negativas se obtiene:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0z^{-M}}{a_0z^{-N}} \cdot \frac{z^M + \frac{b_1}{b_0}z^{M-1} + \dots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N + \frac{a_1}{a_0}z^{N-1} + \dots + \frac{a_N}{a_0}}$$

Funciones de duración finita



Funciones de duración infinita

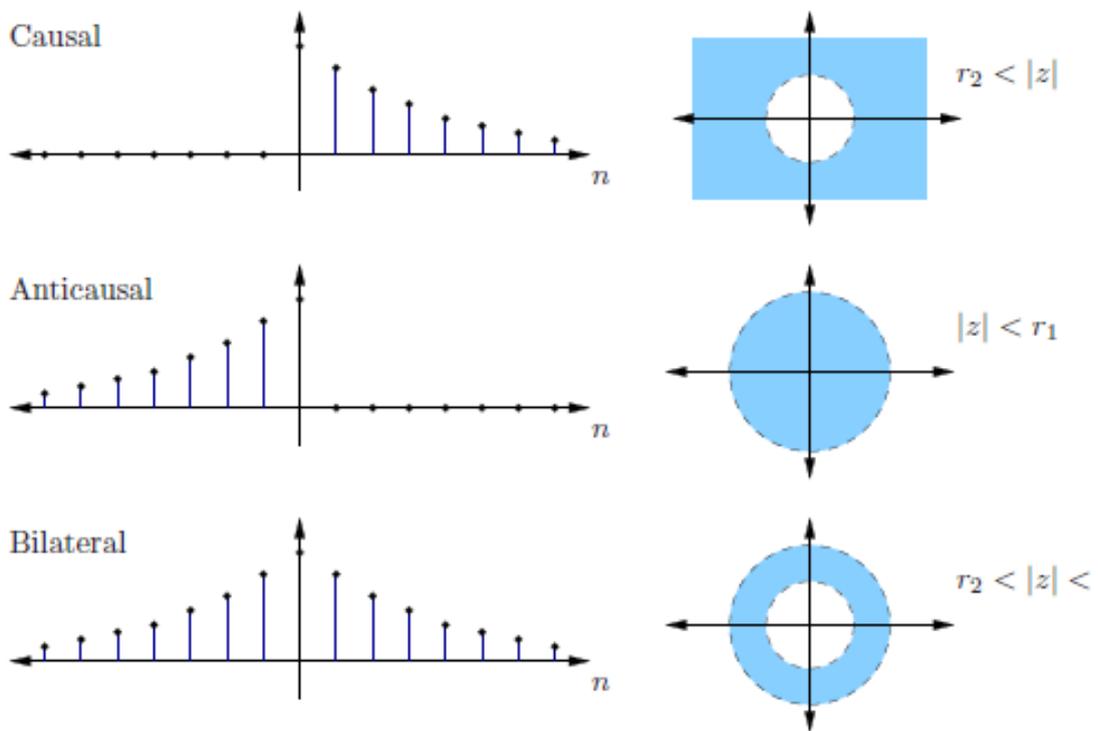


Figura 3.4: Familia de Señales y sus ROC[15].

Tabla 3.1: Transformada z de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z , $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-(a^n)u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$-n(a^n)u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\text{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1} \text{sen} \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \text{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1} \text{sen} \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > 1$

Puesto que $N(z)$ y $D(z)$ son polinomios en z , y debido al teorema fundamental del álgebra, $X(z)$ se puede expresar como:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} = G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

donde la constante G es igual a $\frac{b_0}{a_0}$; los ceros $\{z_k\}$ y los polos $\{p_k\}$ corresponden a las raíces de los polinomios $N(z)$ y $D(z)$ respectivamente, y hay $N - M$ ceros en el origen si $N > M$, o $M - N$ polos en el origen si $M > N$. También se dice que hay un cero en infinito si $X(\infty) = 0$, o un polo si $X(\infty) = \infty$. Si se cuentan estos últimos, el número de polos y ceros es siempre idéntico.

$X(z)$ puede representarse mediante un diagrama de polos y ceros en el plano complejo z , donde los ceros se denotan con “o” y los polos con “x”. La multiplicidad se denota con un índice al lado del símbolo (por ejemplo, un polo de tercer orden se denota con \times^3). Evidentemente la ROC no puede contener ningún polo, puesto que en él la función no converge.

Si los coeficientes de los polinomios son reales, entonces sus raíces serán o reales, o aparecerán en pares complejos conjugados. De lo anterior se deriva que si un polinomio es de orden impar, deberá entonces tener al menos una raíz real. Por otro lado, para la factorización de

Ejemplo 3.1 Determine el diagrama de polos y ceros de la señal $x(n) = a^n u(n)$, para a real positivo.

Solución:

Con $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, ROC : $|z| > |a|$, se obtiene un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$ (figura 3.5).

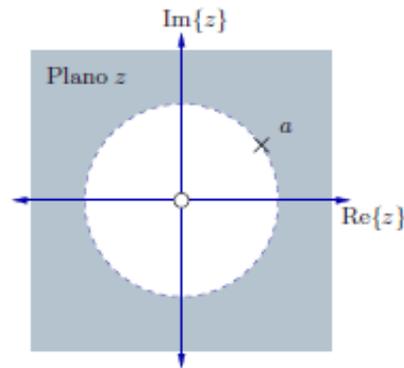


Figura 3.5: Diagrama de polos y ceros del ejemplo 3.1.

3.1

Ejemplo 3.2 Determine la transformada z de

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

con a real positivo.

Solución:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n$$

Puesto que $\sum_{n=0}^{M-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^M}{1-\alpha}$, entonces:

$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - (az^{-1})} = \frac{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^M}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{\frac{z^M - a^M}{z^M}}{\frac{z-a}{z}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z-a)}$$

con $a = a \cdot 1 = a \cdot e^{j2k\pi}$, $z^M - a^M = 0 \Rightarrow z^M = a^M = a^M e^{j2k\pi}$ de donde se deduce que $z = ae^{j2\pi k/M}$. Es decir, $z^M - a^M$ tiene M raíces $ae^{j2\pi k/M}$, $k = 0, \dots, M-1$. En resumen,

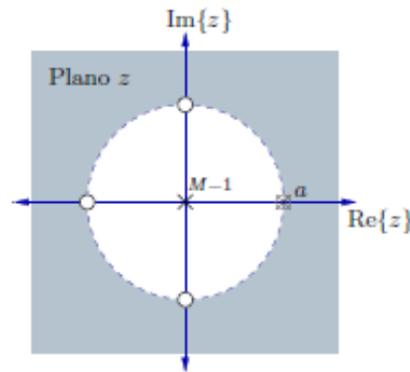


Figura 3.6: Diagrama de polos y ceros del ejemplo 3.2 con $M = 4$.

$X(z)$ tiene un polo en $z = 0$ con multiplicidad $M - 1$ y otro polo en $z = a$, que se cancela con el cero en a , y $M - 1$ ceros distribuidos en un círculo de radio $|a|$ (figura 3.6).

3.2

Ejemplo 3.3 Determine la transformada z y la señal correspondiente al diagrama de polos y ceros de la figura 3.7.

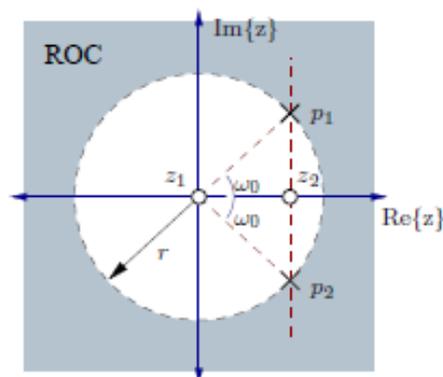


Figura 3.7: Diagrama de polos y ceros para el ejemplo (3.3).

Solución:

La transformada tiene dos ceros y dos polos: $z_1 = 0$, $z_2 = r \cos \omega_0$, $p_1 = r(\cos \omega_0 + j \sin \omega_0) = re^{j\omega_0}$, $p_2 = r(\cos \omega_0 - j \sin \omega_0) = re^{-j\omega_0}$.

$$\begin{aligned}
 X(z) &= G \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = G \frac{z(z - r \cos \omega_0)}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})} \\
 &= G \frac{1 - rz^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2rz^{-1} \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}, \quad \text{ROC: } |z| > r
 \end{aligned}$$

De la tabla 3.1 se obtiene $x(n) = G(r^n \cos \omega_0 n)u(n)$

3.3

3.7 Localización de los polos y el comportamiento en el dominio de n para señales causales

Si una señal real tiene una transformada z con un solo polo, este tiene que ser real, y la señal correspondiente es entonces la exponencial real:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a| \quad \bullet \rightarrow x(n) = a^n u(n)$$

que tiene además un cero en $z = 0$. Nótese que $X_2(z) = \frac{1}{z-a}$, corresponde a $X(z)z^{-1}$ y por tanto la señal correspondiente a $X_2(z) \bullet \rightarrow x_2(n) = x(n-1)$ que sigue siendo una exponencial real.

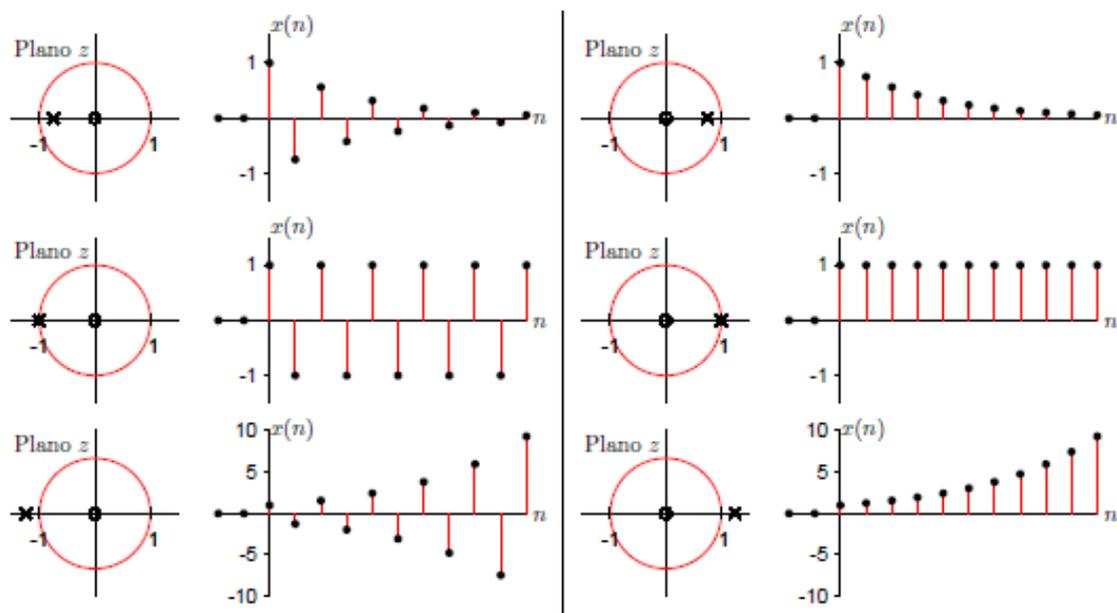


Figura 3.8: Comportamiento de la señal en relación con la posición de un polo real.

La figura 3.8 muestra el comportamiento de la señal en relación con la posición del polo real, incluyendo su magnitud y signo.

De la tabla 3.1, se obtiene que:

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az^{-1}}{z^{-2}(z - a)^2} = \frac{az}{(z - a)^2}, \quad \text{ROC: } |z| > |a| \quad \bullet \rightarrow x(n) = na^n u(n)$$

es una función con un polo en $z = a$ de multiplicidad dos y un cero en $z = 0$. Su comportamiento se muestra en la figura 3.9.

Nótese que si $|a| = 1$ y el polo es simple, la señal corresponde a la respuesta al impulso de un sistema, éste es entonces condicionalmente estable, pero no así si el polo es de mayor multiplicidad.

Un par de polos complejos conjugados simples conducen a una señal discreta sinusoidal, multiplicada por una envolvente exponencial discreta cuya forma está determinada por la

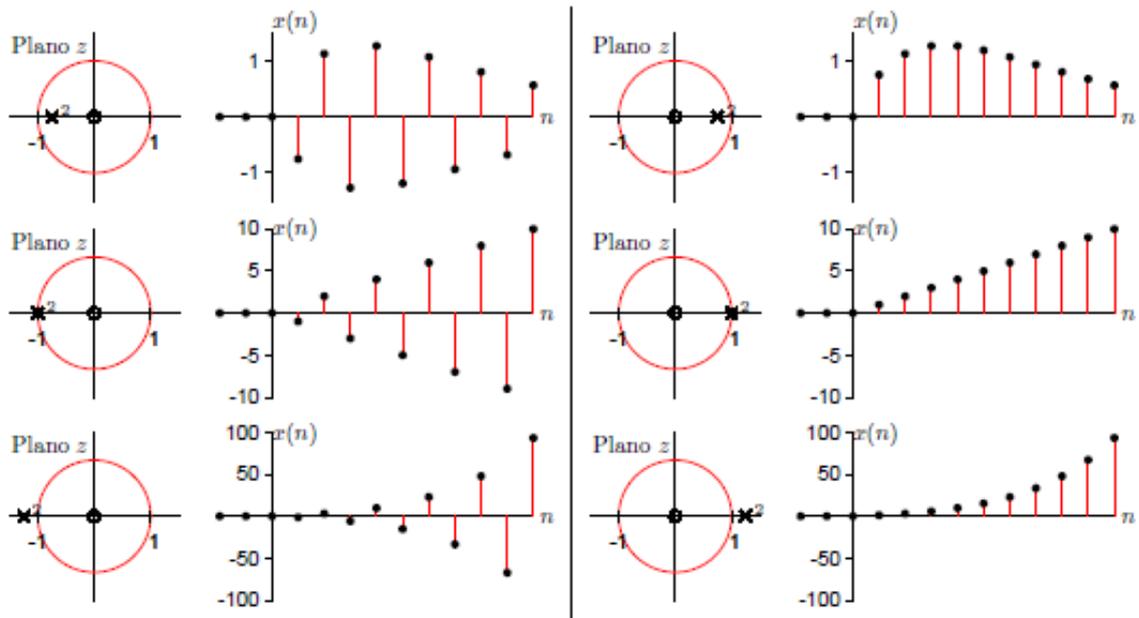


Figura 3.9: Comportamiento de la señal es si su transformada tiene un polo doble real, de acuerdo con la posición del polo.

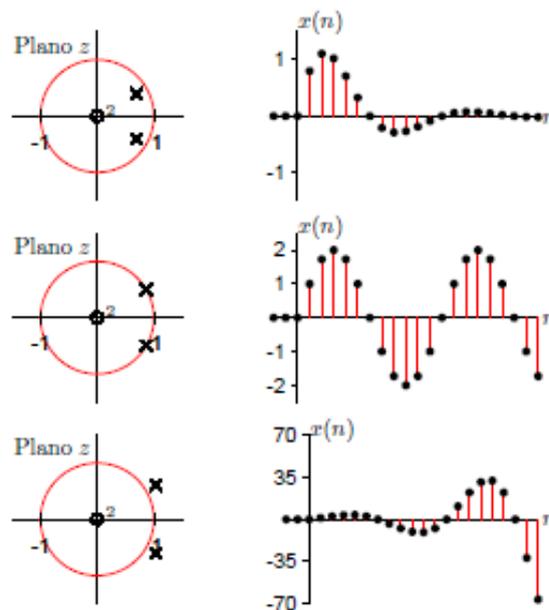


Figura 3.10: Señales en relación con la ubicación de un par de polos simples conjugados en su transformada z .

magnitud de los polos (figura 3.10). Las señales reales causales con polos reales simples o pares de polos simples complejos conjugados que están dentro de la circunferencia unitaria son acotadas en magnitud. Una señal con polos cerca del origen decrece más rápidamente que otra con polos más cercanos a la circunferencia unitaria. El efecto de la posición de los ceros no es tan determinante como la posición de los polos. Por ejemplo, en el caso de las

3.8 La función de transferencia de un sistema LTI

En el capítulo 2 se encontró que la salida $y(n)$ de un sistema LTI con respuesta impulsional $h(n)$ y entrada $x(n)$ está dada por la convolución $y(n) = h(n) * x(n)$, que ya se demostró en el dominio z ser equivalente a $Y(z) = H(z)X(z)$, con $y(n) \circ \bullet Y(z)$, $x(n) \circ \bullet X(z)$ y $h(n) \circ \bullet H(z)$. A $H(z)$, la transformada z de la respuesta impulsional, se le denomina *función de transferencia* del sistema. Nótese que conociendo $H(z)$ y la transformada z de la entrada $X(z)$ es posible calcular fácilmente la transformada z de la salida del sistema, por medio de su producto. Sin embargo, es también posible, conociendo $Y(z)$ y $X(z)$, obtener la función de transferencia con:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

a partir de la cual se puede determinar la respuesta impulsional por medio de la transformada z inversa.

Con la ecuación de diferencias del sistema

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

se obtiene transformando al dominio z ambos lados:

$$\begin{aligned} Y(z) &= -\sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k} \\ &= -Y(z) \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} + X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \\ Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) &= X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \end{aligned}$$

Lo que implica que un sistema lineal descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes tiene una función de transferencia racional.

Si $a_k = 0$ para $k \in [1, N]$ (sistema no recursivo), entonces

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$$

es decir, el sistema tiene un polo en el origen de multiplicidad M y M ceros determinados por los parámetros $\{b_k\}$. Dado que el sistema contiene M polos triviales en $z = 0$ y M ceros

no triviales, se le denomina *sistema de todos ceros*. Un sistema así es evidentemente FIR y se le denomina sistema de media ponderada móvil.

Si $b_k = 0$ para $k \in [1, M]$ el sistema es recursivo y:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}, \quad a_0 \stackrel{!}{=} 1$$

que tiene un cero trivial en $z = 0$ de orden N y N polos determinados por los coeficientes $\{a_k\}$. A este sistema se le denomina *sistema de todos polos*, que siempre corresponde a un sistema IIR.

La forma general se denomina *sistema de polos y ceros*, con N polos y M ceros. Los polos y ceros en $z = 0$ y $z = \infty$, usualmente no se consideran de forma explícita. Por la presencia de polos, este sistema es también IIR.

Ejemplo 3.4 Determine la función de transferencia y la respuesta impulsional del sistema descrito por:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + 2x(n)$$

Solución:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + 2X(z) \\ Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) &= 2X(z) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z}{z - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

que tiene un polo en $z = \frac{1}{2}$ y un cero en $z = 0$. Utilizando la tabla de transformadas se obtiene:

$$H(z) \bullet \rightarrow h(n) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

3.4

Ejemplo 3.5 Asíumase que un sistema se rige por el diagrama de polos y ceros mostrado en la figura 3.7. Encuentre la ecuación de diferencias que lo realiza.

Solución:

En el diagrama se observa una región de convergencia externa al círculo de radio r , lo que implica que el sistema es causal.

Utilizando los resultados del ejemplo 3.3 se obtiene que la función de transferencia equivalente al diagrama de polos y ceros corresponde a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = G \frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad \text{ROC: } |z| > r$$

y por tanto

$$Y(z) (1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}) = X(z) G (1 - r \cos \omega_0 z^{-1})$$

$$Y(z) - 2r \cos \omega_0 Y(z) z^{-1} + r^2 Y(z) z^{-2} = G X(z) - G r \cos \omega_0 X(z) z^{-1}$$



$$y(n) - 2r \cos \omega_0 y(n-1) + r^2 y(n-2) = G x(n) - G r \cos \omega_0 x(n-1)$$

y finalmente

$$y(n) = 2r \cos \omega_0 y(n-1) - r^2 y(n-2) + G x(n) - G r \cos \omega_0 x(n-1)$$

3.5

3.9 Respuesta de sistemas con función de transferencia racional

Sea un sistema dado por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Su función de transferencia $H(z)$ es racional de la forma $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, donde el polinomio $B(z)$ determina los ceros y $A(z)$ los polos de $H(z)$.

Si se asume además que el sistema está en reposo, esto es, $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-N) = 0$, y que la entrada $X(z)$ también puede representarse en forma racional como $X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)}$, entonces se tiene que la transformada de la función de salida es de la forma:

$$Y(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)}$$

Supóngase ahora que $A(z) = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})$, $Q(z) = \prod_{k=1}^L (1 - q_k z^{-1})$ y $p_k \neq q_m, \forall k, m$, y que ningún cero coincide con los polos, entonces se cumple que:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

y por lo tanto su transformada inversa será:

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^N A_k p_k^n u(n)}_{\text{respuesta natural}} + \underbrace{\sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u(n)}_{\text{respuesta forzada}}$$

Esta secuencia se compone de dos partes: las respuestas natural y forzada. La *respuesta natural* depende de los polos $\{p_k\}$ del sistema y es influenciada por la entrada $x(n)$ a través de los coeficientes $\{A_k\}$. La *respuesta forzada* depende de los polos de la entrada $\{q_k\}$ y es influenciada por el sistema a través de los coeficientes $\{Q_k\}$.

Si $X(z)$ ó $H(z)$ tienen polos múltiples o polos en común, entonces la respuesta $Y(z)$ tendrá términos de la forma $\sum_{l=1}^m \frac{1}{(1-p_k z^{-1})^l}$, donde m es el orden del polo, lo que conducirá a términos en $y(n)$ de la forma $n^{l-1} p_k^n u(n)$.

3.10 Condiciones iniciales no nulas

Para calcular la respuesta de un sistema a una entrada causal $x(n)$ con condiciones iniciales no nulas, se utiliza la transformada z unilateral:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^M b_k x(n-k)$$



$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right] + \sum_{k=1}^M b_k z^{-k} \left[X^+(z) + \underbrace{\sum_{n=1}^k x(-n) z^n}_{=0 \text{ por causalidad}} \right]$$

Puesto que $x(n)$ es causal, entonces $X^+(z) = X(z)$ y se tiene:

$$Y^+(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = X^+(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n,$$

de donde se despeja:

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \end{aligned}$$

La salida del sistema consta entonces de dos partes, la respuesta de estado nulo

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$$

y la respuesta de entrada nula que depende de las condiciones iniciales

$$Y_{zi}^+(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)}$$

puesto que $Y^+(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}^+(z) \xrightarrow{z \rightarrow y(n)} y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$. Al ser $A(z)$ el denominador de $Y_{zi}^+(z)$ sus polos serán $\{p_k\}$, y la respuesta a entrada nula tendrá la forma:

$$y_{zi} = \sum_{k=1}^N D_k p_k^n u(n)$$

lo que puede añadirse a la respuesta natural y combinarse para dar:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A'_k p_k^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u(n), \text{ con } A'_k = A_k + D_k$$

En resumen, las condiciones iniciales alteran la respuesta natural del sistema modificando los factores de escala $\{A_k\}$. No se introducen nuevos polos ni se modifica la respuesta forzada.

Ejemplo 3.6 Determine la respuesta al escalón $u(n)$ del sistema dado por

$$y(n) = 0,9y(n-1) - 0,81y(n-2) + x(n)$$

para las condiciones iniciales:

1. $y(-1) = y(-2) = 0$
2. $y'(-1) = y'(-2) = 1$

Solución: La función de transferencia está dada por:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-2}}$$

cuyos polos son complejos conjugados: $p_{1,2} = 0,9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$

$$x(n) = u(n) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Con lo que se obtiene directamente:

$$\begin{aligned} Y_{zs}(z) &= \frac{1}{(1 - 0,9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1 - 0,9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{0,542 - j0,049}{1 - 0,9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{0,542 + j0,049}{1 - 0,9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{1,099}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$y_{zs}(n) = \left[1,099 + 1,088(0,9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5,2^\circ\right) \right] u(n)$$

Para 1. $y(n) = y_{zs}(n)$

Para 2., con las condiciones iniciales se obtiene:

$$\begin{aligned}
 N_0 &= -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \\
 &= -(a_1 z^{-1} \{y(-1)z\} + a_2 z^{-2} \{y(-1)z + y(-2)z^2\}) \\
 &= -(a_1 y(-1) + a_2 y(-1)z^{-1} + a_2 y(-2)) \\
 &= -(-0,9 + 0,81 + 0,81z^{-1}) \\
 &= 0,09 - 0,81z^{-1} \\
 Y_{zi}(z) &= \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0,09 - 0,81z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-2}} \\
 &= \frac{0,026 + j0,4936}{1 - 0,9ze^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{0,026 - j0,4936}{1 - 0,9ze^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

y por tanto:

$$y_{zi}(n) = 0,988(0,9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^\circ\right) u(n)$$

y $Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$

$$Y(z) = \frac{1,099}{1 - z^{-1}} + \frac{0,568 + j0,445}{1 - 0,9ze^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{0,568 - j0,442}{1 - 0,9ze^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}$$

que equivale a:

$$y(n) = 1,099u(n) + 1,44(0,9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^\circ\right) u(n)$$

3.6

3.11 Respuesta transitoria y en régimen permanente

Si para todos los polos del sistema $\{p_k\}$ se cumple que $|p_k| < 1$, entonces la respuesta natural del sistema:

$$y_{nr}(n) = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n u(n)$$

decae si n tiende a infinito, y se le denomina *respuesta transitoria*. Su tasa de decaimiento dependerá de qué tan cerca estén los polos de la circunferencia unidad. Si los polos $\{q_k\}$ de la respuesta forzada tienen magnitudes $|q_k| < 1$, la respuesta a la entrada también decae. Si la entrada es sinusoidal implica que hay polos en la circunferencia unitaria, y la respuesta forzada también tendrá esos polos y será sinusoidal, y la respuesta se denomina *de estado permanente*.

3.12 Causalidad y Estabilidad

Un sistema es causal si $h(n) = 0$ para $n < 0$, lo que implica que su ROC es el exterior de una circunferencia. El sistema es estable si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

lo que ocurre sólo si $|z| = 1$ está dentro de la ROC, o de otro modo, si los polos se encuentran dentro de la circunferencia unitaria, puesto que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

y evaluando en $|z| = 1$

$$|H(z)|_{|z|=1} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

Un sistema LTI será entonces estable sólo si $|z| = 1$ está en la ROC de $H(z)$. Esta condición también se cumple para sistemas anticausales, es decir, la ROC deberá ser el interior de una circunferencia que contenga $|z| = 1$.

3.13 Cancelación polo-cero

Los efectos de un polo del sistema pueden cancelarse o reducirse con un cero ya sea del mismo sistema o de la entrada. Sin embargo, posibles efectos como la estabilización de un sistema inestable por medio de ceros en la entrada deben evitarse, porque la posición de los polos y ceros no puede alcanzarse con precisión arbitraria en sistemas digitales reales.

3.14 Polos de orden múltiple y estabilidad

Un sistema con polos en la circunferencia unitaria es inestable pues basta encontrar una entrada con un polo en el mismo sitio para producir una salida no acotada.

Ejemplo 3.7 Determine la respuesta al escalón de:

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

Solución:

Con $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ y $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ se obtiene:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \bullet \circ y(n) = (n+1)u(n+1)$$

que contiene un polo doble en $z = 1$, y equivale a una rampa no acotada.

Esto se explica por el hecho de que si $Y(z)$ contiene polos múltiples, entonces $y(n)$ tendrá términos de la forma:

$$A_k n^b (p_k)^n u(n)$$

que son acotados sólo si $|p_k| < 1$.

3.7

3.15 Estabilidad de sistemas de segundo

Los sistemas de segundo orden (con dos polos) se utilizan como bloque básico para la construcción de sistemas de mayor orden, y por ello requieren de un poco de atención.

Considérese entonces el sistema:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Su función de transferencia es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \\ &= \frac{b_0 z^2}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{b_0 z^2}{z^2 - (p_1 + p_2)z + p_1 p_2} \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos ceros en el origen y dos polos en

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}}$$

El sistema es estable BIBO si $|p_{1,2}| < 1$. Puesto que se cumple que $a_1 = -(p_1 + p_2)$ y $a_2 = p_1 p_2$, se debe cumplir que

$$|a_2| = |p_1 p_2| = |p_1| |p_2| < 1$$

y

$$|a_1| < 1 + a_2 \Rightarrow a_2 > |a_1| - 1$$

En el plano a_1, a_2 estas inecuaciones delimitan una región triangular (figura 3.11).

Para obtener estas ecuaciones se sabe que $|p_{1,2}| < 1$. Primero asúmase que los polos son reales, es decir, $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \geq a_2$, que equivale a la parte inferior de la parábola $a_2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$. En esta región, los polos están centrados en $-\frac{a_1}{2}$, con un desplazamiento hacia la izquierda y derecha de $\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$ (figura 3.12).

Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$1 - \frac{|a_1|}{2} > \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$$

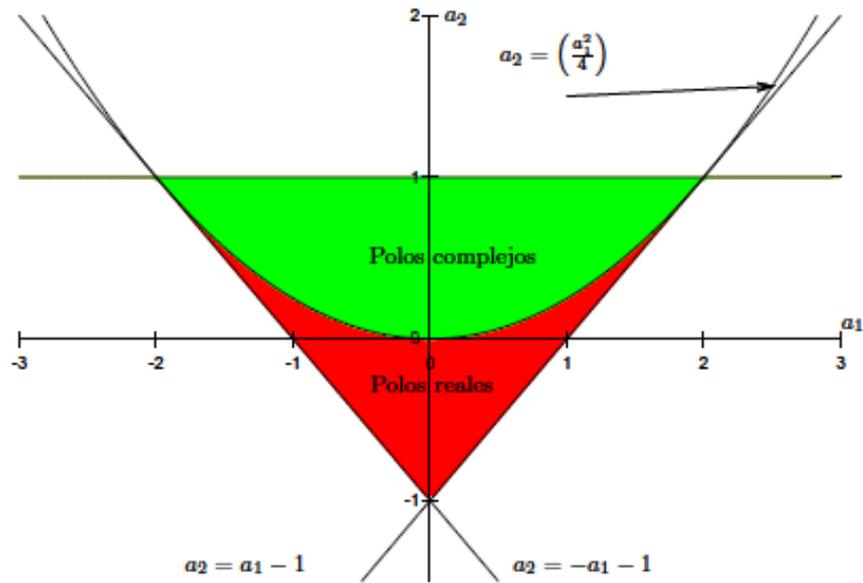


Figura 3.11: Triángulo de estabilidad en el plano de coeficientes (a_1, a_2) para un sistema de segundo orden.

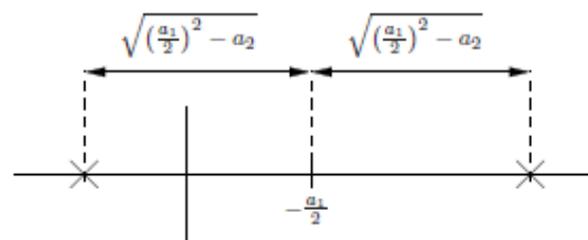


Figura 3.12: Desplazamiento de los polos a la izquierda y a la derecha.

Elevando al cuadrado ambos lados y considerando que $a_1 \in \mathbb{R}$ se obtiene:

$$1 - |a_1| + \left(\frac{|a_1|}{2}\right)^2 > \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 \Rightarrow 1 + a_2 > |a_1|$$

En caso de que $p_{1,2}$ sean complejos (nótese que a_2 es positivo puesto que debe ser mayor que $(a_1/2)^2$), entonces:

$$|p_{1,2}|^2 = \left| -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \right|^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = a_2$$

y por tanto, para que $|p_{1,2}| < 1$, entonces $0 < a_2 < 1$, lo que confirma la anterior condición $|a_2| < 1$.

Los pares (a_1, a_2) en la parte superior a la parábola conducen entonces a polos complejos conjugados, y bajo la parábola a polos reales y distintos. Los pares (a_1, a_2) en la parábola $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = a_2$ conducen a un polo de orden 2.

Las funciones de transferencia y sus equivalentes en el dominio del tiempo se resumen en la tabla 3.2, con $p = re^{j\omega_0}$, por lo que $a_1 = -2r \cos \omega_0$, $a_2 = r^2$.

Tabla 3.2: Funciones de transferencia de segundo orden y equivalentes temporales

Polos	Condición	$H(z)$	$h(n)$
Reales y distintos	$a_1^2 > 4a_2$	$\frac{b_0}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_1}{1 - p_1 z^{-1}} - \frac{p_2}{1 - p_2 z^{-1}} \right)$	$\frac{b_0}{p_1 - p_2} (p_1^{n+1} - p_2^{n+1}) u(n)$
Reales e iguales	$a_1^2 = 4a_2$	$\frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2}$	$b_0(n+1)p^n u(n)$
Complejos conjugados	$a_1^2 < 4a_2$	$\frac{b_0}{j2 \operatorname{sen} \omega_0} \left(\frac{e^{j\omega_0}}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{e^{-j\omega_0}}{1 + re^{-j\omega_0} z^{-1}} \right)$	$\frac{b_0 r^n}{\operatorname{sen} \omega_0} \operatorname{sen}[(n+1)\omega_0] u(n)$

Unidad 4 ANÁLISIS FRECUENCIAL

Funciones ortogonales.

Las series de Fourier son series de términos coseno y seno y surgen en la tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Como aplicación constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. La teoría de las series de Fourier es bastante complicada, pero la aplicación de estas series es simple. Las series de Fourier son, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones periódicas discontinuas pueden desarrollarse en serie de Fourier, pero, desde luego, no tienen representaciones en serie de Taylor.

La introducción de las series de Fourier (y de las integrales de Fourier) fue uno de los mayores avances jamás realizados en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería, ya que las series de Fourier (y las integrales de Fourier) son probablemente la herramienta más importante en la solución de problemas con valores en la frontera.

La transformada de Laplace es con mucho la transformada integral más importante en ingeniería. Desde el punto de vista de las aplicaciones, las siguientes en importancia serían quizás la transformada de Fourier, aun cuando su manejo resulta un tanto más difícil que la transformada de Laplace.

Las funciones periódicas que se presentan en problemas prácticos con frecuencia son bastante complicadas y es deseable representarlas en términos de funciones periódicas simples. Se verá que casi cualquier función periódica $f(x)$ de periodo 2π que aparezca en las aplicaciones (por ejemplo, con relación a vibraciones) puede representarse por una serie trigonométrica la cual se denominará serie de Fourier de $f(x)$.

Las series de Fourier surgen de la tarea práctica de representar una función periódica $f(x)$ dada en términos de funciones coseno y seno. Estas series son trigonométricas cuyos coeficientes se determinan a partir de $f(x)$ mediante ciertas fórmulas (fórmulas de Euler), las cuales se establecerán primero. Después se considerará la teoría de las series de Fourier.

Serie compleja de Fourier

Encontrar la serie compleja de Fourier de:

Y a partir de ella obtener la serie (común de Fourier).

4.1.- Espectro de señales continuas

Las señales continuas periódicas se analizan por medio de la serie de Fourier. Para la síntesis de la señal se utiliza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\Omega_0 kt}$$

y para el análisis:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j\Omega_0 kt} dt$$

Si la señal periódica tiene potencia media finita P_x entonces

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt$$

91

y puesto que $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ se cumple que

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j\Omega_0 kt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left[\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j\Omega_0 kt} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned}$$

que se conoce como la relación de Parseval, e implica que la potencia media de la señal equivale a la suma de las potencias medias de cada uno de sus componentes frecuenciales, también llamados *armónicos*. A la gráfica de $|c_k|^2$ para cada frecuencia kF_0 (con la frecuencia fundamental $F_0 = \Omega_0/2\pi$) se le denomina densidad espectral de potencia, espectro de la densidad de potencia o simplemente espectro de potencia. Si $x(t)$ es real, puesto que $|c_{-k}| = |c_k^*| = |c_k|$ entonces la densidad espectral de potencia es una función de simetría par.

Al par de gráficas de $|c_k|$ vs. kF_0 y $\theta_k = \angle c_k$ vs. kF_0 se le denomina espectro de tensión. Puesto que para funciones reales $\theta_{-k} = \angle c_k^* = -\angle c_k = -\theta_k$, la fase es impar.

Ejemplo 4.1 La serie de Fourier de un tren periódico de pulsos rectangulares de ancho τ en tiempo continuo (figura 4.1a) tiene como coeficientes

$$c_k = \frac{A\tau \operatorname{sen}(\pi k F_0 \tau)}{T_p \pi k F_0 \tau}$$

Analice el efecto del periodo T_p y el ancho del pulso τ en el espectro de la señal.

Solución: La distancia entre dos líneas espectrales correspondientes a c_k y c_{k+1} es $F_0 = 1/T_p$ y el término τ , además de determinar el ancho del pulso temporal, indica qué tan extensa resulta la función $\operatorname{sen}(x)/x$. Las figuras 4.1(b) y (c) permiten comparar que si se modifica el ancho del pulso temporal manteniendo el periodo, la distancia entre cada línea espectral se mantiene, mientras que el espectro se contrae (si τ aumenta). Por otro lado, si T_p aumenta (o lo que es equivalente, la frecuencia fundamental F_0 baja), pero se mantiene el ancho del pulso τ , la misma función en la frecuencia $\operatorname{sen}(\pi k F_0 \tau)/(\pi k F_0 \tau)$ es muestreada más a menudo (la densidad de líneas espectrales aumenta).

4.2.- Series exponencial de fourier.

Supongamos que $f(x)$ es una función periódica de periodo 2π que puede representarse por una serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (2.7)$$

Es decir, se supone que esta serie converge y que tiene a $f(x)$ como su suma. Dada una función $f(x)$ como esta, quieren determinarse los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica correspondiente. Determinemos a_0 . Al integrar ambos miembros de (2.7) se obtiene

Si es posible realizar la integración término a término de la serie, se obtiene

Claramente el primer término del segundo miembro

Además sabemos de (2.2) que las integrales del segundo miembro son cero. Consecuentemente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right] dt.$$

Si es posible realizar la integración término a término de la serie, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt \right). \end{aligned}$$

Claramente el primer término del segundo miembro

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi a_0.$$

Además sabemos de (2.2) que las integrales del segundo miembro son cero. Consecuentemente,

es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

Determinemos ahora a_1, a_2, \dots y b_1, b_2, \dots

Multipliquemos (2.7) por $\cos(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$, e integremos de $-\pi$ a π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) \cos(mt) dt$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt \right).$$

Sabemos de (2.2) que la primera integral es cero. Además de (2.4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = a_m \pi$$

y de (2.3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt = 0.$$

Consecuentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = a_m \pi$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

Para determinar b_1, b_2, \dots se razona de manera análoga a lo anterior pero ahora multiplicando (2.7) por $\sin(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$

Al escribir n en lugar de m , se obtienen las llamadas **fórmulas de Euler**

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ para todo } n \geq 0. \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \text{ para todo } n > 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Los números dados por (2.8) se denominan **coeficientes de Fourier** de $f(t)$. La serie trigonométrica

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))
 \tag{2.9}$$

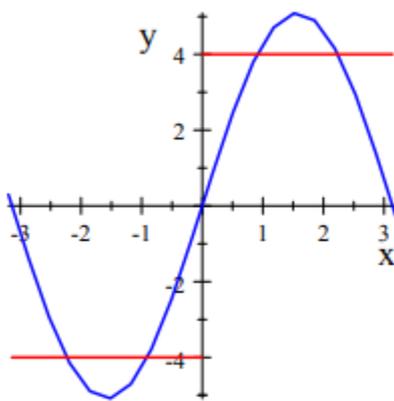
con coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dados por (2.8) se denomina **serie de Fourier de $f(t)$** (sin atender la convergencia, ésta la discutiremo más adelante)

Onda cuadrada Determinar los coeficientes de Fourier de la función.

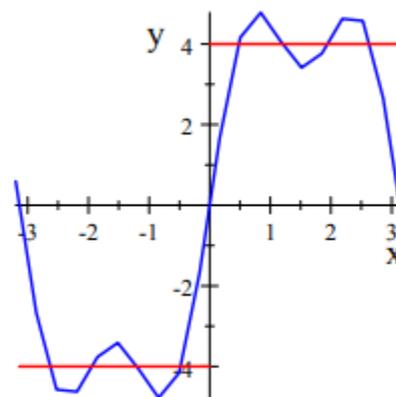
$$f(t) = \begin{cases} -k & \text{si } -\pi \leq t < 0, \\ k & \text{si } 0 \leq t < \pi. \end{cases} \quad \text{y} \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^4$ de la Serie

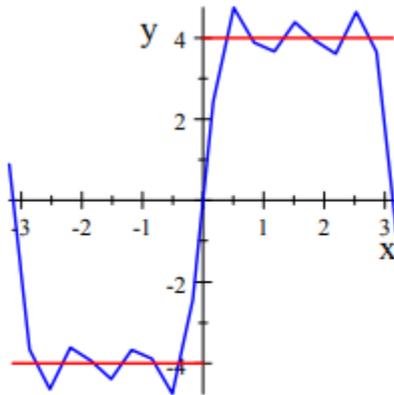
de Fourier de esta serie son



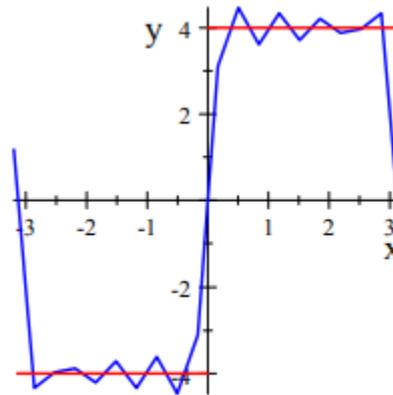
$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x$$



$$S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$



$$S_3 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^2 \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$



$$S_4 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^3 \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

4.3.- Espectro complejo de Fourier.

Supongamos que la función $f(x)$ ($f(t)$) satisface las condiciones suficientes de desarrollabilidad en serie de Fourier. Entonces es posible representarla en $[-\pi, \pi]$ mediante la serie del tipo

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (2.17)$$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (2.17)$$

y si denotamos

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \quad \text{y} \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$$

entonces

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 f(t) &\sim c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-int} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-+\infty}^{-1} c_n e^{int} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-+\infty}^{-1} c_n e^{int} \\
 &= \sum_{n=-+\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.
 \end{aligned}$$

Esta es la llamada forma compleja de la serie de Fourier o serie compleja de Fourier. Determinemos ahora la expresión de los coeficientes c_n y c_{-n} . Sabemos que:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{y} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(nt) + i \sin(nt)) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt
 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente también podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

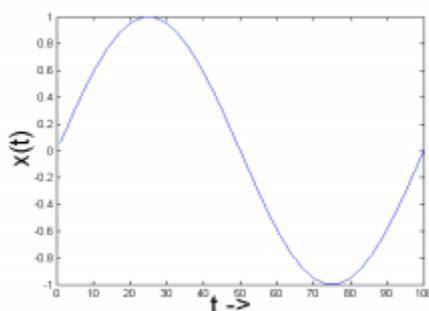
Para todo $n \in \mathbb{Z}$. Estos coeficientes reciben el nombre de coeficientes complejos de Fourier de f (c_n).

Para una función de periodo 2π , el razonamiento anterior da como resultado la serie compleja de Fourier

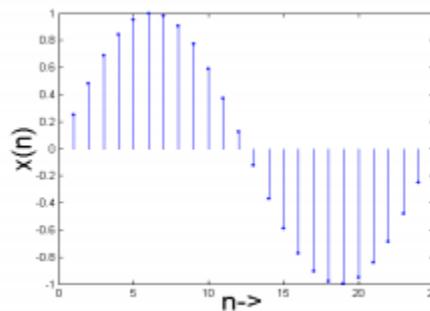
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\left(\frac{n\pi t}{L}\right)} dt.$$

4.4.- Transformada de algunas señales de energías sencillas y de potencia.

Es importante tener en cuenta la diferencia que existe entre una señal analógica y una digital para comprender mejor el procesamiento de señales, el nombre de una señal analógica se debe a que es análoga a la señal que la representa. La magnitud de una señal analógica puede tomar cualquier valor, esto es, la amplitud de una señal analógica muestra una variación continua sobre su campo de actividad. Una forma alternativa de representación de señal es la de una secuencia de números, cada uno de los cuales representa la magnitud de señal en un instante determinado. La señal resultante se llama señal digital, está a diferencia de la señal analógica es una señal que está discretizada en el tiempo y cuantificada en magnitud.



Señal continua



Señal discreta

PROCESAMIENTO DE SEÑALES

El procesamiento digital de señales o DSP (sigla en inglés de digital signal processing) es la manipulación matemática de una señal de información para modificarla o mejorarla en algún sentido. Este está caracterizado por la representación en el dominio del tiempo discreto, en el dominio

frecuencia discreta, u otro dominio discreto de señales por medio de una secuencia de números o símbolos y el procesado de esas señales.

La Series Fourier y la Transformada de Fourier resultan útiles para estos fines ya que permiten ver la distribución de frecuencias de la señal, esto discretiza la señal permitiendo que se almacenen digitalmente los valores de frecuencias para cada tiempo determinado, luego mediante un DAC (siglas de “Digital-to-Analog Converter”, conversor digital a analógico en inglés) se leen estos datos y se logra reproducir la señal original.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE TRABAJAR CON UNA SEÑAL DIGITAL

Ventajas:

- La señal discreta (digital) es más fácil de transmitir, almacenar o manipular.
- La señal digital es menos sensible que la analógica a las interferencias
- La señal digital puede ser enviada a casi cualquier punto del planeta en cualquier momento a un muy bajo costo a través de internet y a partir de aquí puede ser reenviada a su remitente o a algún otro destino. Esto sin que la señal sufra variaciones o alteraciones de calidad severas.

Desventajas:

- Se necesita una conversión analógica-digital previa y una decodificación posterior, en el momento de la recepción.
- Hay una pérdida inherente de información al convertir la información continua en discreta. Por mínimo e insignificante que resulte siempre hay un error de cuantificación que impide que la señal digital sea exactamente equivalente a la analógica que la originó.

SERIE DE FOURIER Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras)

Las series de Fourier tienen la forma:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t \right]$$

Donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2n\pi}{T}t \right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left(\frac{2n\pi}{T}t \right) dt.$$

Por la identidad de Euler, las fórmulas anteriores pueden expresarse también en su forma compleja:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

Y para el caso de funciones no periódicas que cumplan ser continuas a tramos en todo intervalo finito, tengan derivada a derecha e izquierda en todo punto y que sean absolutamente integrables se pueden representar mediante la Integral de Fourier (IF), se muestra en este caso la forma compleja ya que es más reducida:

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} dt$$

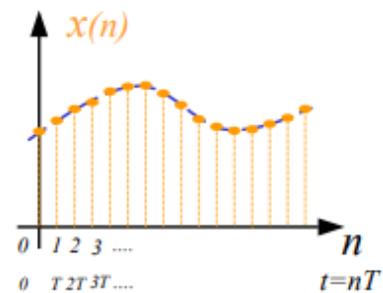
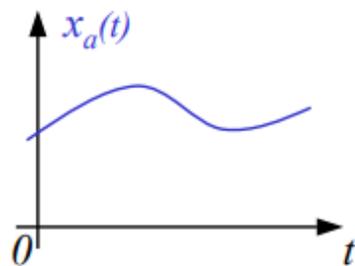
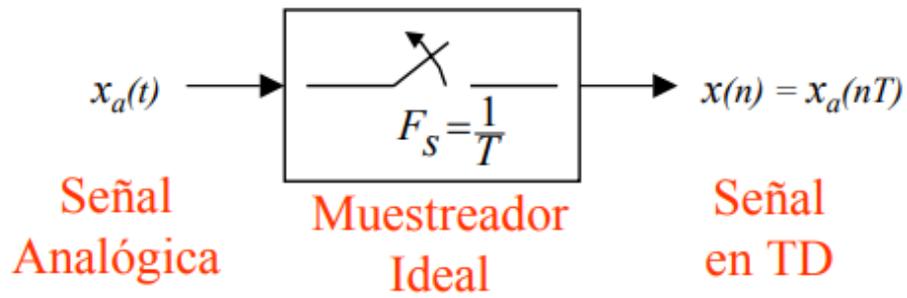
Donde

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Es la transformada de Fourier de (t) , aplicación que para cada punto del espacio de t le hace corresponder un punto en el espacio de frecuencias de ω . Aplicar estas operaciones a una señal permite ver como distribuyen las diferentes frecuencias que la componen. Esto permitiría manipular la señal de entrada de manera más sencilla, pues su distribución frecuencia es una función discreta y no continua.

4.5.- Muestreo de señales de tiempo.

- Señales en Tiempo Continuo: están definidas en un intervalo continuo de tiempo.
- Señales en tiempo discreto: Señales en tiempo discreto: están definidas sólo en valores discretos de tiempo. Los instantes de tiempo no necesariamente están equiespaciados.
- Las señales en Tiempo Discreto (TD) aparecen cuando se muestrea una señal analógica, es decir, cuando se toman muestras de la señal a instantes discretos de tiempo.



F_s : frecuencia de muestreo [Hz]

$T = \frac{1}{F_s}$: período de muestreo [seg]

TeSyS

J. C. Gómez

⋮

Consideraremos muestreo periódico o uniforme \mathcal{A} intervalos entre muestras sucesivas constante.

- Las variables “t” y “n” están relacionadas de acuerdo a:

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

- Como consecuencia, la frecuencia F (o Ω) de una señal periódica en TC, estará relacionada con la frecuencia f (o ω) de la correspondiente señal muestreada.

Consideremos

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta)$$

↓ Muestreo $F_s = \frac{1}{T}$

$$x(n) \triangleq x_a(nT) = A \cos(\underbrace{2\pi FnT}_{=\Omega} + \theta)$$

$$= A \cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right)$$

$$= A \cos(\underbrace{2\pi fn}_{=\omega} + \theta)$$

por lo que:

$$\boxed{f = \frac{F}{F_s}}$$

frecuencia

normalizada o relativa

$$\boxed{\omega = \frac{\Omega}{F_s} = \Omega T}$$

TeSyS

J. C. Gómez

- En contraste con las señales senoidales en TC, las señales senoidales en TD verifican:
 - Una señal senoidal en TD es periódica si y sólo si su frecuencia f es un número racional.

Por definición $x(n)$ es periódica si y sólo si $\exists N (N > 0)$ tal que:

$$x(n + N) = x(n) \quad \forall n$$

El menor valor de N que verifica esta propiedad se denomina período fundamental.

Para el caso de una onda senoidal, tendríamos:

$$\cos(2\pi f(N+n) + \theta) = \cos(2\pi f n + \theta) \quad \forall n$$

Que se verifica si y sólo si: $2\pi f N = 2\pi k$ con k entero $\Leftrightarrow N k f c f$ es racional

Para determinar el período fundamental N de una senoide discreta, expresamos f como el cociente de dos números enteros primos relativos. Entonces el período N es el denominador de esta expresión.

$f_1 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$	próxima a	$f_2 = \frac{29}{60}$
↓		↓
$N_1 = 2$	muy distinta	$N_2 = 60$

2. Señales sinusoidales en TD cuyas frecuencias están separadas un múltiplo entero de 2π son idénticas.

$$\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta] = \cos[\omega n + 2\pi n + \theta] = \cos[\omega n + \theta]$$

Como consecuencia todas las secuencias de sinusoides

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta)$$

donde: $\omega_k = \omega + 2\pi k$ $-\pi \leq \omega \leq \pi$
son indistinguibles (idénticas).

TeSyS

J. C. Gómez

En particular, una senoide con frecuencia en el rango $|\omega| > \pi$ será equivalente a una senoide en el rango $|\omega| \leq \pi$ ($|f| \leq 0.5$) y se la denomina un alias de la senoide en el rango $|\omega| \leq \pi$. El rango fundamental de frecuencias de señales en TD es entonces:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \omega \leq \pi \\ -0.5 &\leq f \leq 0.5 \end{aligned}$$

Mientras que para señales en TC es:

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \Omega \leq \infty \\ -\infty &\leq F \leq \infty \end{aligned}$$

Rango de frecuencia de señales en TC

3. La máxima frecuencia de oscilación de una senoide en TD es $\omega = \pi$ (o $f = 0.5$) Considerando que:

$$f = \frac{F}{F_s}$$

Y que $f_{\max} = 0.5$, resulta que la máxima frecuencia F_{\max} de la señal en TC que puede muestrearse con una frecuencia F_s sin que se produzca aliasing es:

$$f_{\max} = \frac{1}{2} = \frac{F_{\max}}{F_s} \Rightarrow F_{\max} = \frac{F_s}{2}$$

En otras palabras, para evitar que se produzca aliasing y de esa forma poder reconstruir una señal a partir de las muestras debemos seleccionar: $F_s > 2 F_{\max}$ donde F_{\max} es la máxima frecuencia contenida en la señal analógica.

Teorema de Muestreo:

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal es muestreada con una frecuencia $F_S > 2 F_{max} = 2B$, entonces $x_a(t)$ puede ser exactamente recuperada a partir de las muestras como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_S}\right) g\left(t - \frac{n}{F_S}\right)$$

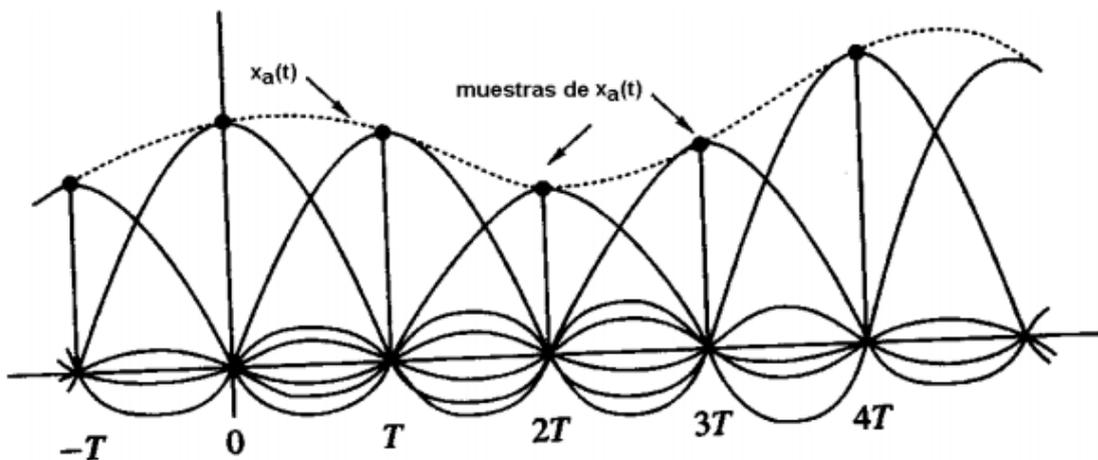
donde

$$x_a\left(\frac{n}{F_S}\right) \triangleq x_a(nT) = x(n)$$

Son las muestras de $x_a(t)$ y $g(t)$ es la función de interpolación definida como:

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

J. C. Gómez



Interpolación Ideal – Teorema de Muestreo

A $F_N \triangleq 2B$ se la denomina **Tasa de Muestreo de Nyquist**

Ejemplo:

Determinar la tasa de muestreo de Nyquist

$$x_a(t) = 3 \cos(50\pi t) + 10 \sin(300\pi t) - \cos(100\pi t)$$

$$\text{Solución: } F_1 = 25 \text{ Hz } F_2 = 150 \text{ Hz } F_3 = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{Veamos que } F_{\max} = 150\text{Hz} \Rightarrow F_N = 300 \text{ Hz}$$

Sin embargo, si muestreamos con $F_s = F_N$, las muestras de la componente

$$10 \sin(300 \pi t) \text{ resultan } 10 \sin(\pi n)$$

Que son idénticamente nulas y obviamente no puede recuperarse la señal a partir de las muestras!!

Ejemplo:

Supongamos que se desea generar y graficar las señales en tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ definidas como:

$$x_1(t) = \cos(2\pi 50t)$$

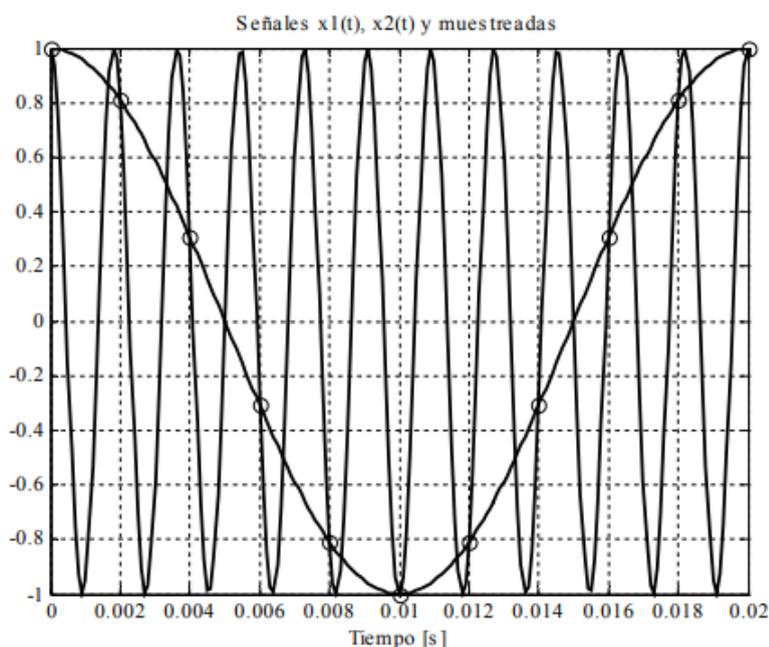
$$x_2(t) = \cos(2\pi 550t)$$

Y las correspondientes señales en tiempo discreto que se obtienen muestreándolas con una frecuencia $F_s=500$ Hz. Notar que las dos señales tienen asociada la misma señal muestreada

$$x_1(n) = \cos\left(\frac{2\pi 50n}{500}\right)$$

$$x_2(n) = \cos\left(\frac{2\pi 550n}{500}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{2\pi 50n}{500}\right) = x_1(n)$$

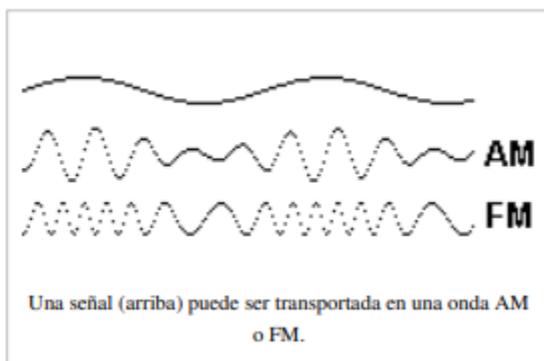
$x_2(n)$ es un **alias** de $x_1(n)$.



4.6.- Modulación.

Amplitud modulada (AM) o modulación de amplitud es un tipo de modulación lineal que consiste en hacer variar la amplitud de la onda portadora de forma que esta cambie de acuerdo con las variaciones de nivel de la señal moduladora, que es la información que se va a transmitir.

AM es el acrónimo de Amplitude Modulation (Amplitud modulada), la cual consiste en modificar la amplitud de una señal de alta frecuencia, denominada portadora, en función de una señal de baja frecuencia, denominada moduladora, la cual es al señal que contiene la información que se desea transmitir. Entre los tipos de modulación AM se encuentra la modulación de doble banda lateral con portadora (DSBFC).

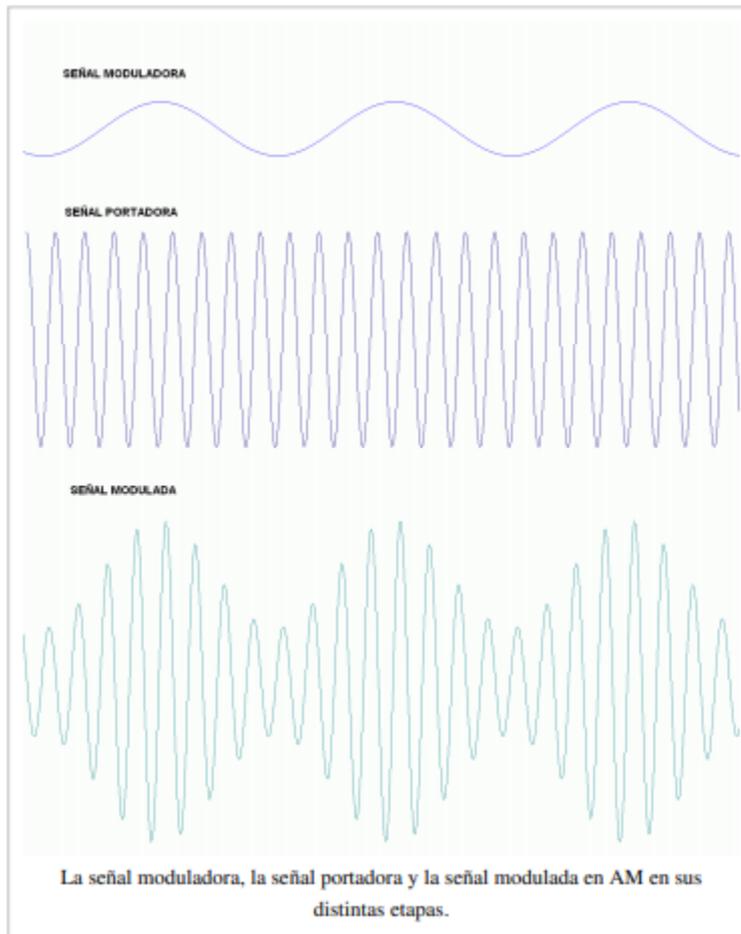


Aplicaciones tecnológicas de la AM Una gran ventaja de AM es que su demodulación es muy simple y, por consiguiente, los receptores son sencillos y baratos; un ejemplo de esto es la radio a galena. Otras formas de AM como la modulación por Banda lateral única o la Doble Banda Lateral son más eficientes en ancho de banda o potencia pero en contrapartida los receptores y transmisores son más caros y difíciles de construir, ya que además deberán reinsertar la portadora para conformar la AM nuevamente y poder desmodular la señal transmitida.

La AM es usada en la radiofonía, en las ondas medias, ondas cortas, e incluso en la VHF: es utilizada en las comunicaciones radiales entre los aviones y las torres de control de los aeropuertos. La llamada "Onda Media" (capaz de ser captada por la mayoría de los receptores de uso doméstico) abarca un rango de frecuencia que va desde 550 a 1600 kHz

Representación matemática de la modulación en AM

Al considerar la señal moduladora (señal del mensaje) como:



$$y_s(t) = A_s \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$$

y Señal portadora como:

$$y_p(t) = A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t)$$

La ecuación de la señal modulada en AM es la siguiente:

$$y(t) = A_p \cdot [1 + m \cdot x_n(t)] \cdot \cos(\omega_p \cdot t)$$

- $y(t)$ = Señal modulada
- $x_n(t)$ = Señal moduladora normalizada con respecto a su amplitud = $y_s(t)/A_s$
- m = Índice de modulación (suele ser menor que la unidad) = A_s/A_p

Básicamente, se trata de multiplicar el mensaje a transmitir $x(t)$ por la portadora cosenoidal y, a su vez, sumarle esa portadora cosenoidal. El espectro en frecuencias de la señal quedará trasladado a radianes por segundo, tanto en la parte positiva del mismo como en la negativa, y su amplitud será, en ambos casos, el producto de la señal moduladora por la amplitud de la portadora, sumado a la amplitud de la portadora, y dividido por dos. El resultado se aprecia en los enlaces a las siguientes imágenes:

$$\cos^2(\phi) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\phi)}{2}$$

para multiplicar la función $y(t)$ por la portadora:

$$y_D(t) = y(t)\cos(w_p) = \frac{1 + mx_n(t)}{2} + \frac{\cos(2w_p)}{2}$$

A partir de esto, con un filtro paso-bajo y un supresor de continua, se obtiene la señal $x(t)$.

Potencia de la señal modulada

La amplitud máxima de cada banda lateral está dada por la expresión:

$$m = \frac{V_m}{V_p}$$

Y cómo la potencia es proporcional al cuadrado de la tensión, la potencia de la señal modulada resultará la suma de la potencia de la señal portadora más la potencia de ambas bandas laterales:

$$P \equiv V_p^2 + \left(\frac{mV_p}{2}\right)^2 + \left(\frac{mV_p}{2}\right)^2$$

$$P \equiv V_p^2 + \frac{m^2V_p^2}{4} + \frac{m^2V_p^2}{4}$$

Para que la igualdad sea posible debemos tener en cuenta las potencias en lugar de las tensiones:

$$P = P_p + \frac{m^2}{4}P_p + \frac{m^2}{4}P_p$$

$$P = P_p + \frac{m^2}{2}P_p$$

$$P = \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)P_p$$

En el caso de que la modulación sea al cien por ciento, entonces $m = 1$ y por lo tanto la potencia de la señal modulada será:

$$P = \left(1 + \frac{1}{2}\right)P_p$$

$$P = \frac{3}{2}P_p$$

O lo que es lo mismo:

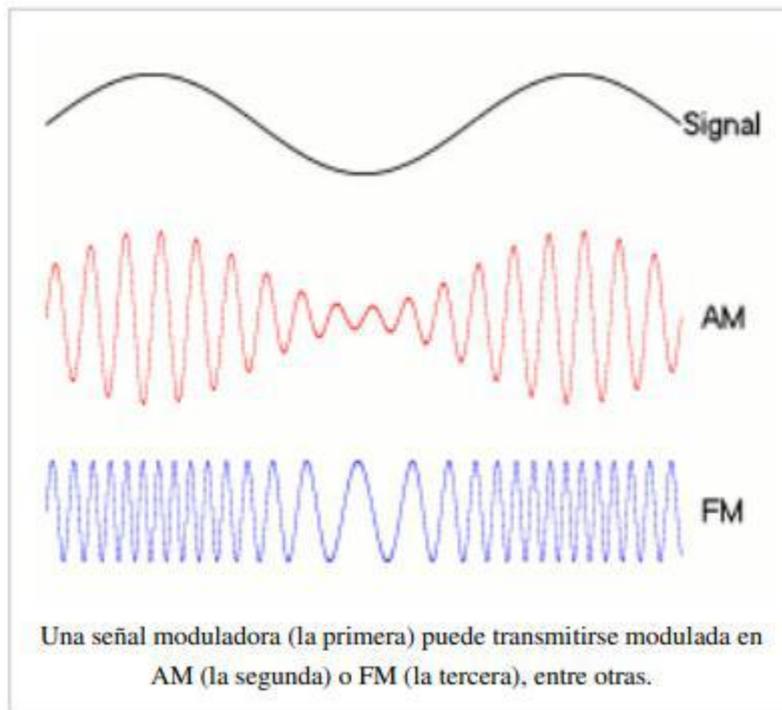
$$P_p = \frac{2}{3}P$$

De lo último se desprende que la onda portadora consumirá dos tercios de la potencia total, dejando un tercio para ambas bandas laterales.

Frecuencia modulada

En telecomunicaciones, la frecuencia modulada (FM) o modulación de frecuencia es una modulación angular que transmite información a través de una onda portadora variando su frecuencia (contrastando esta con la amplitud modulada o modulación de amplitud (AM), en donde la amplitud de la onda es variada mientras que su frecuencia se mantiene constante). En aplicaciones analógicas,

la frecuencia instantánea de la señal modulada es proporcional al valor instantáneo de la señal moduladora. Datos digitales pueden ser enviados por el desplazamiento de la onda de frecuencia entre un conjunto de valores discretos, una modulación conocida como FSK.



La frecuencia modulada es usada comúnmente en las radiofrecuencias de muy alta frecuencia por la alta fidelidad de la radiodifusión de la música y el habla (véase Radio FM).

El sonido de la televisión analógica también es difundido por medio de FM. Un formulario de banda estrecha se utiliza para comunicaciones de voz en la radio comercial y en las configuraciones de aficionados. El tipo usado en la radiodifusión FM es generalmente llamado amplia-FM o W-FM (de las siglas en inglés “Wide-FM”).

En la radio de dos vías, la banda estrecha o N-FM (de las siglas en inglés “Narrow-FM”) es utilizada para ahorrar banda estrecha. Además, se utiliza para enviar señales al espacio. La frecuencia modulada también se utiliza en las frecuencias intermedias de la mayoría de los sistemas de vídeo analógico, incluyendo VHS, para registrar la luminancia (blanco y negro) de la señal de vídeo.

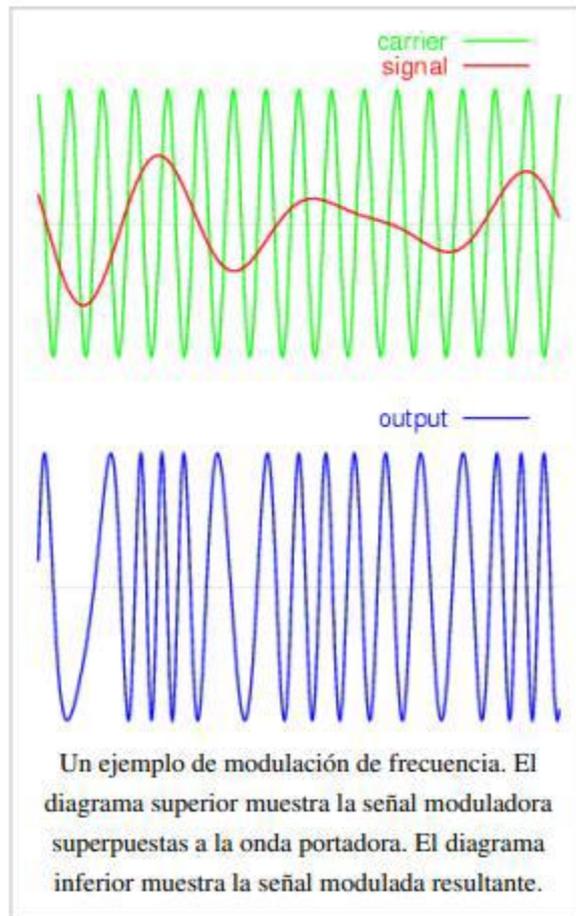
La frecuencia modulada es el único método factible para la grabación de vídeo y para recuperar de la cinta magnética sin la distorsión extrema, como las señales de vídeo con una gran variedad

UNIVERSIDAD DEL SURESTE 119

de componentes de frecuencia - de unos pocos hercios a varios megahercios, siendo también demasiado amplia para trabajar con equalisers con la deuda al ruido electrónico debajo de -60 dB. La FM también mantiene la cinta en el nivel de saturación, y, por tanto, actúa como una forma de reducción de ruido del audio, y un simple corrector puede enmascarar variaciones en la salida de la reproducción, y que la captura del efecto de FM elimina a través de impresión y pre-eco. Un piloto de tono continuo, si se añade a la señal - que se hizo en V2000 o video 2000 y muchos formatos de alta banda - puede mantener el temblor mecánico bajo control y ayudar al tiempo de corrección. Dentro de los avances más importantes que se presentan en las comunicaciones, el mejoramiento de un sistema de transmisión y recepción en características como la relación señal – ruido, sin duda es uno de los más importantes, pues permite una mayor seguridad en las mismas. Es así como el paso de Modulación en Amplitud (A.M.), a la Modulación en Frecuencia (F.M.), establece un importante avance no solo en el mejoramiento que presenta la relación señal ruido, sino también en la mayor resistencia al efecto del desvanecimiento y a la interferencia, tan comunes en A.M. La frecuencia modulada también se utiliza en las frecuencias de audio para sintetizar sonido. Esta técnica, conocida como síntesis FM, fue popularizada a principios de los sintetizadores digitales y se convirtió en una característica estándar para varias generaciones de tarjetas de sonido de computadoras personales.

Aplicaciones en radio

Dentro de las aplicaciones de F.M. se encuentra la radio, en donde los receptores emplean un detector de FM y exhiben un fenómeno llamado efecto de captura, en donde el sintonizador es capaz de recibir la señal más fuerte de las que transmiten en la misma frecuencia. Sin embargo, la falta de selectividad por las desviaciones de frecuencia causa que una señal sea repentinamente tomada por otra de un canal adyacente. Otra de las características que presenta F.M., es la poder transmitir señales estereofónicas, y entre otras de sus aplicaciones se encuentran la televisión, como sub-portadora de sonido; en micrófonos inalámbricos; y como ayuda en navegación aérea.



Edwin Armstrong presentó su estudio: "Un Método de reducción de Molestias en la Radio Mediante un Sistema de Modulación de Frecuencia", que describió por primera vez a la FM, antes de que la sección neoyorquina del Instituto de Ingenieros de Radio el 6 de noviembre de 1935. El estudio fue publicado en 1936.[1]

La FM de onda larga (W-FM) requiere un mayor ancho de banda que la modulación de amplitud para una señal moduladora equivalente, pero a su vez hace a la señal más resistente al ruido y la interferencia. La modulación de frecuencia es también más resistente al fenómeno del desvanecimiento, muy común en la AM. Por estas razones, la FM fue escogida como el estándar para la transmisión de radio de alta fidelidad, resultando en el término "Radio FM" (aunque por

UNIVERSIDAD DEL SURESTE 121

muchos años la BBC la llamó "Radio VHF", ya que la radiodifusión en FM usa una parte importante de la banda VHF).

Los receptores de radio FM emplean un detector para señales FM y exhiben un fenómeno llamado efecto de captura, donde el sintonizador es capaz de recibir la señal más fuerte de las que transmitan en la misma frecuencia. Sin embargo, la desviación de frecuencia o falta de selectividad puede causar que una estación o señal sea repentinamente tomada por otra en un canal adyacente. La desviación de frecuencia generalmente constituyó un problema en receptores viejos o baratos, mientras que la selectividad inadecuada puede afectar a cualquier aparato.

Una señal FM también puede ser usada para transportar una señal estereofónica (vea FM estéreo) No obstante, esto se hace mediante el uso de multiplexación y demultiplexación antes y después del proceso de la FM. Se compone una señal moduladora (en banda base) con la suma de los dos canales (izquierdo y derecho), y se añade un tono piloto a 19 kHz. Se modula a continuación una señal diferencia de ambos canales a 38 kHz en doble banda lateral, y se le añade a la moduladora anterior. De este modo se consigue compatibilidad con receptores antiguos que no sean estereofónicos, y además la implementación del demodulador es muy sencilla.

Una amplificación de conmutación de frecuencias radiales de alta eficiencia puede ser usada para transmitir señales FM (y otras señales de amplitud constante). Para una fuerza de señal dada (medida en la antena del receptor), los amplificadores de conmutación utilizan menos potencia y cuestan menos que un amplificador lineal. Esto le da a la FM otra ventaja sobre otros esquemas de modulación que requieren amplificadores lineales, como la AM y la QAM.

4.7.- Transmisión de señales a través de filtros lineales.

En ocasiones, las señales de interés están mezcladas con otras señales y no es posible distinguirlas o separarlas por medio de análisis basados en técnicas temporales. La separación de señales atendiendo a su distribución frecuencial es una técnica muy común en procesado de señal. La técnica consiste en cancelar o atenuar unas zonas frecuenciales determinadas donde la señal deseada no existe y dejar pasar aquellas frecuencias en que la señal deseada tiene su contenido frecuencial. Esta técnica es utilizada en aplicaciones tan diversas como:

Mejora de calidad de señales ruidosas: El análisis frecuencial de señales contaminadas con ruido permite disminuir el ruido que esté fuera de la banda de interés.

Multiplexado en frecuencia: En sistemas de comunicación (radio, TV) es habitual transmitir distintos canales por el mismo medio de comunicación y cada canal ocupa una banda de frecuencias distinta a las demás. Los desmultiplexadores seleccionan el canal deseado por medio de un filtro sintonizado a la frecuencia de la banda de interés, separándolo del resto de canales. Posteriormente se procede a demodulación.

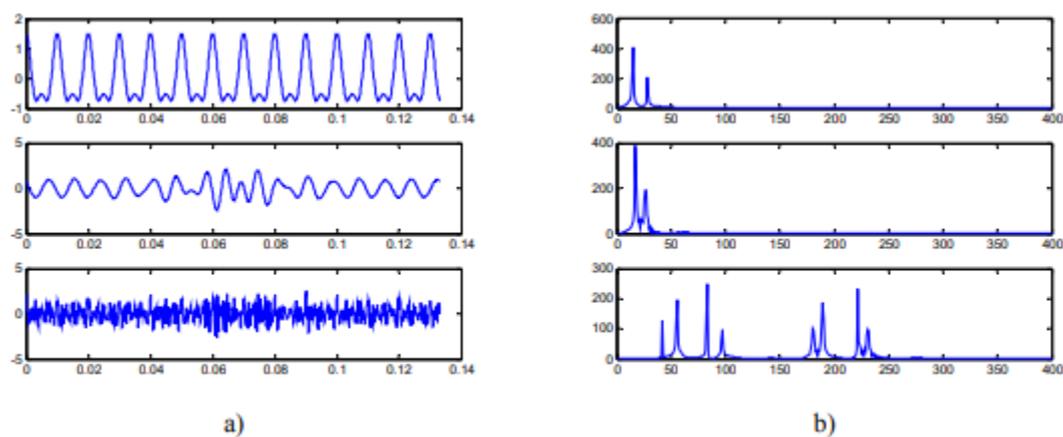


Figura 3-1 Ejemplos de señales en el dominio a) temporal y b) frecuencial. La fila superior y media son dos señales de igual ancho de banda. La fila inferior muestra las señales después de pasar por un multiplexador frecuencial

Figura 3-1 muestra distintas formas de onda (izquierda) y sus transformadas de Fourier (derecha) de un proceso de multiplexación. Las filas superiores y media contienen las señales a multiplexar, ambas de banda limitada a 50Hz. Cada señal se traslada a la frecuencia de su portadora, que en este caso es de 70 Hz para la primera señal y de 210 Hz para la segunda señal. La fila inferior muestra la forma de onda de la señal resultante y su transformada de Fourier. La primera etapa del desmultiplexador consiste en seleccionar y separar una de las dos señales mediante un filtro centrado a la frecuencia de su portadora. Posteriormente se procederá a su demodulación, es decir a recuperar la señal original.

La teoría clásica de diseño de filtros en el dominio de la frecuencia tiene como objetivo diseñar filtros cuya transformada de Laplace pueda expresarse por medio de una función racional polinómica de forma que se asegure la realizabilidad de los mismos: filtros reales, causales y estables. Tradicionalmente, hay cuatro tipos de filtros que se utilizan en el diseño: Butterworth, Chebychev, Inverso de Chebychev y Elíptico. Cumplen las propiedades de realizabilidad y son técnicamente implementables con cierta facilidad. UNIVERSIDAD DEL SURESTE 123

4.8 Sistemas LTI en el dominio de la frecuencia

La función de respuesta en frecuencia

En el capítulo 2 se demostró que la respuesta de cualquier sistema LTI en reposo a una señal de entrada $x(n)$, está determinada por la convolución con la respuesta impulsional $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Para analizar este sistema en el dominio de la frecuencia se analiza su respuesta a una señal exponencial compleja $x(n) = Ae^{j\omega n}$. Se obtiene como salida:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{j\omega(n-k)} = Ae^{j\omega n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \right] = AH(\omega)e^{j\omega n}$$

Nótese que $H(\omega)$ existe si el sistema es estable, puesto que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

La respuesta del sistema LTI a una entrada exponencial compleja es entonces otra señal exponencial compleja de la misma frecuencia, pero con una nueva amplitud y fase determinadas por $H(\omega)$. Puesto que $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$ entonces es claro que la magnitud cambia de acuerdo a $|H(\omega)|$ y la fase de acuerdo a $\angle H(\omega)$.

Puesto que $h(n)$ es discreta, entonces $H(\omega) \bullet \circ h(n)$ es periódica y se cumple entonces:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n} d\omega$$

Además, por las propiedades de simetría, si $h(n)$ es real, entonces $H(\omega)$ tiene simetría hermítica, es decir $H(-\omega) = H^*(\omega)$, lo que implica que $|H(\omega)| = |H(-\omega)|$ (simetría par), $\angle H(\omega) = -\angle H(-\omega)$ (impar), $\text{Re}\{H(\omega)\} = \text{Re}\{H(-\omega)\}$ (par), $\text{Im}\{H(\omega)\} = -\text{Im}\{H(-\omega)\}$ (simetría impar).

A $H(\omega)$ se le denomina *respuesta en frecuencia* del sistema. Esta función determina la amplitud y fase para cada señal exponencial compleja de entrada. Además, puesto que $\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$, entonces la respuesta del sistema LTI con respuesta impulsional $h(n)$ ante la entrada $x(n) = A \cos(\omega n)$, será:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} (H(\omega)e^{j\omega n} + H(-\omega)e^{-j\omega n}) \\ &= \frac{A}{2} (|H(\omega)|e^{j(\omega n + \angle H(\omega))} + |H(-\omega)|e^{-j(\omega n - \angle H(-\omega))}) \\ &= \frac{A}{2}|H(\omega)| (e^{j(\omega n + \angle H(\omega))} + e^{-j(\omega n + \angle H(\omega))}) \\ &= A|H(\omega)| \cos(\omega n + \angle H(\omega)) \end{aligned}$$

Es decir, $|H(\omega)|$ determina la atenuación o amplificación de la componente frecuencial de la entrada con frecuencia angular ω , y por ende se le denomina *respuesta en magnitud*, mientras que $\angle H(\omega)$ determina la fase a la salida de la misma componente (*respuesta en fase*).

Ejemplo 4.4 Para el sistema descrito por la ecuación:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \quad 0 < a < 1 \quad \wedge \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Determine $H(\omega)$
 2. Elija b de tal modo que $|H(\omega)|$ sea a lo sumo 1 y grafique $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$ para $a = 0,9$
 3. Determine la salida para $x(n) = 5 + 12 \sin(\frac{\pi}{2}n) - 20 \cos(\pi n + \frac{\pi}{4})$
1. Puesto que $Y(z) = aY(z)z^{-1} + bX(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1-az^{-1}} = H(z) \bullet \circ h(n) = ba^n u(n)$

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}} \\
 |H(\omega)| &= \frac{|b|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{|b|}{|1 - a(\cos \omega - j \sin \omega)|} \\
 &= \frac{|b|}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}} \\
 &= \frac{|b|}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega}} = \frac{|b|}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}} \\
 \angle H(\omega) &= \angle b - \arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right)
 \end{aligned}$$

2. $|H(\omega)|$ es máximo si el denominador es mínimo, y esto ocurre, puesto que $a \in [0, 1]$ cuando $\cos \omega$ es máximo, es decir, cuando $\omega = 0$:

$$|H(0)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 - 2a + a^2}} = \frac{|b|}{1 - a} \Rightarrow |b| = 1 - a$$

Elijiendo $b = 1 - a$ se obtienen las gráficas en la figura 4.14.

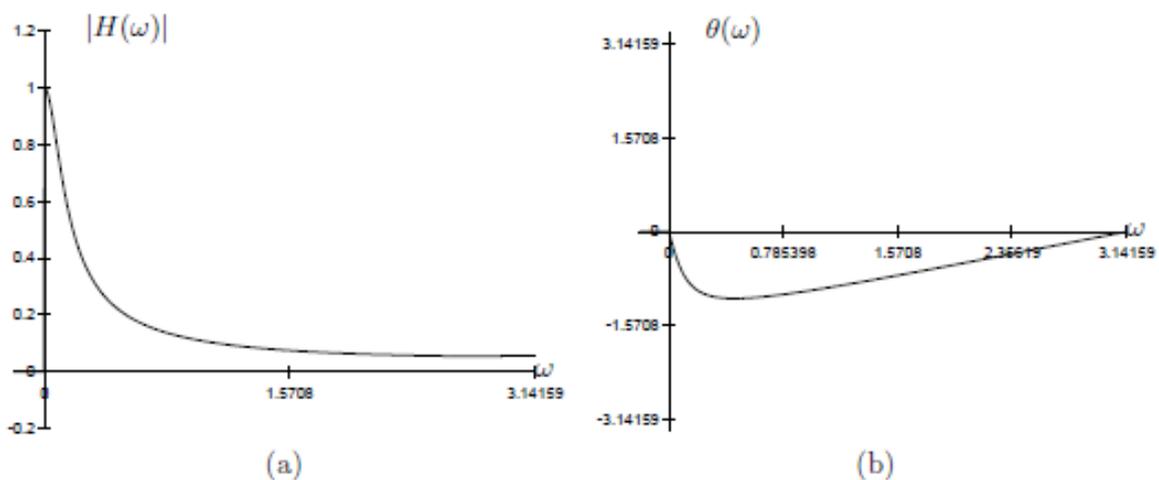


Figura 4.14: Respuestas de magnitud y fase para el sistema en el ejemplo (4.4).

3. Asumiendo $a = 0,9$, se requiere $H(0)$, $H(\frac{\pi}{2})$, $H(\pi)$

$$\begin{aligned}
 H(0) &= 1\angle 0^\circ \\
 \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| &= \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{0,1}{\sqrt{1,81}} = 0,074 \\
 \angle H\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\arctan a = -42^\circ \\
 |H(\pi)| &= \frac{1-a}{1+a} = \frac{0,1}{0,9} = 0,053 \quad \angle H(\pi) = 0
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 y(n) &= 5 + 12 \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \text{sen} \left[\frac{\pi}{2}n + \angle H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &\quad - 20 |H(\pi)| \cos \left[\pi n + \frac{\pi}{4} + \angle H(\pi) \right] \\
 &= 5 + 0,888 \text{sen} \left(\frac{\pi}{2}n - 42^\circ \right) - 1,06 \cos \left(\pi n + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

4.4

Respuesta transitoria y en régimen permanente a entradas sinusoidales

La sección anterior analizó la respuesta de sistemas LTI a una entrada cosenoidal o exponencial compleja “eterna”, es decir, aplicadas al sistema en $n = -\infty$. La respuesta observada es entonces en régimen permanente, y no hay respuesta transitoria.

Todo sistema LTI estable BIBO excitado por una señal exponencial compleja en $n = 0$ u otro tiempo finito, tendrá una respuesta transitoria que tiende a cero a medida que n tiende a infinito.

Ejemplo 4.5 Determine las respuestas transitoria y de estado permanente para:

$$x(n) = Ae^{j\omega n}u(n)$$

del sistema

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

En la sección 2.5.2 se demostró que la respuesta de este sistema con condiciones iniciales nulas es:

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^n a^k x(n-k), n \geq 0$$

Sustituyendo $x(n) = Ae^{j\omega n}u(n)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= a^{n+1}y(-1) + A \sum_{k=0}^n a^k e^{j\omega(n-k)} \\
 &= a^{n+1}y(-1) + A \left[\sum_{k=0}^n a^k e^{-j\omega k} \right] e^{j\omega n} \\
 &= a^{n+1}y(-1) + A \frac{1 - a^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\omega}} e^{j\omega n} \\
 &= a^{n+1}y(-1) - A \frac{a^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\omega}} e^{j\omega n} + A \frac{e^{j\omega n}}{1 - ae^{-j\omega}}
 \end{aligned}$$

El sistema es estable si $a < 1$, con lo que se obtiene para $n \rightarrow \infty$ la respuesta de estado permanente (*steady state*):

$$y_{ss}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} e^{j\omega n}$$

La respuesta transitoria está dada por los otros términos:

$$\begin{aligned}
 y_{tr}(n) &= a^{n+1} \left\{ y(-1) - \frac{Ae^{-j\omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\omega}} e^{j\omega n} \right\} \\
 &= a^{n+1} \left\{ y(-1) - \frac{Ae^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right\}
 \end{aligned}$$

y tiende a cero para $n \rightarrow \infty$.

4.5

Respuesta en régimen permanente a señales de entrada periódicas

Sea $x(n)$ una señal periódica, con periodo fundamental N , definida en el rango $-\infty < n < \infty$, por lo que la respuesta de un sistema LTI estable será la respuesta en régimen permanente. La señal $x(n)$ puede entonces expresarse por medio de una serie de Fourier:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

Puesto que la respuesta a $x_k(n) = c_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$ es:

$$y_k(n) = c_k H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

entonces, utilizando la linealidad del sistema se obtiene:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

con $d_k = c_k H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$. La respuesta tiene entonces el mismo periodo de la entrada, pero otra forma de señal debido a los cambios de amplitud y fase aportados por los coeficientes d_k .

Respuesta a señales de entrada aperiódicas

Puesto que la salida de un sistema LTI en tiempo discreto es:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

se obtiene en el dominio de la frecuencia:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

donde se deriva:

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |H(\omega)||X(\omega)| \\ \angle Y(\omega) &= \angle H(\omega) + \angle X(\omega) \end{aligned}$$

La respuesta en magnitud $|H(\omega)|$ indica cuáles frecuencias se amplifican y cuáles se atenúan. Nótese además que la salida de un sistema LTI no puede tener frecuencias que no estén presentes en la entrada y en la respuesta en frecuencia; sólo sistemas no lineales o variantes en el tiempo pueden generar nuevas frecuencias.

A pesar de que la salida $y(n)$ se puede obtener de la respuesta en frecuencia:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

no es usual emplear la transformada inversa de Fourier por ser relativamente más simple el tratamiento con la transformada z . La relación entre las densidades espectrales de la entrada $S_{xx}(\omega)$ y de la salida $S_{yy}(\omega)$ se obtiene fácilmente con:

$$S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

La energía de la salida es entonces:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega$$

Relaciones entre la función de transferencia y la respuesta en frecuencia

Si la ROC de la función de transferencia contiene a la circunferencia unitaria, entonces:

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

Si $H(z)$ es racional, $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ y asumiendo que $h(n)$ es real, entonces:

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})}$$

con los coeficientes reales $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, y los ceros $\{z_k\}$ y polos $\{p_k\}$ que pueden ser complejos. Si $h(n)$ es real, entonces $H(-\omega) = H^*(\omega)$ y así:

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (4.6)$$

$$= \mathcal{Z} \{r_{hh}(n)\} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (4.7)$$

lo que confirma el teorema de Wiener-Khinchin $|H(\omega)|^2 \bullet \rightarrow r_{hh}(n)$.

Sea $D(z) = B(z)B(z^{-1}) \bullet \rightarrow b(n) * b(-n)$ y $C(z) = A(z)A(z^{-1}) \bullet \rightarrow a(n) * a(-n)$. Puede demostrarse que:

$$c(n) = \sum_{k=0}^{N-|n|} a(k)a(k+n), \quad -N \leq n \leq N, a(k) = a_k$$

$$d(n) = \sum_{k=0}^{M-|n|} b(k)b(k+n), \quad -M \leq n \leq M, b(k) = b_k$$

que corresponden a la autocorrelación de $a(n)$ y $b(n)$, los coeficientes de denominador y numerador de la función de transferencia. Puesto que $A(\omega) = \sum_{k=0}^N a(k)e^{-j\omega k}$ y $B(\omega) = \sum_{k=0}^M b(k)e^{-j\omega k}$, $c_k = c_{-k}$ y $d_k = d_{-k}$:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{d_0 + 2 \sum_{k=1}^M d_k \cos k\omega}{c_0 + 2 \sum_{k=1}^N c_k \cos k\omega}$$

donde con $\cos k\omega = \sum_{m=0}^k \beta_m (\cos \omega)^m$, entonces $|H(\omega)|^2$ es una función racional de polinomios de $\cos \omega$. Esto implica que la densidad espectral de energía es continua, suave y si se indefiniría, o se hace cero, lo hace en puntos finitos aislados.

Cálculo de la respuesta en frecuencia

Para evaluar el efecto de los polos y ceros de la función de transferencia en la respuesta en frecuencia, evalúese entonces:

$$H(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})} = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)}$$

y con $e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\theta_k(\omega)}$, $e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\phi_k(\omega)}$, $V_k(\omega) = |e^{j\omega} - z_k|$, $\theta_k(\omega) = \angle(e^{j\omega} - z_k)$, $U_k(\omega) = |e^{j\omega} - p_k|$, $\phi_k(\omega) = \angle(e^{j\omega} - p_k)$, se obtiene:

$$|H(\omega)| = |b_0| \frac{V_1(\omega) \dots V_M(\omega)}{U_1(\omega) \dots U_M(\omega)}$$

$$\angle H(\omega) = \angle b_0 + \omega(N - M) + \theta_1(\omega) + \dots + \theta_M(\omega) - [\phi_1(\omega) + \dots + \phi_N(\omega)]$$

Nótese que $(e^{j\omega} - p_k)$ puede interpretarse geoméricamente como el fasor que va del polo p_k al punto $e^{j\omega}$ que se encuentra en la circunferencia unitaria con el ángulo ω . El mismo concepto se aplica a los ceros.

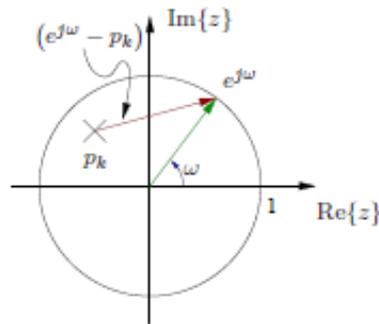


Figura 4.15: Interpretación geométrica del factor $(e^{j\omega} - p_k)$.

La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se hará muy pequeña si $z = e^{j\omega}$ pasa cerca de un cero, o se hará muy grande si pasa cerca de un polo.

Nótese que si la magnitud de $H(\omega)$ se expresa en decibelios, entonces:

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |b_0| + 20 \sum_{k=1}^M \log_{10} V_k(\omega) - 20 \sum_{k=1}^N \log_{10} U_k(\omega)$$

4.9 Sistemas LTI como filtros selectivos en frecuencia

Filtro es un caso particular de sistema que discrimina algún atributo de los objetos o señales aplicados a su entrada, y permite o suprime el paso de dichos objetos o señales si y solo si estos presentan ese atributo. Así, filtros de aire y aceite permiten que estas sustancias los atraviesen, evitando que otras impurezas como polvo alcancen su salida; filtros de luz (por ejemplo, luz infraroja) permiten el paso de sólo una parte del espectro electromagnético. En las secciones anteriores se presentó la propiedad de los sistemas LTI de filtrar diferentes componentes en frecuencia de su señal de entrada, caracterizada por la respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Es por ello que los términos *sistema LTI* y *filtro* se utilizan con frecuencia como sinónimos.

Eligiendo la posición de los polos y ceros en la función de transferencia se eligen los coeficientes a_k y b_k para obtener una determinada forma de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, que puede considerarse como función de ponderación o conformación espectral, pues la salida del sistema es $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.

Los sistemas LTI en estas funciones de filtrado selectivo de frecuencias o conformación espectral se utilizan de varias maneras: como eliminadores de ruido, conformación espectral para igualación de canales de comunicación, detección de señales en radar y sonar, análisis espectral, etc. En esta sección se revisaran algunos conceptos básicos, que serán retomados en el capítulo 7 con mayor detalle.

Filtros ideales

Como filtro ideal se conoce un sistema LTI con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es decir, una ganancia constante C en la banda de paso, y cero en la banda eliminada. Algunos filtros selectivos se muestran en la figura 4.16.

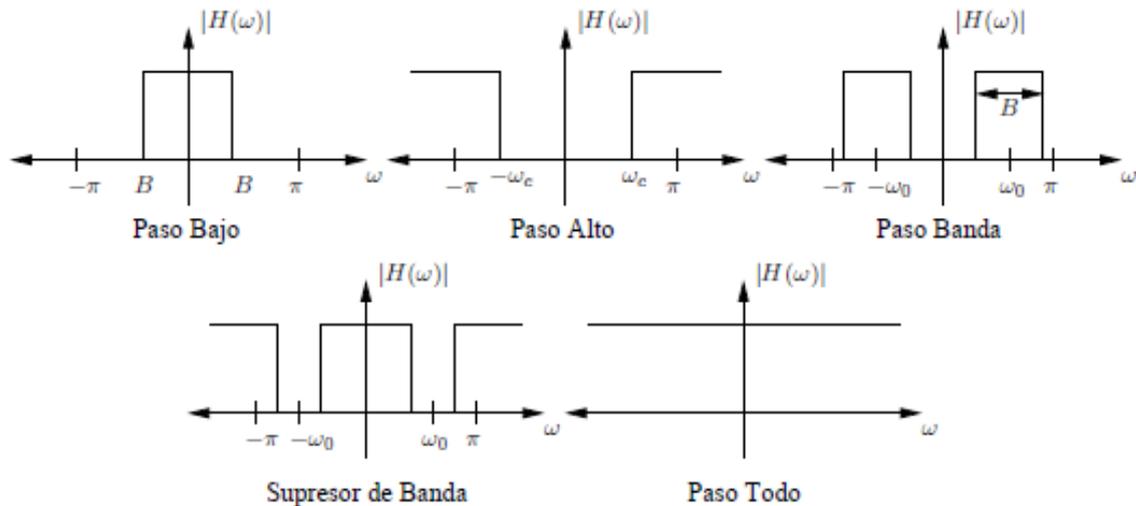


Figura 4.16: Respuesta en magnitud de algunos filtros ideales selectivos en frecuencia.

La respuesta de fase lineal permite que señales de entrada con componentes frecuenciales confinadas en el intervalo $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ sean simplemente escaladas y trasladadas en el tiempo, pues:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) \\ &= Ce^{-j\omega n_0}X(\omega) \\ &= CX(\omega)e^{-j\omega n_0} \bullet \circ y(n) = Cx(n - n_0) \end{aligned}$$

El retardo no es considerado como una distorsión grave de la señal y es usualmente tolerado, tal y como el escalado en amplitud. En estos filtros la derivada de la fase tiene unidades de retardo, y a la magnitud

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}, \quad \theta(\omega) = \angle H(\omega)$$

se le denomina *retardo de envolvente* o *retardo de grupo* del filtro. En el caso de los filtros ideales, puesto que $\theta(\omega) = -\omega n_0$, entonces $\tau_g(\omega) = n_0$ y es constante. En general, $\tau_g(\omega)$ indica el retardo temporal que experimenta la componente de frecuencia ω cuando pasa a través del sistema. Entonces, en los filtros ideales todas las componentes se retrasan.

Los filtros ideales no son realizables. Por ejemplo, la respuesta impulsional del filtro paso bajo es:

$$h_{lp}(n) = \frac{\text{sen}(\omega_c \pi n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

que es anticausal, infinita y no es absolutamente sumable, por lo que el sistema es inestable. Algunos filtros digitales básicos pueden diseñarse colocando polos y ceros en el plano z , cerca de la circunferencia unitaria, de tal forma que se obtenga la forma de la respuesta en magnitud deseada, donde los polos deben estar en el interior de la circunferencia unidad, y si hay polos o ceros complejos, deben presentarse entonces en pares conjugados.

Filtros paso alto, paso bajo y paso banda

En el diseño de filtros paso bajo, los polos deben situarse cerca de los puntos de la circunferencia unidad correspondientes a las bajas frecuencias (cerca de $\omega = 0$) y los ceros cerca de los puntos de la circunferencia unidad correspondientes a las altas frecuencias (cerca de $\omega = \pi$). El caso contrario es para filtros paso alto.

Ejemplo 4.6 Diseñe un filtro paso bajo con $|H(0)| = 1$ y

1. un solo polo en $p_1 = 0,9$
2. un polo y un cero en $p_1 = 0,9$ y $z_1 = -1$

1. En general, un sistema LTI tiene la forma:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

Un filtro de primer orden sin ceros tendrá la función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{b_0}{1 - p_1 z^{-1}} = \frac{b_0}{1 - 0,9z^{-1}} \Rightarrow H_1(\omega) = \frac{b_0}{1 - 0,9e^{-j\omega}}$$

Puesto que $|H_1(0)| = 1 = \frac{b_0}{0,1} \Rightarrow b_0 = 0,1$; $H_1(\pi) = \frac{0,1}{1,9} = 0,0526$.

2. En este caso

$$H_2(\omega) = \frac{b_0(1 - z_1 z^{-1})}{1 - p_1 z^{-1}} = b_0 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}} \Rightarrow H_2(\omega) = b_0 \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - 0,9e^{-j\omega}}$$

$$\text{y } H_2(0) = b_0 \frac{1+1}{0,1} = 20b_0 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{20}, H_2(\pi) = 0$$

4.6

Reflejando los polos y ceros con respecto al eje imaginario, se obtienen filtros paso alto:

$$H_1(\omega) = \frac{b_0}{1 + 0,9e^{-j\omega}}, \quad H_2(\omega) = \frac{b_0(1 - e^{-j\omega})}{1 + 0,9e^{-j\omega}}$$

Para filtros paso banda, se debe escoger un par de polos complejos conjugados cerca de la circunferencia unidad en la vecindad de la banda de paso.

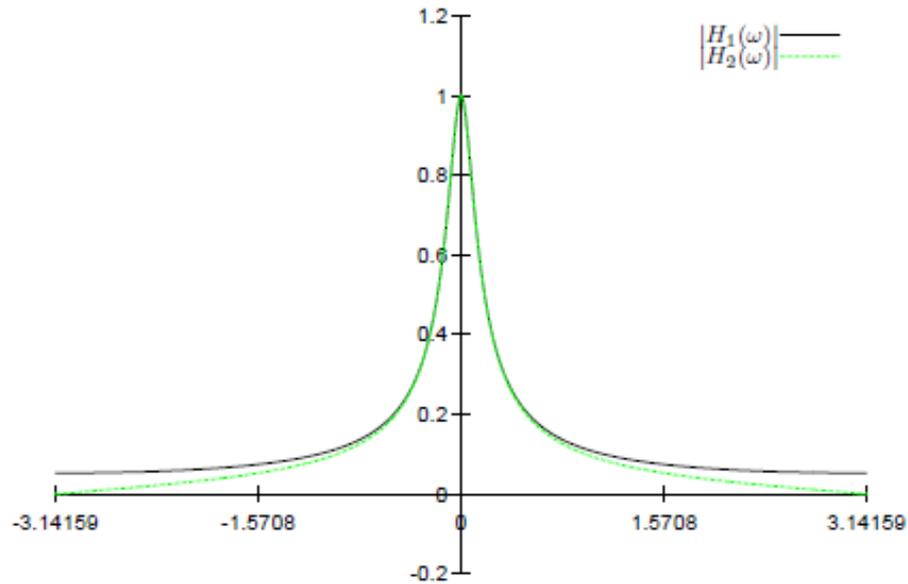


Figura 4.17: Respuesta en magnitud de (1) filtro paso bajo de un polo, (2) filtro paso bajo de un polo y un cero; $H_1(z) = (1 - a)/(1 - az^{-1})$, $H_2(z) = [(1 - a)/2][(1 + z^{-1})/(1 - az^{-1})]$ y $a = 0,9$.

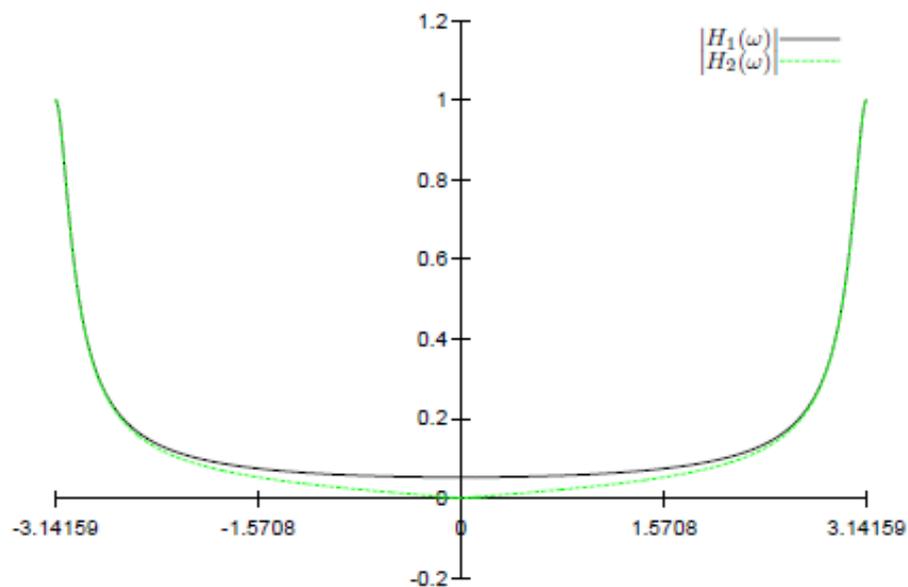


Figura 4.18: Respuesta en magnitud de un filtro paso alto $H_1(z) = (1 - a)/(1 + az^{-1})$, $H_2(z) = [(1 - a)/2][(1 - z^{-1})/(1 + az^{-1})]$ y $a = 0,9$.

Ejemplo 4.7 Diseñe un filtro paso banda de segundo orden con banda de paso en $\omega = \frac{\pi}{2}$, con $|H(0)| = |H(\pi)| = 0$, $|H(\frac{4\pi}{9})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|H(\frac{\pi}{2})| = 1$.

Solución: Los polos deben estar en $p_{1,2} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm rj, 0 < r < 1$, y los ceros en $z_1 = 1$ y

4.10 Sistemas inversos

Por medio de la convolución, los sistemas LTI transforman una señal $x(n)$ en la salida $y(n)$. En ciertos casos se desconocen exactamente las características del sistema y se desea,

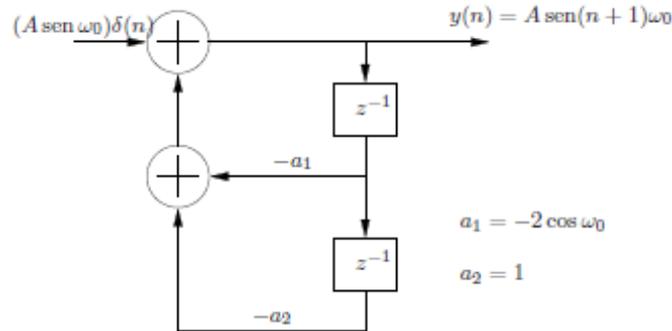


Figura 4.30: Generador digital de sinusoides.

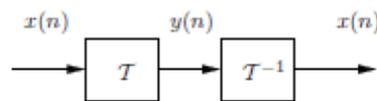


Figura 4.31: Sistema T en cascada con su inverso T^{-1} .

teniendo $y(n)$, determinar $x(n)$. Esto ocurre por ejemplo cuando se desea contrarrestar los efectos de distorsión que produce un canal de transmisión de datos. Se desea entonces diseñar un sistema que en cascada con el sistema original, produzca la señal de entrada.

A este segundo sistema se le denomina *sistema inverso* y a la operación que toma $y(n)$ y produce $x(n)$ se le denomina *deconvolución*.

La determinación del sistema inverso requiere conocimiento sobre la respuesta impulsional $h(n)$ o la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, que se obtienen en un proceso llamado "identificación del sistema". Para esto se alimenta al sistema desconocido con señales de entrada conocidas (por ejemplo, senoidales de frecuencia y amplitud conocidas) y se revisan las salidas.

Invertibilidad de sistemas LTI

Un sistema es *invertible* si existe una correspondencia biunívoca entre sus señales de entrada y de salida. Esto quiere decir que si se conoce la salida $y(n)$ para todo n , entonces se puede inferir la entrada $x(n)$. El sistema inverso se denota con T^{-1} y se cumple que:

$$y(n) = T[x(n)], \quad x(n) = T^{-1}[y(n)] = T^{-1}[T[x(n)]]$$

Para sistemas LTI, asúmase que el sistema T tiene una respuesta impulsional $h(n)$, y $h_I(n)$ es la respuesta del sistema inverso T^{-1} . Se debe cumplir entonces que:

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n) \iff H(z)H_I(z) = 1$$

de donde se obtiene

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Para un sistema con $H(z)$ racional, si:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

entonces

$$H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

lo que quiere decir que los ceros de $H(z)$ se convierten en los polos de $H_I(z)$ y viceversa. Esto a su vez implica que si $H(z)$ es todo ceros (FIR), entonces $H_I(z)$ es todo polos (IIR) y viceversa.

Ejemplo 4.9 Determine el sistema inverso de $h(n) = u(n)$.

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow H_I(z) = 1 - z^{-1} \bullet \circ h_I(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$$

4.9

Ejemplo 4.10 Determine el sistema inverso del sistema con respuesta impulsional $h(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$. Con

$$H(z) = 1 - z^{-1} \Rightarrow H_I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

que tiene dos posibles soluciones

$$h_I(n) = u(n) \quad \text{ó} \quad h_I(n) = -u(-n - 1)$$

4.10

Otra manera más “algorítmica” de obtener la respuesta impulsional $h_I(n)$ se basa en la convolución. Si se asume que $h(n)$ y su inverso son causales, entonces:

$$h(n) * h_I(n) = \sum_{k=0}^n h(k)h_I(n - k) = \delta(n) \tag{4.8}$$

Para $n = 0$ se cumple $h(0)h_I(0) = 1 \Rightarrow h_I(0) = \frac{1}{h(0)}$, y puesto que para $n > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n h(k)h_I(n - k) &= h(0)h_I(n) + \sum_{k=1}^n h(k)h_I(n - k) = 0 \\ \Rightarrow h_I(n) &= -\frac{\sum_{k=1}^n h(k)h_I(n - k)}{h(0)} \end{aligned}$$

lo que se puede programar directamente. Si $h(0)$ es cero, entonces debe introducirse un retardo en (4.8) sustituyendo $\delta(n)$ por $\delta(n - m)$, donde para $n = m$, $h(n) \neq 0$ y $h(n) = 0$ si $n < m$. Este método tiene, sin embargo, el problema de que conforme n crece, el error numérico acumulado crece.

4.1.1 Transformada Discreta de Fourier

En las secciones anteriores se observó que señales discretas aperiódicas, como señales digitales de audio, señales digitales sísmicas, señales médicas, etc., tienen un espectro periódico pero continuo, que no tiene una representación directa para ser manejado por medios digitales.

En esta sección se estudia la transformada discreta de Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform) que representa un mecanismo para el estudio frecuencial por medios digitales para las mencionadas señales.

Toda señal aperiódica $x(n)$ de energía finita tiene un espectro continuo

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

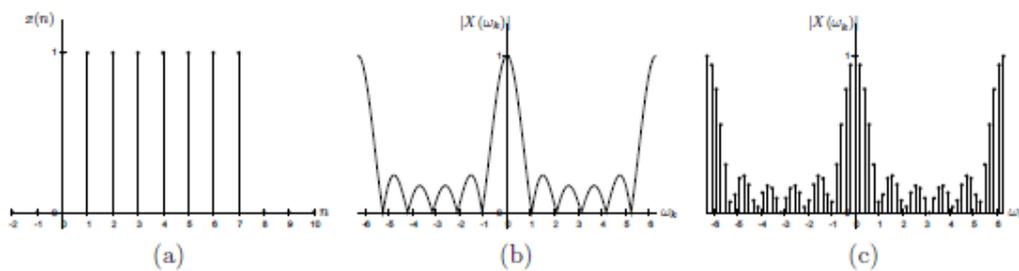


Figura 4.33: Señal discreta aperiódica, su espectro continuo, y su espectro muestreado.

Si $X(\omega)$ se muestrea periódicamente (figura 4.33) con un espaciado frecuencial $\delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ solo se necesitarán N muestras puesto que el espectro, por corresponder a una señal discreta, es a su vez periódico con periodo 2π . Las muestras en $\omega = k\delta\omega = \frac{2\pi}{N}k$ son entonces

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

donde descomponiendo la sumatoria en subintervalos de N elementos y haciendo un cambio de variable para trasladar cada subintervalo al origen se modifica en

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right]}_{x_p(n)} e^{-j2\pi kn/N}$$

con $k = 0, 1, \dots, N-1$.

La señal

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

se obtiene repitiendo periódicamente $x(n)$ cada N muestras, y por ser periódica puede calcularse su serie de Fourier como

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

con los coeficientes

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

Con esta serie, $x_p(n)$ puede ser reconstruido del espectro muestreado con

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

La señal $x(n)$ puede recuperarse de $x_p(n)$ si y solo si no hay *aliasing* en el dominio del tiempo, es decir, si la longitud L de $x(n)$ es menor que el periodo N de $x_p(n)$ (figura 4.34):

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

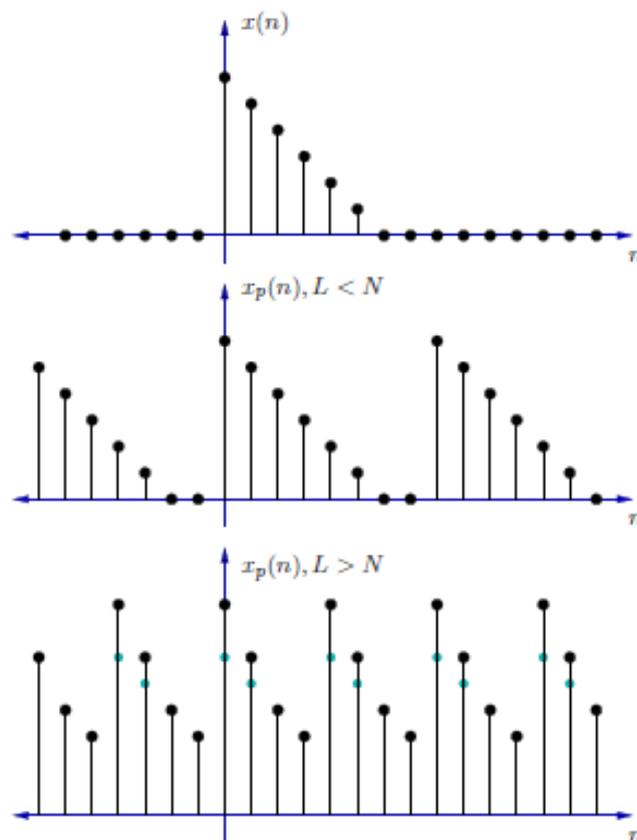


Figura 4.34: Extensión periódica por muestreo del espectro. a) Señal original, b) Extensión con $L < N$, c) Extensión con $L > N$.

Si no hay aliasing en el tiempo ($L < N$) entonces

$$x(n) = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

con espectro

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N} \right] e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{N})n} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{\text{sen}(\omega N/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

es la función de interpolación que sustituye en este caso a $\text{sen}(\theta)/\theta$ con una versión de propiedades similares pero periódica (figura 4.35):

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

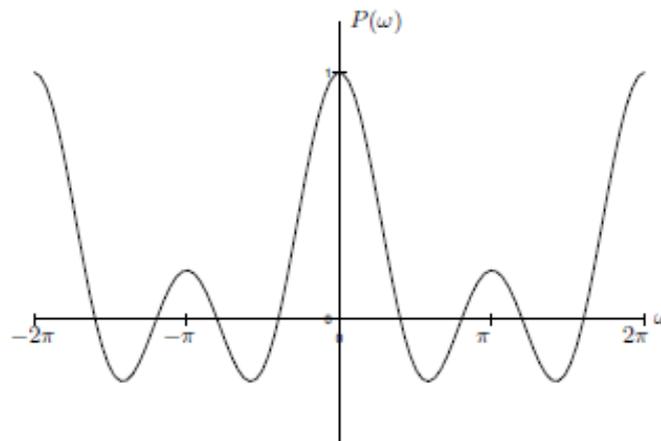


Figura 4.35: Interpolador ideal $P(\omega)$ para espectro muestreado con $N = 5$.

Ejemplo 4.12 Determine el aliasing de la secuencia $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$, si el espectro se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$.

El espectro es

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Bibliografía básica y complementaria:

- sistemas lineales determinísticos multivariantes, invariantes y continuos.
- dpto. electrónica, automática e informática industrial
- Sistemas de Modulación <http://code.pediapress.com/>
- modelacion en variables de estado
- introduccion al modelado de sistemas fisicos dpto. de electrotecnia.
- Departamento de matematicas. universidad de alcalá de henares.
- ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado sexta edicion dennis g. zill
- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes
- Transformada Zeta Aplicación: Señales y sistemas de tiempo discreto o digita
- Fourier y el procesamiento digital de señales Martin Carrizo
- matemáticas avanzadas para ingeniería: transformada z inversa departamento de matemáticas
- introducción al procesamiento digital de seales. Juan Vignolo Barchiesi
- teoría de sistemas y señales. Señales en tiempo discreto. Teorema de muestreo. Dr. Juan Carlos Gomez.
- Modelado de sistemas físicos. Autómatas. Departamento de ingeniería de sistemas y automática.
- Señales y sistemas. Filtros.departamento de teoría de la señal y comunicación. Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

asuncion.moreno@upc.edu

- Escola tècnica superior enginyeria. Departament d enginyeria eelectronica.